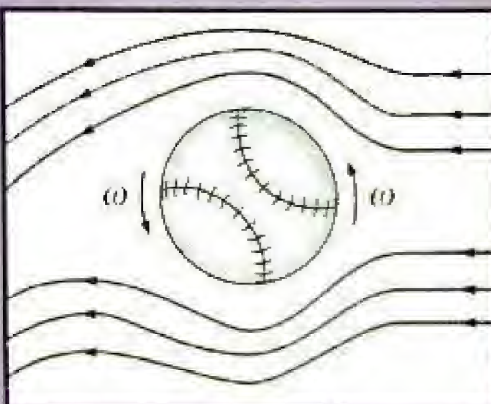
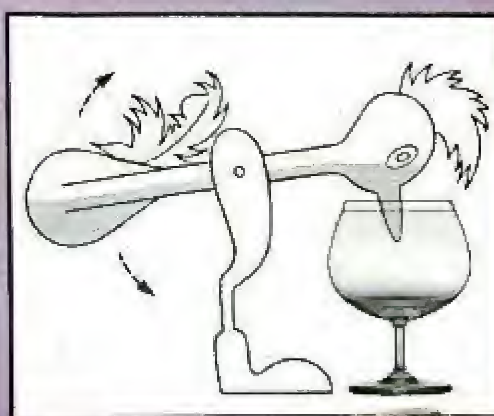
Tercera Edición

FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

Principios. Preguntas y Problemas Resueltos

DOUGLAS FIGUEROA





1- 110499

Primera Edición: 1995
Segunda Edición: 2001

TERCERA EDICIÓN

Titulo Original:

FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

Serie "Física para Ciencias e Ingeniería" – Volumen 4

DEPÓSITO LEGAL lf 25220086205239

ISBN 978-980-12-3578-1

Composición y Diagramación

Douglas Figueroa

Impresión

Miguel Ángel García e Hijo, SRL
Sur 15 – El Conde - Caracas

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

INTRODUCCIÓN

Esta serie es fruto de muchos años de experiencia del autor en la enseñanza de los distintos cursos introductorios de física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería de la Universidad Simón Bolívar. No pretende sustituir al libro de texto; su único propósito es complementarlo, poniendo a disposición del alumno, un abundante número de problemas, ejercicios y preguntas, para ayudarlo en su estudio del curso fuera del aula, con la aplicación de los principios y leyes físicas en múltiples situaciones interesantes y estimulantes, vinculadas a la realidad. Creemos que, con un trabajo continuo basado en el planteamiento y la discusión de preguntas y en la resolución de problemas, el alumno puede desarrollar a su propio ritmo, hábitos de razonamiento lógico y estrategias metodológicas que le permita vencer las dificultades que son inherentes al aprendizaje de esta asignatura, una tarea que difícilmente puede lograr el docente en el limitado tiempo de clase que dispone. Este volumen 4 está dedicado al tema de Fluidos y Termodinámica, y se presenta en cinco capítulos organizados en tres secciones:

a) Principios Fundamentales: La teoría es expuesta en forma lógica, clara y concisa, tratando de destacar las ideas esenciales y las leyes generales, para permitir una rápida revisión.

b) Problemas Resueltos: Es una selección de problemas con distintos grados de dificultad, que cubren una amplia gama de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones próximas a la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos. Se dan todas las soluciones en detalle, resaltando el aspecto metodológico y didáctico.

c) Verifica tu comprensión: Son preguntas y ejercicios expresados en forma de elección múltiple, a fin de que compruebes tu comprensión conceptual de los temas abordados y al mismo tiempo que desarrolles tu intuición y sentido físico. La mayoría son de naturaleza conceptual o plantean ejercicios cualitativos, cuya solución se alcanza mediante el razonamiento reflexivo, sin tener que recurrir a las fórmulas. Algunas preguntas presentan situaciones aparentemente paradójicas que podrían ir en contra del sentido común, !piénsalas antes de mirar la respuesta!

La resolución de problemas de física es un proceso intelectual parecido a una pequeña investigación científica en que, no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de pasos a seguir para obtener un resultado correcto. La destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con dedicación y ahínco, hasta adquirir un dominio razonable de los conceptos, principios y leyes físicas que permitan un nivel de aprovechamiento satisfactorio. Esperamos que logres culminar esta asignatura con mucho éxito. ¡Suerte, y adelante!

Douglas Figueroa, PhD
figueroa @usb.ve

CONTENIDO

1

ESTÁTICA DE FLUIDOS

La materia suele clasificarse dentro de una de las tres fases: sólida, líquida o gaseosa. El que una sustancia sea sólida, líquida o gaseosa depende de la intensidad de la interacción entre sus moléculas constituyentes. En un sólido estas interacciones son relativamente fuertes, y las moléculas tienden a vibrar alrededor de posiciones fijas de equilibrio. El sólido tiene una forma y un tamaño definido y resiste las fuerzas que traten de cambiarlo. Por otra parte, las fuerzas de cohesión intermoleculares son menores en los líquidos y muy débiles en los gases. Las moléculas en los líquidos y los gases no están vinculadas invariablemente entre sí y realizan movimientos desordenados. Por esta razón, los líquidos y los gases carecen de forma propia y pueden fluir para adquirir la forma del recipiente que los contiene. Nos referiremos a los líquidos y gases colectivamente como *fluidos*. El agua y el aire son dos fluidos importantes en nuestra vida cotidiana que tienen muchas propiedades en común. Este capítulo se enfocará sobre el tema de la *estática de fluidos*, es decir, el estudio de los fluidos en reposo, en situaciones de equilibrio. A un sólido es posible aplicarle una fuerza en un punto de contacto, pero en un fluido se debe aplicar la fuerza en un área. Se describe el comportamiento macroscópico de un fluido a partir de los conceptos de densidad y de presión, y aplicando dos principios fundamentales: el principio de Pascal y el principio de Arquímedes.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

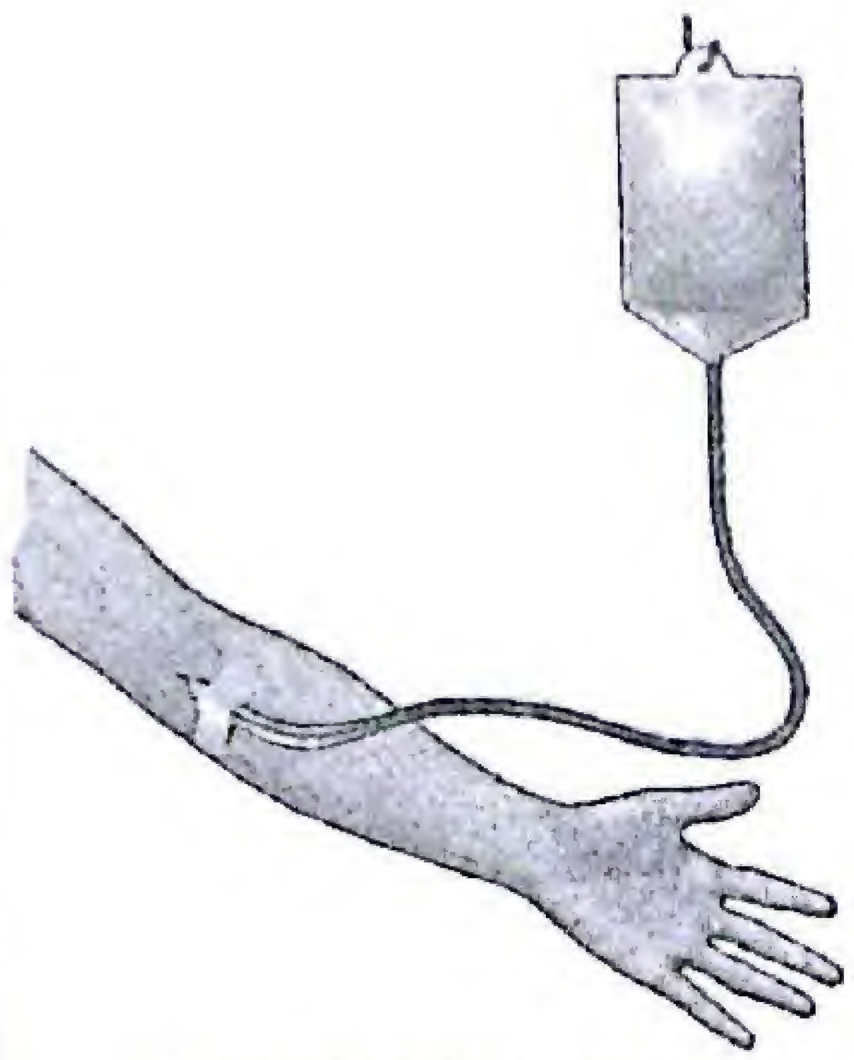
- Presión
- Densidad
- Variación de la presión con la profundidad
- Principio de Pascal
- Presión absoluta y presión manométrica
- Principio de Arquímedes
- Centro de Flotación
- Tensión Superficial
- Cohesión, Adhesión y Capilaridad

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

¿QUÉ ES UN FLUIDO?

Un fluido es cualquier sustancia que ofrezca poca o ninguna resistencia a esfuerzos tangenciales cortantes. En un fluido las moléculas se mantienen en movimiento, ligadas por fuerzas cohesivas débiles, de modo que al ser sometido a esfuerzos cortantes sus capas contiguas se desplazan fácilmente. Esto le da a los fluidos su habilidad para fluir y adoptar la forma del recipiente. Tanto los líquidos como los gases son fluidos.

Los fluidos juegan un papel crucial en muchos aspectos de la vida diaria. Ellos circulan por nuestro organismo transportando nutrientes a las células, los bebemos, los respiramos y vivimos sumergidos en un océano de aire. El agua es el principal e imprescindible componente del cuerpo humano, estando constituido por cerca de sus dos terceras partes.



Dos tercios de tu cuerpo es pura agua

DENSIDAD

La densidad es una propiedad intrínseca de la materia que se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = m/V$$

Si la densidad varía de punto a punto, se debe usar la relación diferencial:

$$\rho = \Delta m/\Delta V$$

Siendo Δm un elemento infinitesimal de masa y ΔV es el elemento infinitesimal de volumen que ocupa.

Densidad

$$\boxed{\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}}$$

Unidad SI de densidad:
1 kg/m^3

Agua: $\rho \sim 1000$ kg/m^3

PRESIÓN EN UN FLUIDO

Las moléculas de un fluido están en constante movimiento, colisionando entre sí y también con las paredes del recipiente. La presión es el resultado de la transferencia de cantidad de movimiento durante estos choques. La presión media, p, en cualquier superficie de

área A, se define como la fuerza $F_\perp$ normal por unidad de área:

$$p = F_\perp / A$$

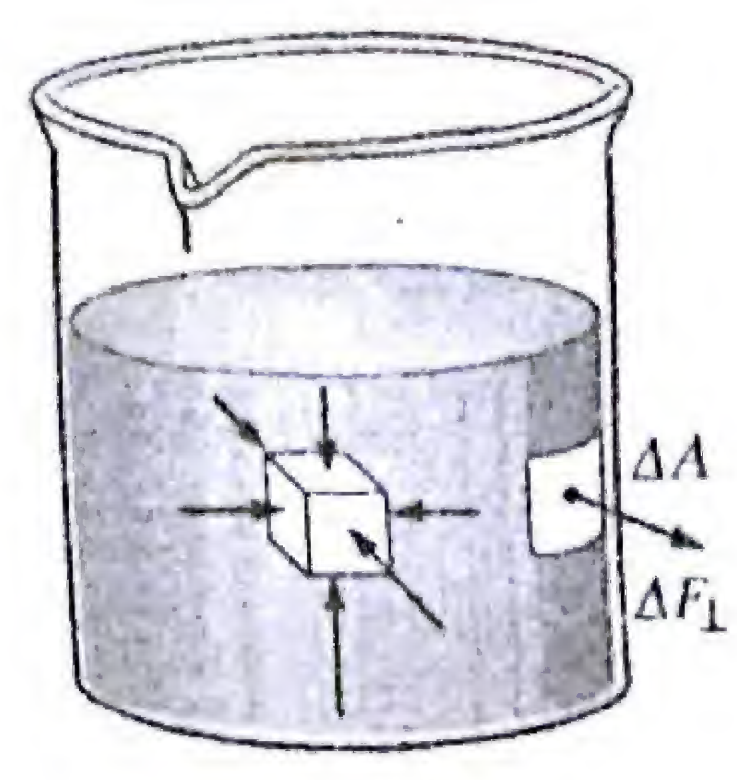
La presión es una magnitud *escalar*.

La unidad SI de presión es el pascal:

$$\text{Un pascal: } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

La presión atmosférica es la que ejerce la atmósfera terrestre. Esta presión varía con el clima y con la altura. Al nivel del mar, tiene un valor promedio de *una atmósfera*:

$$p_{atm}(\text{medio}) = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}.$$



Presión

$$\boxed{p = \frac{\Delta F_\perp}{\Delta A}}$$

FLUIDOS EN REPOSO (HIDROSTÁTICA)

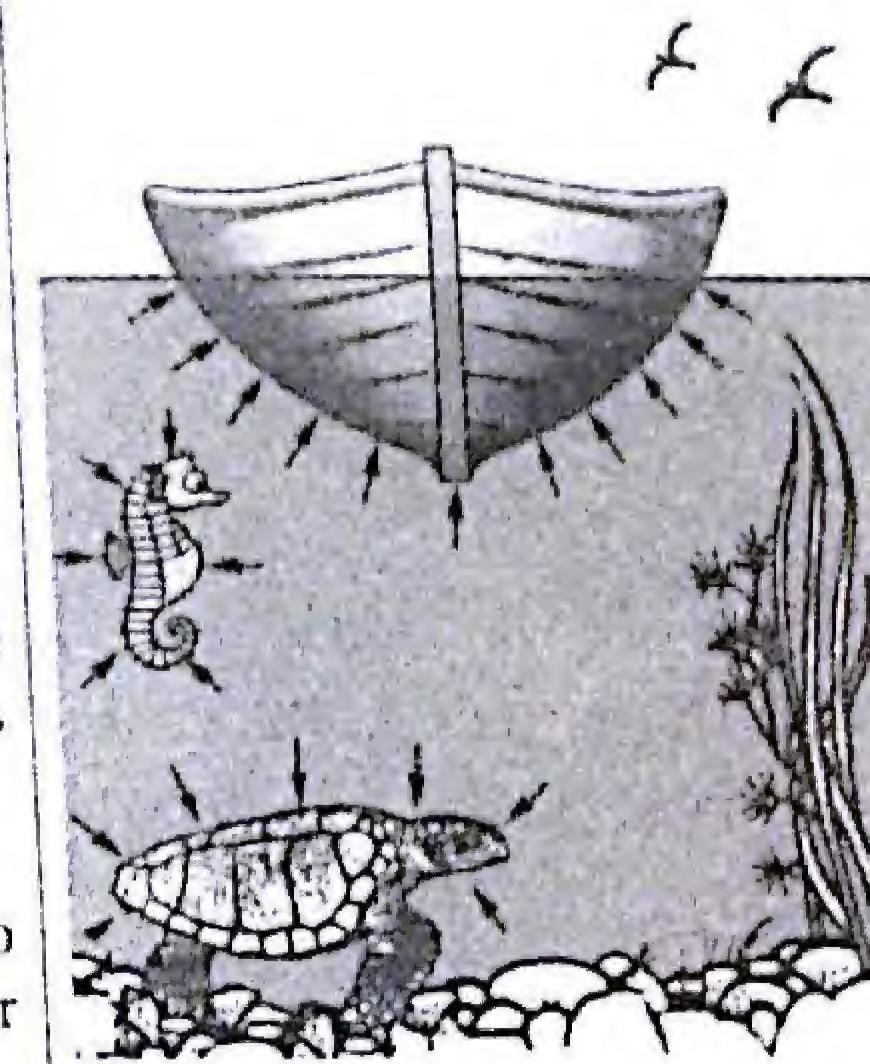
Si consideremos un *fluido en reposo* la falta de rigidez que lo caracteriza tiene varias implicaciones:

1) La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes de un recipiente siempre actúa perpendicularmente a las paredes.

2) La fuerza ejercida por un fluido sobre un objeto sumergido en él siempre es perpendicular a las superficies del objeto, y tiende a comprimirlo.

3) La presión ejercida por el fluido sobre un pequeño elemento de volumen a su alrededor tiene el mismo valor en todas las direcciones.

4) Todos los puntos que se encuentran a la misma profundidad deben estar a la misma presión, ya que si no fuera así, el fluido estaría en movimiento..



Presión de un fluido sobre objetos sumergidos

PRESIÓN Y PROFUNDIDAD

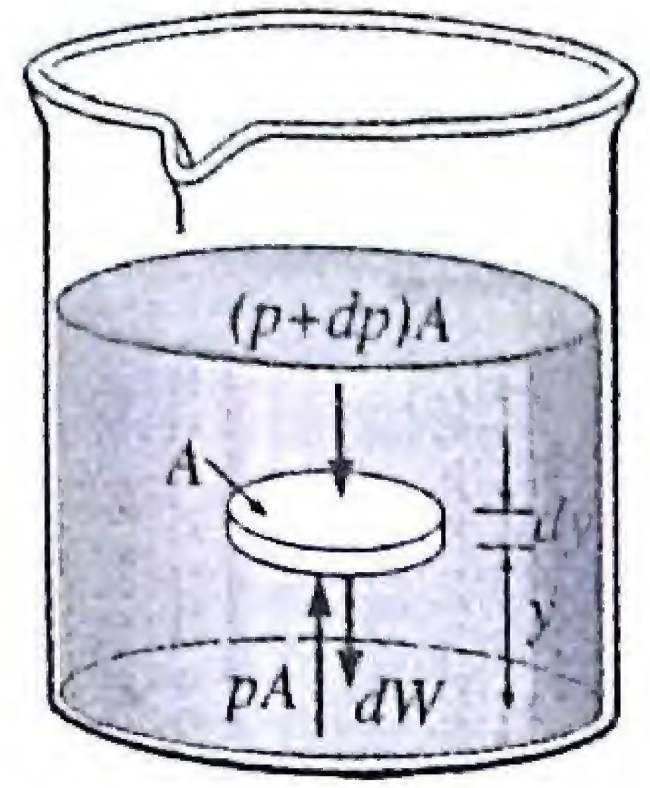
Para determinar cómo varía la presión de un fluido con la profundidad, consideremos una rebanada de fluido de espesor dy y área A que está ubicada a una altura y. El peso de la rebanada diferencial es:

$$dW = (dm)g = (\rho dV)g = (\rho A dy)g$$

Siendo ρ la densidad del fluido. El fluido alrededor de la rebanada a la altura y ejerce una fuerza pA hacia arriba, y a la altura $(y+dy)$ ejerce una fuerza $(p+dp)A$ hacia abajo. Como la rebanada está en equilibrio, se tiene:

$$pA - (p+dp)A - (\rho A dy)g = 0$$

$$dp = -\rho g\, dy$$



Fuerzas sobre una rebanada de fluido

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho g h}$$

Esto significa que, para una disminución de la elevación (dy negativo) corresponde un aumento de la presión $\rho g dy$. Sea p_1 la presión a la profundidad y_1 y p_2 la presión a la profundidad y_2. Si integramos la expresión anterior, y suponemos la densidad uniforme (ρ= constante), se obtiene:

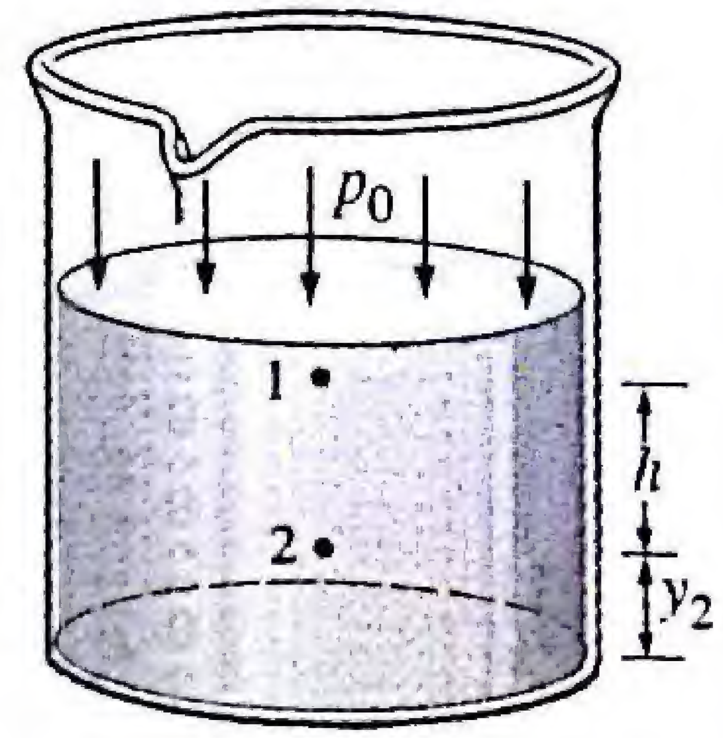
$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy = -\rho g(y_2 - y_1) = \rho g h$$

Si tomamos la coordenada y_1 al nivel de la superficie libre del fluido y llamamos p_0 la presión que allí existe, entonces a una profundidad h, la presión será:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Es decir, la presión aumenta linealmente con la profundidad vertical por debajo de la superficie del líquido.

En este caso p_0 representa la presión aplicada a la superficie del líquido o *presión atmosférica*.

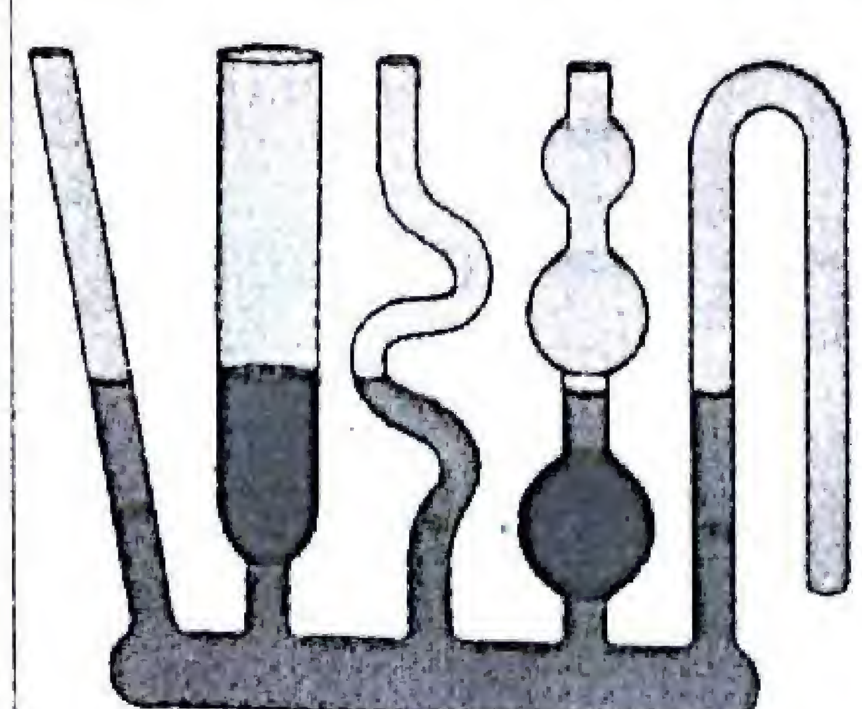


La presión aumenta linealmente con la profundidad en el líquido

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

Una consecuencia del resultado anterior es que, a una profundidad dada, la presión es la misma, independiente de la forma del recipiente.

El arreglo de recipientes mostrado es el que utilizamos en las clases de demostraciones de física. Cuando le echamos cualquier cantidad de un líquido, éste alcanza el mismo nivel en todos los recipientes que se comunican entre sí, mostrando que la presión en el fluido es la misma en todos los puntos que están situados a la misma altura.

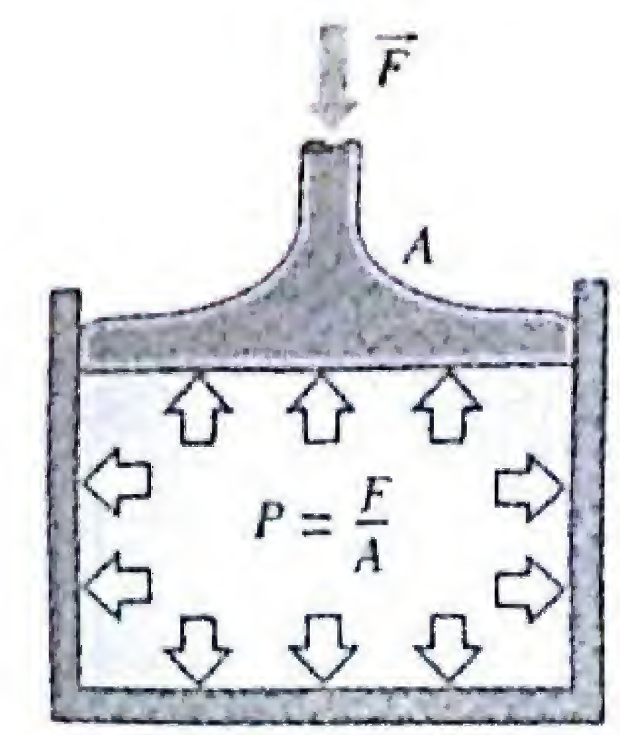


La forma del recipiente no afecta la presión

PRINCIPIO DE PASCAL

Una consecuencia importante de la variación lineal de la presión con la profundidad en un fluido es el principio de Pascal:

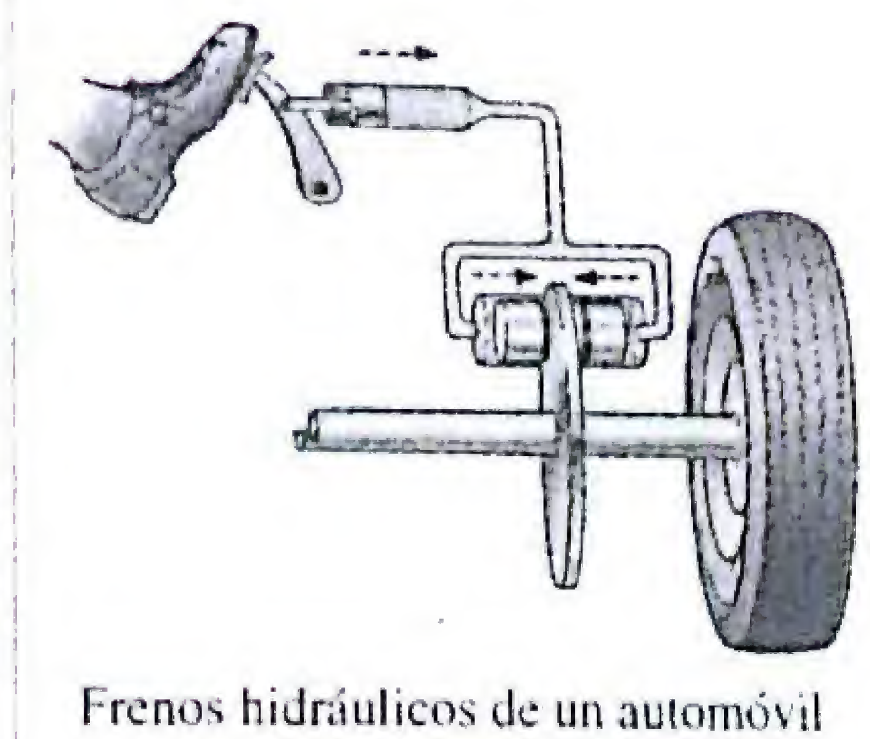
Bajo condiciones de equilibrio, un cambio en la presión aplicada a un fluido incompresible que está encerrado, se transmite uniformemente hacia todo el fluido y hacia las paredes del recipiente



El fluido transmite en todas direcciones la presión.

La prueba de este principio es simple. Si la presión en un punto es alterada en cierta cantidad, entonces la presión en cualquier otro punto debe ser alterada en la misma cantidad. De lo contrario la diferencia no tendrá el valor $\rho g h$ y la presión extra no equilibrada haría fluir al líquido.

Una de las aplicaciones prácticas del principio de Pascal es el sistema de frenos hidráulicos que utilizan los automóviles. Una fuerza relativamente pequeña aplicada por el pie sobre el pedal de freno es transmitida por el fluido con una gran fuerza al cilindro de freno de cada una de las ruedas.

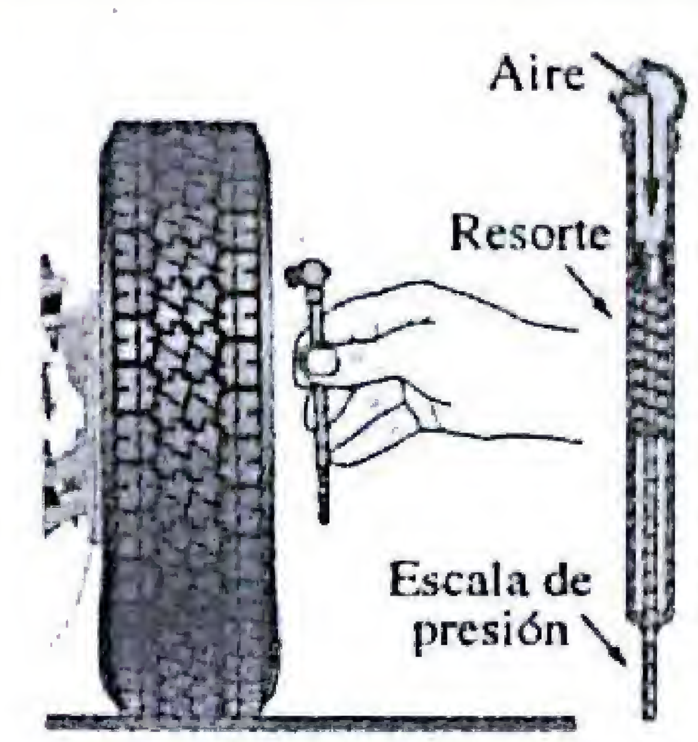


Frenos hidráulicos de un automóvil

CÓMO SE MIDE LA PRESIÓN

Estamos familiarizados con el medidor de la presión para el aire de los neumáticos de un automóvil que está basado en la compresión de un resorte. Este lo que mide es la diferencia entre la presión en el neumático y la presión atmosférica. Si por ejemplo, el medidor indica 29 psi (29 libras/pulg^2) $\approx 2\text{x}10^5$ Pa, la presión real o absoluta del aire dentro del neumático es aproximadamente:

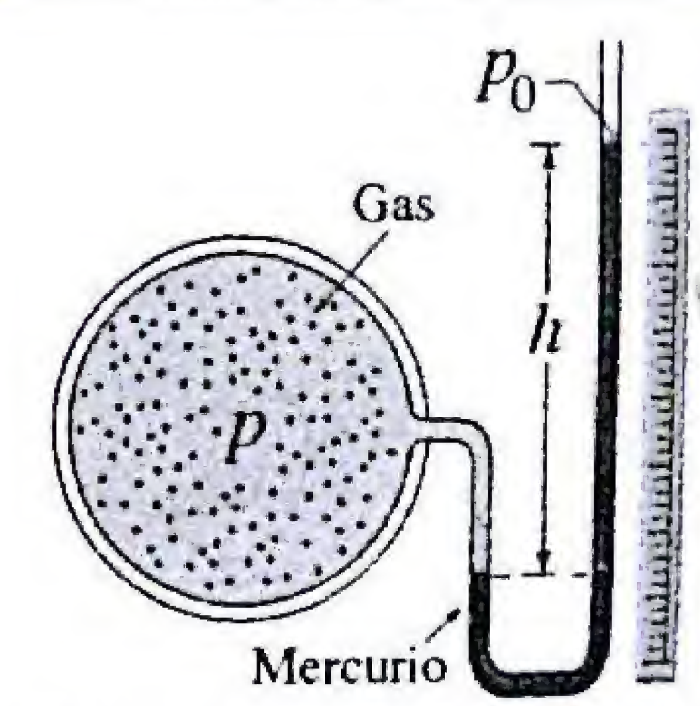
$$2\text{x}10^5 \text{ Pa} + 1\text{x}10^5 \text{ Pa} \approx 3\text{x}10^5 \text{ Pa}.$$



Un medidor de presión del aire

PRESIÓN ABSOLUTA Y MANOMÉTRICA

En la mayoría de los dispositivos utilizados para medir la presión, se compara la presión dentro del sistema con la presión que existe afuera. Por ejemplo, en el manómetro de tubo abierto mostrado, la presión p del gas en el recipiente esférico es equilibrada por la presión debida a la columna líquida de mercurio, $\rho g h$ y la presión atmosférica, p_0, que actúa sobre la columna abierta.



Un manómetro de tubo abierto

$$p = p_0 + \rho g h$$

La presión p del gas recibe el nombre de presión absoluta, en tanto que la diferencia de presión: $p - p_0 = \rho g h$, es la presión manométrica.

Presión absoluta
=
Presión atmosférica
+
Presión manométrica

EL BARÓMETRO

El barómetro es un manómetro de tubo cerrado que se expone a la atmósfera para medir la presión atmosférica P_0. En el barómetro inventado por Torricelli (1608 - 1647), un tubo de vidrio se llena de mercurio y luego se invierte para colocarlo boca abajo dentro de una cubeta abierta. Al hacer esto, el nivel del mercurio desciende, dejando un espacio vacío ($p = 0$) en la parte superior del tubo.

Se observa que al nivel del mar, la presión atmosférica p_{atm}, puede equilibrar una columna de mercurio de 76 cm de altura. Es decir:

$$p_{atm} = p_0 = \rho g h$$

$$p_{atm} = (13,6\text{x}10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(9,8\text{x}10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0,76\text{m}) = 1,01\text{x}10^5\text{Pa}$$

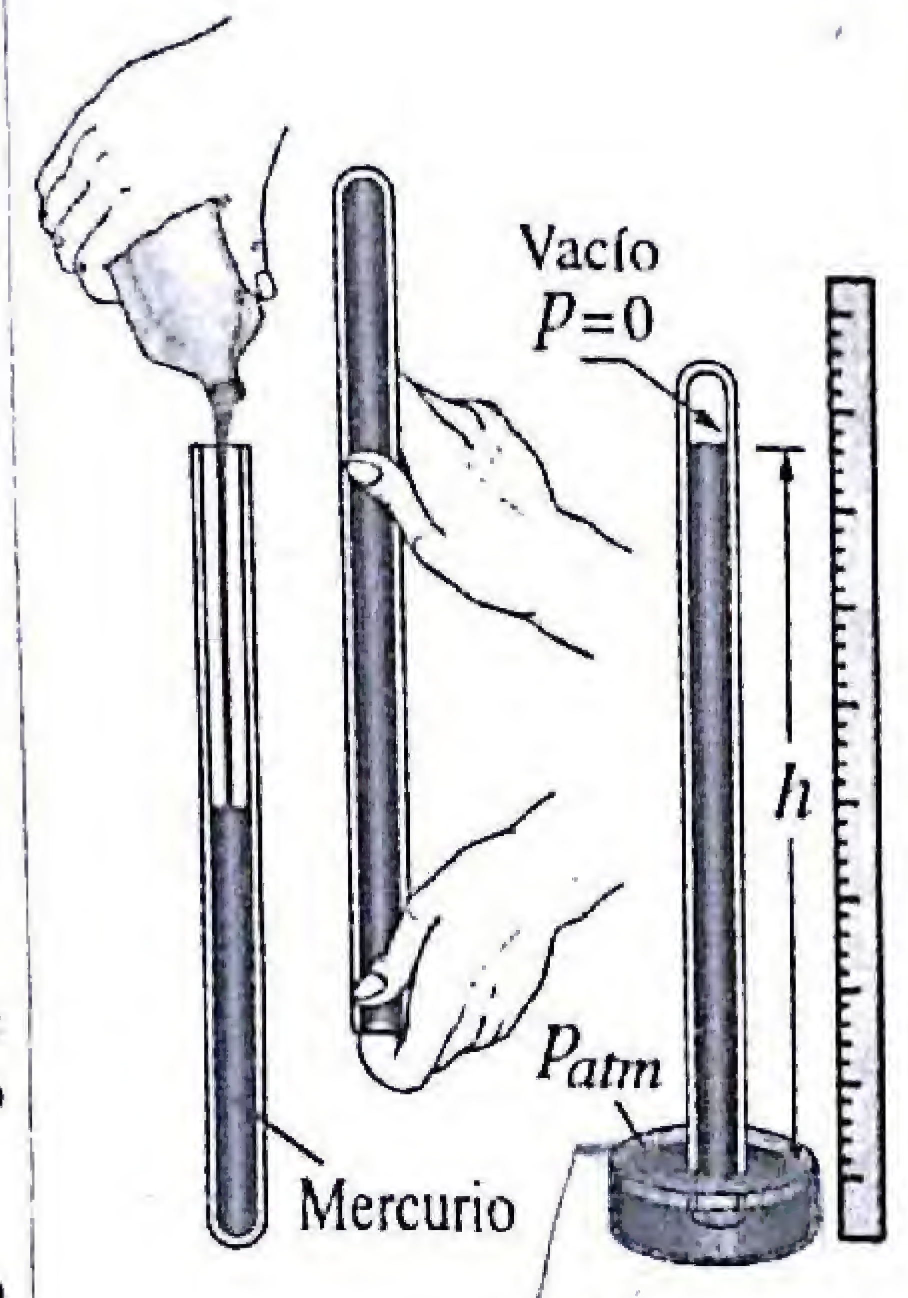
Observe que si en vez de mercurio, Torricelli hubiese empleado agua ($\rho = 1000$ kg/m^3), se necesitaría un tubo extremadamente alto (altura de la columna $h = 10.3$ m).

Se define una atmósfera de presión como el equivalente a una columna de mercurio que tiene 76 cm de altura.

Otra unidad de presión:

1 torr = 1 mm de Hg

1 Atmósfera = $1,01\text{x}10^5$ Pa = 760 mm de Hg = 760 torr

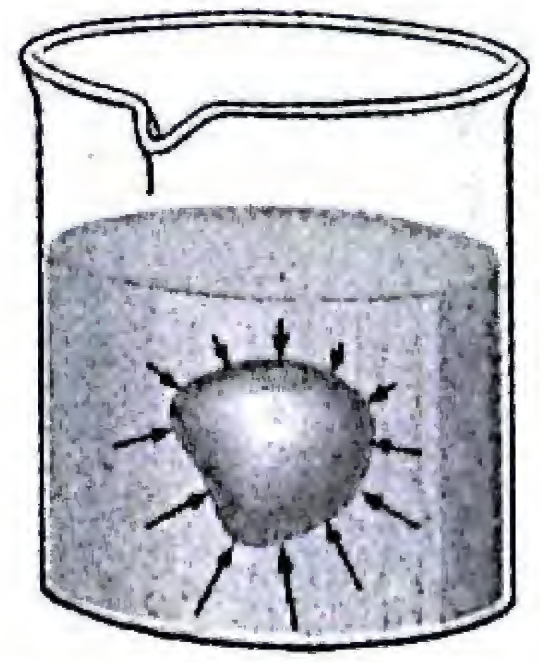


Barómetro de mercurio de Torricelli

FLOTABILIDAD

Cuando un objeto se coloca en un fluido, puede hundirse o puede flotar. Los objetos sumergidos en el fluido parecen pesar menos que cuando están afuera del mismo, ello es debido a la existencia de una fuerza de flotación o de empuje.

La fuerza de empuje es la resultante vectorial de las fuerzas ejercidas sobre los diversos elementos del cuerpo, debidas a la presión del fluido que lo rodea. Como la presión que ejerce el fluido aumenta con la profundidad, el empuje sobre el objeto siempre será ascendente.


Empuje sobre objeto sumergido

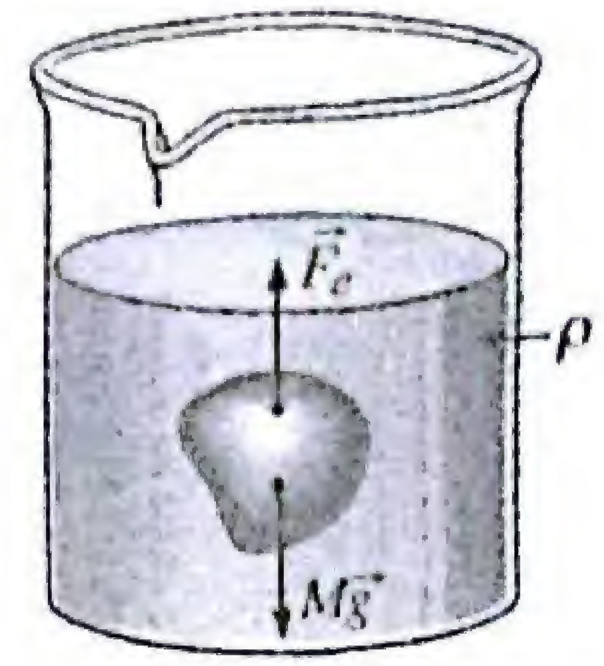
PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

La fuerza del fluido sobre un objeto sumergido en él depende de la densidad del fluido y del volumen del cuerpo, pero no de su composición y forma. Según el principio de Arquímedes:

La fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido en un fluido, es igual al peso del fluido desplazado por este objeto.

Fuerza de empuje = Peso del fluido

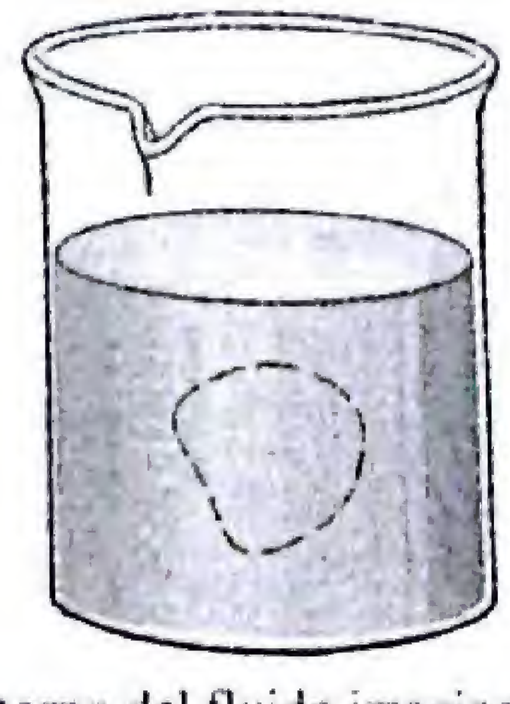
$$F_e = mg = \rho V g$$



La fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado

El principio de Arquímedes resulta evidente si imaginamos un cuerpo del (mismo) fluido, con igual forma y tamaño que el objeto original y que está colocado a la misma profundidad.

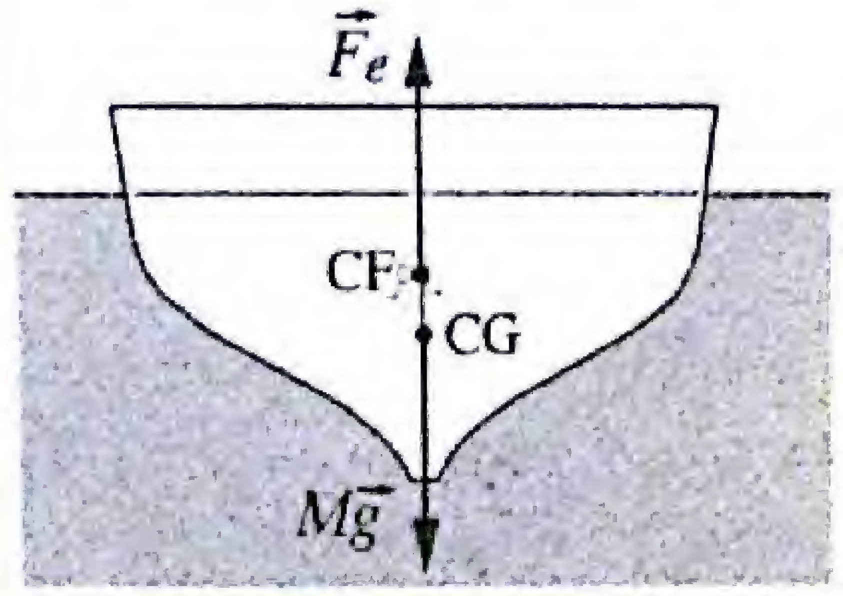
Dado que el fluido circundante tiene la misma configuración, la fuerza de empuje, F_e, sobre el fluido imaginario será la misma que aquella que actúa sobre el objeto original. Como el fluido está en reposo, la fuerza de empuje F_e es igual al peso del cuerpo Mg de fluido.

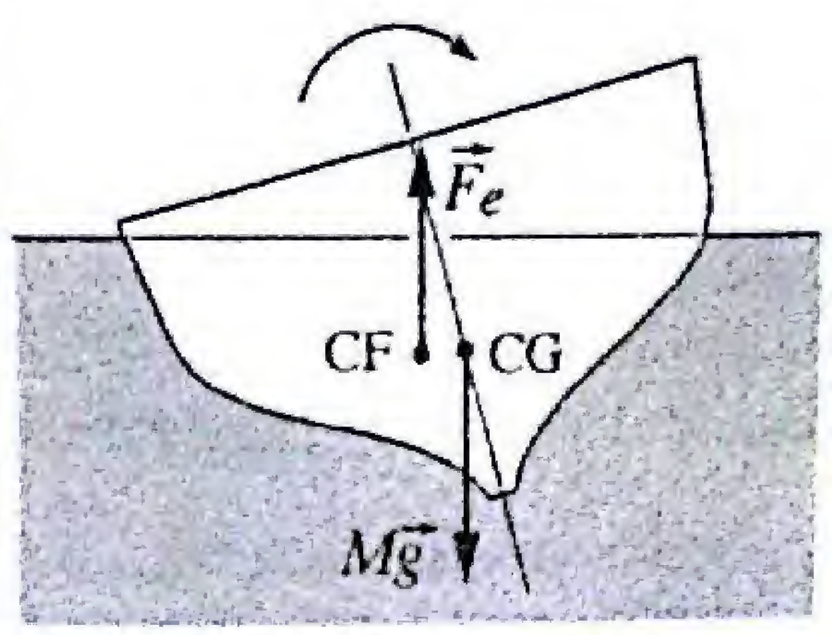

Contorno del fluido imaginario de igual forma y tamaño que el objeto

CENTRO DE FLOTACIÓN

El punto sobre el que actúa la fuerza de empuje se llama centro de flotación (CF) y está localizado en el centro de gravedad del volumen de fluido que ha sido desplazado por la porción del cuerpo sumergido.

En el diseño de un bote, las ubicaciones relativas del CF y el CG son críticas porque determinan su estabilidad contra el balanceo y el volteo. El peso $M\vec{g}$ actúa sobre el centro de gravedad del bote, mientras que la fuerza de empuje, $\vec{F_e}$, actúa sobre el CF determinado por el volumen de agua que desplaza su casco. En equilibrio, el centro de gravedad del bote y el centro de flotación han de estar en la misma vertical. Cuando el bote es inclinado a un lado, su CG no modifica su posición pero el CF se desplaza al variar de forma la parte introducida en el agua. Las dos fuerzas quedarían en líneas verticales diferentes y como resultado habrá un torque que tiende a regresar al bote a su posición de equilibrio.



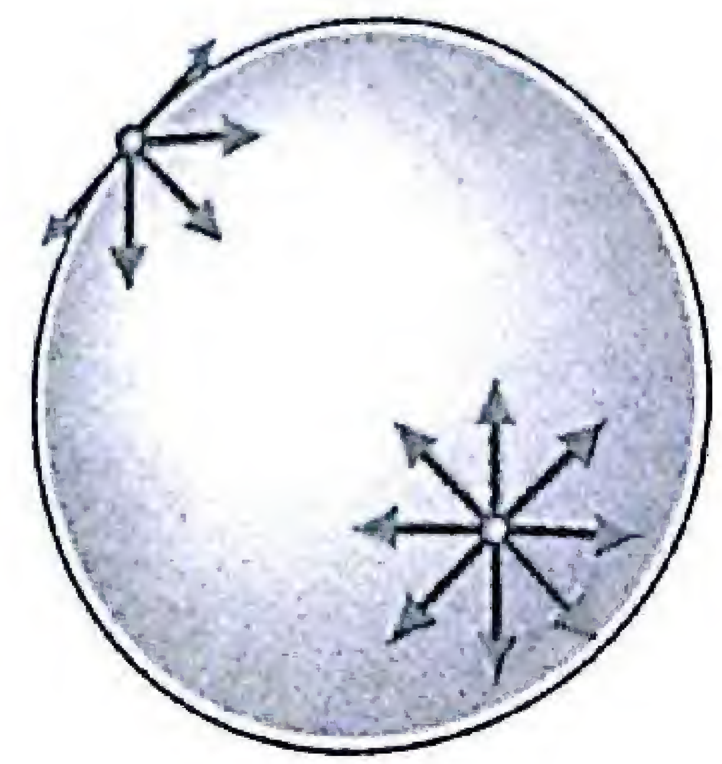


CF = Centro de flotación
CG = Centro de gravedad

TENSIÓN SUPERFICIAL

Entre las moléculas de un líquido se ejercen fuerzas atractivas. Una molécula que está en el interior del líquido se encuentra completamente rodeada de otras moléculas y la fuerza neta sobre ella es nula. No obstante, una molécula de la superficie experimenta una fuerza neta atractiva debida a las moléculas vecinas que están justo debajo de la superficie del líquido. Como resultado, el área superficial del líquido actúa como una membrana elástica que se resiste a que pueda ser estirada o rota, porque existe una *tensión superficial*.

El efecto neto de la tensión superficial es hacer que el área de la superficie del líquido sea la mas pequeña posible. Es por ello que las gotas de agua y las pompas de jabón tienden a adoptar formas esféricas, que es la superficie que presenta la menor área para un volumen dado.



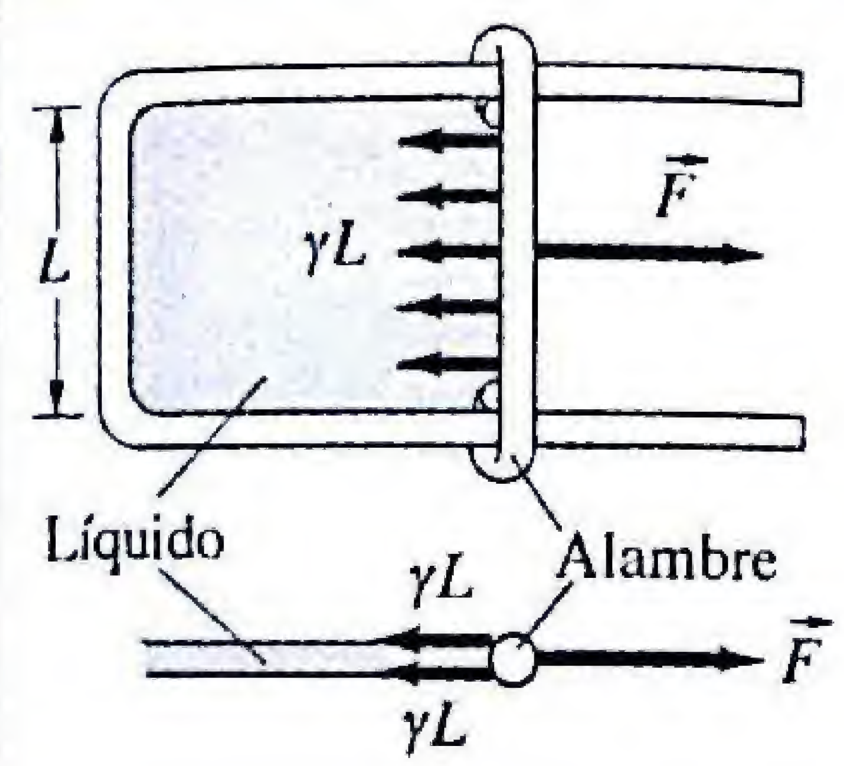
Fuerzas sobre molécula en la superficie e interior de un líquido

La tensión superficial γ en una película, se define como la fuerza por unidad de longitud que actúa a lo largo de una línea de longitud d.

$$\gamma = F/d \qquad \text{(N/m)}$$

Se puede medir la tensión superficial usando un alambre deslizante en forma de U que encierra una capa delgada de líquido. El alambre está en equilibrio bajo la fuerza superficial $2\gamma L$ hacia la izquierda y la fuerza de tracción F aplicada hacia la derecha. Por lo tanto:

$$\gamma = \frac{F}{2L}$$



Tensión superficial

$$\boxed{\gamma = \frac{F}{2L}}$$

La tensión superficial permite que algunos objetos mas densos que el agua puedan flotar sobre su superficie. Si se coloca cuidadosamente un clip metálico, previamente impregnado de aceite, la superficie del agua actúa como una membrana elástica bajo tensión. Ocurre una ligera depresión y las componentes verticales de las fuerzas moleculares equilibran el peso y así el clip puede flotar. Gracias a este efecto, algunos insectos se posan y pueden caminar sobre la superficie del agua.

La acción limpiadora de los jabones y los detergentes se debe al efecto de disminuir la tensión superficial del agua, permitiendo que ésta penetre con facilidad entre las fibras de las ropas.

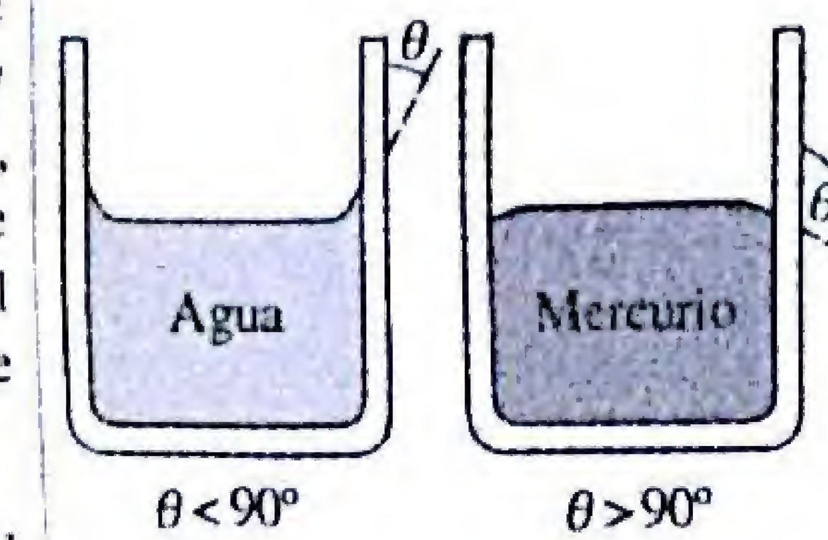
Clip metálico flotando en agua

COHESIÓN Y ADHESIÓN

Las fuerzas de atracción entre una molécula en un líquido y otras moléculas del *mismo* líquido son fuerzas de *cohesión*. La fuerza entre una molécula del líquido y moléculas de *otra* sustancia como la pared del recipiente, es una fuerza de adhesión. El ángulo θ de contacto que forma la superficie del recipiente y una línea tangente al líquido está determinado por las intensidades relativas de estas dos fuerzas.

$\theta < 90^\circ$: El agua moja el vidrio porque las moléculas del agua son atraídas con mas fuerza hacia las moléculas del vidrio que hacia otras moléculas de agua. Como resultado, la superficie libre del agua se curva hacia arriba.

$\theta > 90^\circ$: El mercurio no moja el vidrio porque las fuerzas adhesivas son menores que las cohesivas. La superficie libre del mercurio se curva hacia abajo.



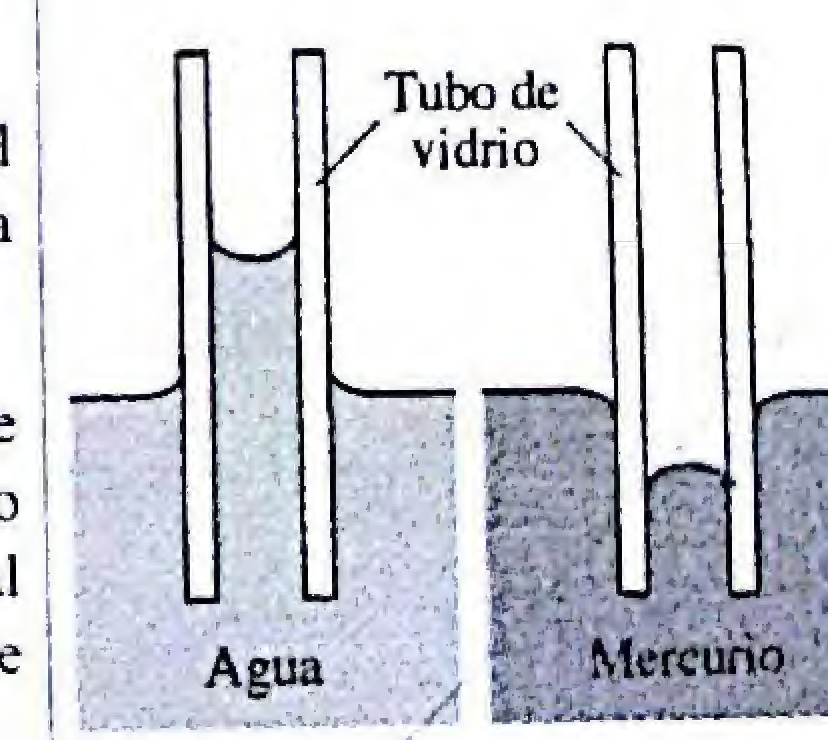
El agua si moja el vidrio
El mercurio no lo moja

ACCIÓN CAPILAR

La tensión superficial causa la elevación o depresión del líquido en un tubo estrecho. Este efecto se llama *capilaridad*.

En el caso del líquido que moja como el agua, la fuerza de tensión superficial actúa a lo largo de la línea de contacto con la pared del tubo y tira el líquido hacia arriba, el cual sube hasta llegar a una altura en que equilibra el peso de la columna del líquido.

En el caso del líquido que no moja como el mercurio, la tensión superficial tira del líquido hacia abajo y la superficie se deprime.

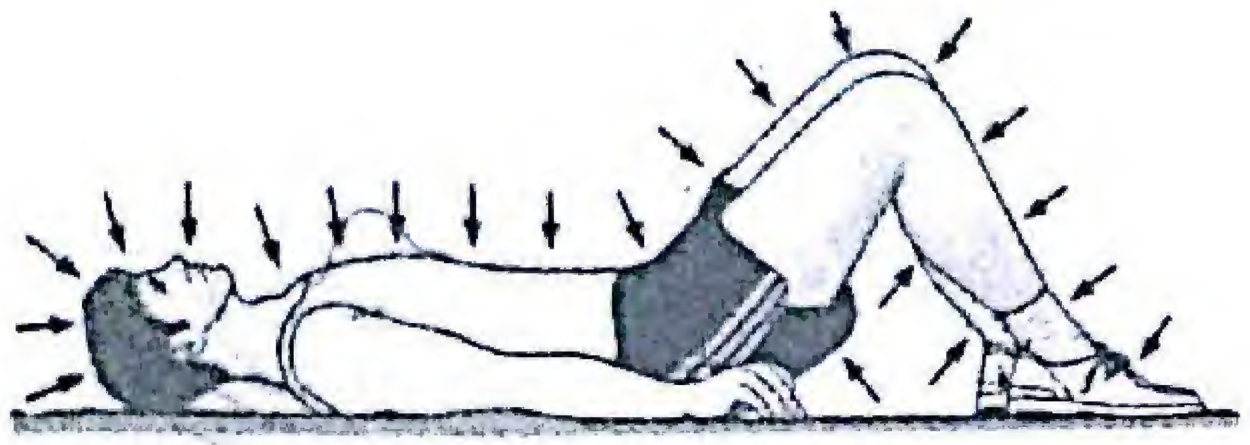


Una columna de agua asciende
Una columna de mercurio desciende

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-1.01. *Fuerza debida a la presión atmosférica*

a) Determine la fuerza aproximada sobre el pecho de un estudiante considerando como si fuese una superficie rectangular de lados 30 cm por 40 cm. Suponga la presión atmosférica al nivel del mar, $p_{atm} = 1{,}01\text{x}10^5$ Pa.



b) Determine la fuerza sobre el pecho del estudiante si éste se sumerge en el mar a 10 m de profundidad. Suponga que la densidad del agua salada es 1030 kg/m^3.

c) ¿Por qué su cuerpo no es aplastado por esta enorme fuerza?

Solución. a) La fuerza del aire atmosférico sobre nuestro cuerpo por todos lados tiene distintas direcciones ya que tiende a oprimir cada región de la piel en dirección perpendicular a ésta. Si consideramos la proyección horizontal del área del pecho del estudiante como un rectángulo, la fuerza ejercida es:

$$F = p_{atm}A = (1{,}01\text{x}10^5\text{Pa})(0{,}3\text{mx}0{,}4\text{m}) = 1{,}21\text{x}10^4\text{N}$$

¡Esta es una fuerza equivalente a tener colocado encima del pecho el peso de un automóvil de 1,23 toneladas!

b) En el mar a la profundidad h, la presión absoluta es:

$$p = p_{atm} + \rho gh = 1{,}01\text{x}10^5\text{Pa} + 1{,}03\text{x}10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\text{x}9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{x}10\text{m}$$

$$p = 1{,}01\text{x}10^5\text{Pa} + 1{,}01\text{x}10^5\text{Pa} = 2{,}02\text{x}10^5\text{Pa} = 2\text{ atm}$$

¡Observe que la presión se incrementa en 1 atm por cada 10 m de profundidad! La correspondiente fuerza sobre el pecho del estudiante se duplica:

$$F = (2{,}02\text{x}10^5\text{Pa})(0{,}3\text{mx}0{,}4\text{m}) = 2{,}42\text{x}10^4\text{N}$$

c) No nos percatamos del enorme peso del aire atmosférico porque las células vivientes de nuestro organismo mantienen una presión interna a un valor igual y opuesto a la presión externa.

Respuesta:

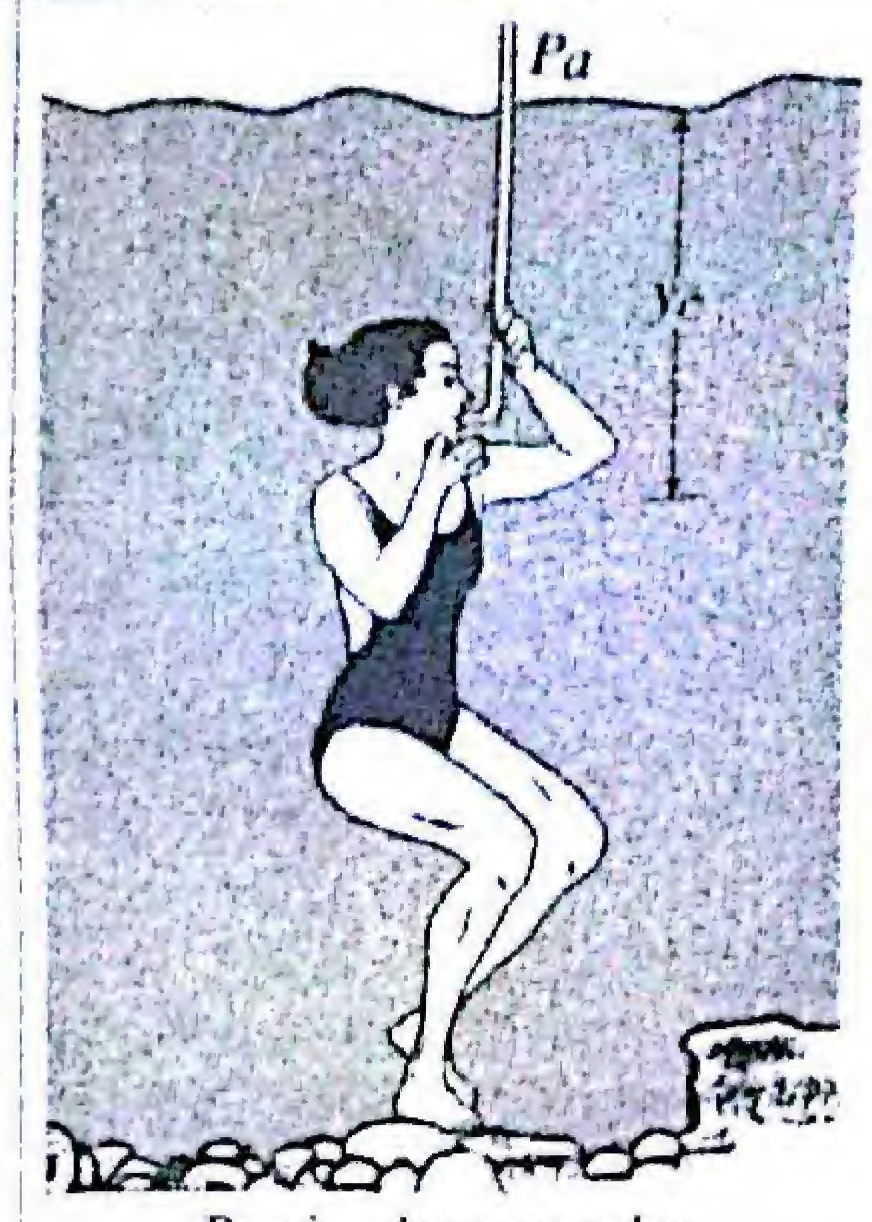
a) $F = 1{,}21\text{x}10^4\text{N}$
b) $F = 2{,}42\text{x}10^4\text{N}$

PR-1.02. *Es muy peligroso respirar por un snorkel*

a) Mucha gente cree que se puede estar bajo el agua a cualquier profundidad, respirando por un tubo (snorkel). ¿Por qué existe el riesgo de que sus pulmones colapsen?

b) Suponga que los pulmones de una persona pueden funcionar con un diferencial de presión de hasta 1/20 de una atmósfera. ¿Cuál sería la máxima profundidad dentro del agua en que podría respirar mediante el tubo?

c) Un buceador provisto de una bombona de aire comprimido puede sumergirse a mayor profundidad, ya que la presión del aire en los pulmones puede acoplarse a la presión del agua circundante. Sin embargo, se sabe que presiones de aire superiores a 10 atm ($1{,}01\text{x}10^6$ Pa) resultan de alto riesgo. ¿Por qué?. ¿A qué profundidad máxima se podría llegar sin correr este riesgo?



Respirando por un tubo

Solución. a) Cuando el tubo snorkel está conectado a la boca, el aire de los pulmones estaría a la presión atmosférica y como la presión que ejerce el agua sobre la persona aumenta con la profundidad, el pecho quedaría oprimido impidiendo la libre respiración.

b) Suponiendo que la persona está en agua de mar ($\rho_A = 1{,}03\text{x}10^3\text{kg/m}^3$), el diferencial de presión interna-externa a los pulmones es: $\Delta P = \rho g y_c$

Por lo tanto, la profundidad crítica sería:

$y_c \rho g = \Delta P$

$$y_c = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{(1{,}01\text{x}10^5\text{Pa})/20}{(1{,}03\text{x}10^3\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)} = 0{,}50\text{m}$$

b) Lo que dificulta el buceo con aire comprimido a estas profundidades es el nivel de nitrógeno, que a diferencia del oxígeno que es metabolizado y transformado en nutrientes, produce un efecto anestésico o de narcosis, conocido como la *borrachera de las profundidades*. Si la presión máxima tolerada de aire es $P_m = 10$ atm ($1{,}01\text{x}10^6$ Pa), la correspondiente profundidad máxima sería:


Buceo usando una bombona con aire comprimido

$$P_m = P_a + \rho g y_m \quad \Rightarrow \quad y_m = \frac{P_m - P_a}{\rho g}$$

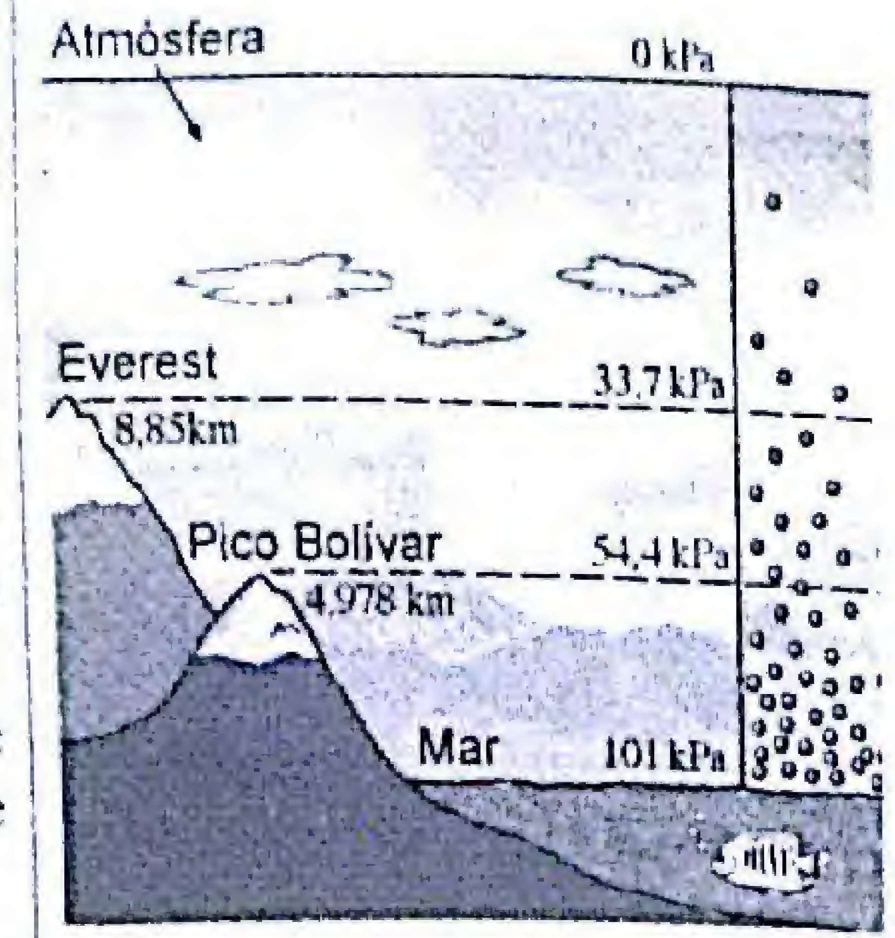
$$y_m = \frac{(10{,}1 - 1{,}01)\text{x}10^5\text{Pa}}{(1{,}03\text{x}10^3\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)} = 90{,}1\text{m}$$

Respuesta:

a) $y_c = 0{,}50\text{m}$
b) $y_m = 90{,}1\text{m}$

PR-1.03. *Vivimos en el fondo de un océano de aire*

Torricelli, un alumno de Galileo, fue el primero en percatarse que vivimos en el fondo de un inmenso océano de aire. Nuestra atmósfera ejerce una presión media al nivel del mar $P_0 = 101$ kPa, y este valor disminuye gradualmente con la altitud. La presión también varía con el clima, pero en un modelo muy sencillo de la atmósfera podríamos suponer que la temperatura del aire es constante y que su densidad es proporcional a la presión.
a) Determine la variación de la presión de la atmósfera de la Tierra con la altura sobre el nivel del mar. Suponga que se puede despreciar la variación de g con la altitud
b) Según este modelo, ¿cuál sería el valor de la presión atmosférica a la altura del pico Bolívar (4778 m)?



La presión atmosférica de la Tierra

Solución. a) Si P_0 y ρ_0 son los valores de la presión y la densidad al nivel del mar respectivamente, y puesto que ρ es proporcional a P, se tiene:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$$

En un elemento de fluido en equilibrio estático la variación de P con la altura es:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dP}{dy} = -\frac{\rho_0}{P_0} P g$$

Integrando desde la presión P_0 al nivel del mar ($y = 0$) hasta la presión P a una altura y, se tiene:

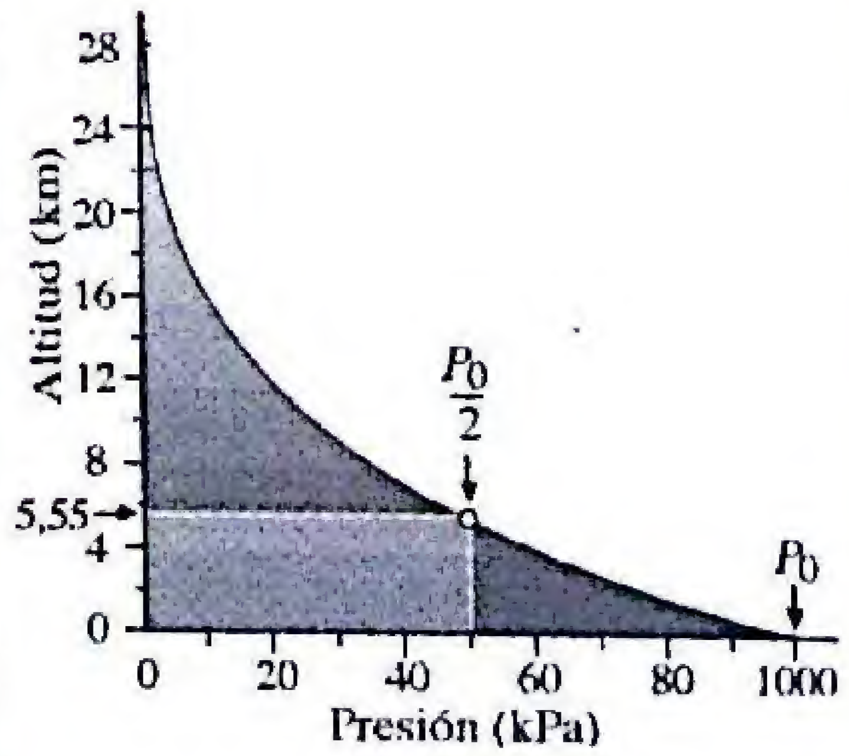
$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g dy \qquad \Rightarrow \qquad \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^y dy$$

$$ln P\Big|_{P_0}^{P} = -\frac{g\rho_0}{P_0} y\Big|_0^y \qquad \Rightarrow \qquad P(y) = P_0 e^{-\frac{g\rho_0}{P_0} y}$$

Es decir, la presión atmosférica P disminuye con la altura según una relación exponencial.

b) El valor numérico de la constante en el exponente es:

$$\frac{g\rho_0}{P_0} = \frac{(9{,}8 m/s^2)(1{,}29 kg/m^3)}{1{,}013x10^5 N/m^2} = 1{,}25x10^{-4} m^{-1}$$



La presión atmosférica en función de la altura sobre el nivel del mar

A la altura del pico Bolívar, la presión atmosférica es:

$$P = P_0 e^{-\frac{g\rho_0}{P_0} y} = 1{,}013x10^5 N/m^2 e^{-125x10^{-4}(0{,}4978x10^4)}$$

$$P = 5{,}437x10^4 \text{ Pa}$$

¡Esta presión resulta casi la mitad que al nivel del mar!

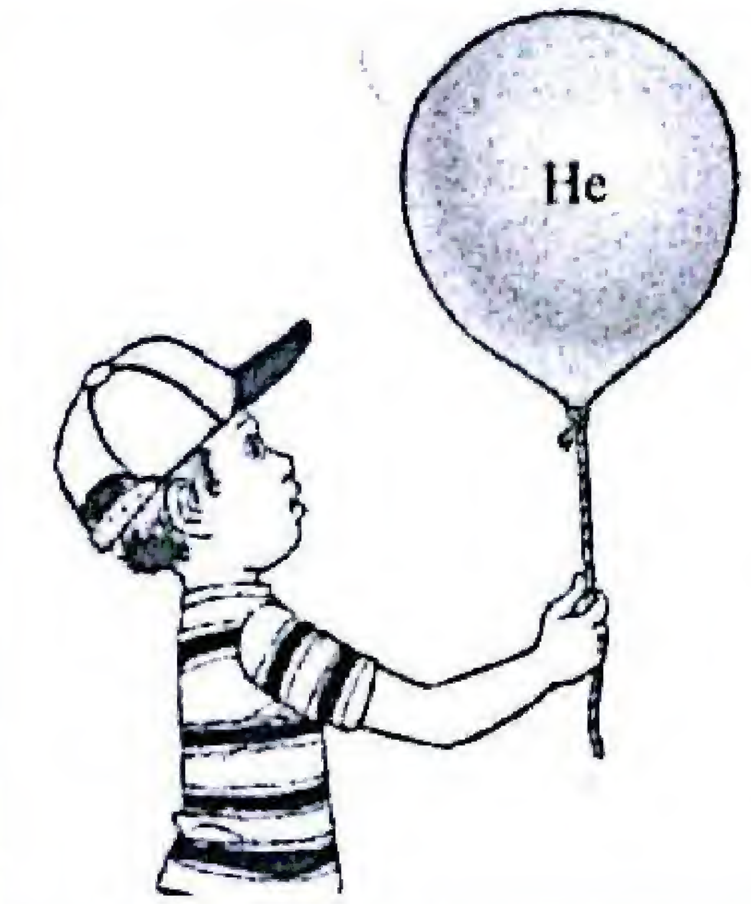
Respuesta:

a) $P(y) = P_0 e^{-\frac{g\rho_0}{P_0} y}$
b) $P = 5{,}437x10^4$ Pa

PR-1.04. *Mas ligero que el aire*

Un niño sostiene un globo atado a una cuerda ligera. La masa del globo cuando está desinflado es $m = 30$ g y su volumen cuando está inflado con helio es $V = 0{,}70$ m^3.
a) Determine la tensión de la cuerda.
b) Si el niño tiene una masa de 30 kg, ¿cuántos globos se necesitarían para levantarse a sí mismo del piso?

Densidad del aire: $\rho_A = 1{,}25$ kg/m^3
Densidad del helio: $\rho_{He} = 0{,}18$ kg/m^3

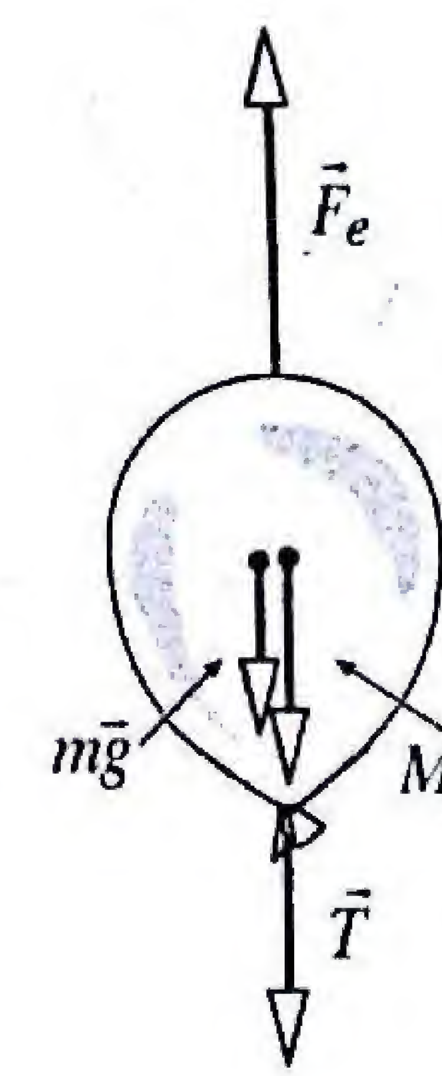


Solución. a) En el diagrama de cuerpo libre se muestran las fuerzas aplicadas al globo: el peso de la goma $m\vec{g}$, el peso del gas helio, $M_{He}\vec{g}$, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$ y la fuerza de empuje, $\vec{F}_e$. Según el Principio de Arquímedes, la fuerza de empuje debe ser igual al peso del aire desplazado:

$$F_e = \rho_A V g$$

Siendo ρ_A la densidad de aire y V el volumen del globo. La condición de equilibrio estático es:

$$\sum F_y = F_e - T - M_{He}g - mg = 0$$



Siendo $M_{He} = \rho_{He}V$ la masa del helio. Despejando, se obtiene la tensión de la cuerda:

$$T = F_e - M_{He}g - mg = [(\rho_A - \rho_{He})V - m] g$$

$$T = [(1{,}25 kg/m^3 - 0{,}18 kg/m^3)0{,}70 m^3 - 0{,}03 kg](9{,}8 m/s^2)$$

$$T = 7{,}05 \text{ N}$$

b) Si el niño tiene una masa de 30 kg, para que pueda ser elevado desde el suelo, la tensión en la cuerda debe superar su peso: $Mg = (30\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 294$ N. Por lo tanto, se requiere un número de globos:

$$n = (294\ \text{N})/(7{,}05\ \text{N}) = 42$$

Respuesta:

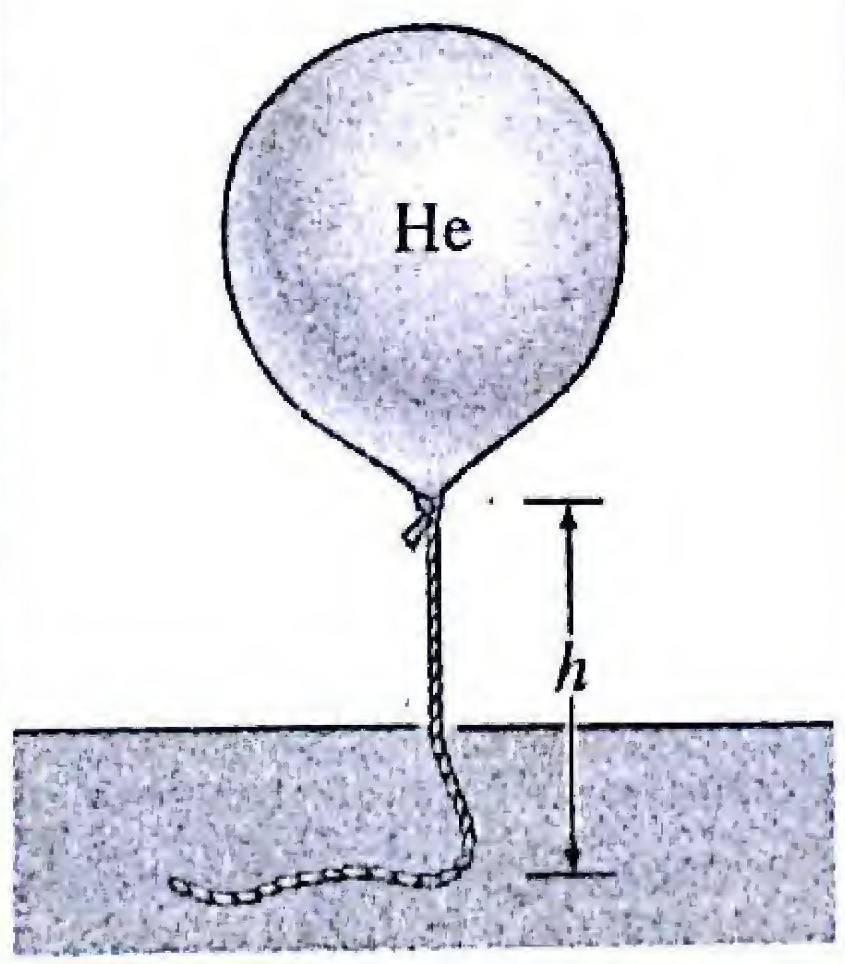
a) $T = 7{,}05$ N
b) $n = 42$ globos

PR-1.05. *¿Hasta qué altura se elevará ese globo?*

Un globo esférico de radio $R = 0{,}4$ m, está lleno de gas helio y tiene una masa total $M_{He} = 0{,}30$ kg. El globo está amarrado a una cuerda de longitud $L = 2$ m y masa $M_c = 0{,}1$ kg. Cuando se coloca en el piso y se suelta, el globo se eleva hasta cierta altura, y en equilibrio flota levantando un segmento de la cuerda de longitud h. Determine este valor de h.

Solución: Cuando el globo alcanza el equilibrio, la fuerza neta es cero, por lo tanto:

$$\sum F_y = F_e - M_{He}g - m_c g = 0 \qquad (1)$$



Siendo la fuerza de empuje:

$$F_e = \rho_A V g$$

La masa suspendida de la cuerda es:

$$m_c = \frac{h}{L} M_c$$

Reemplazando F_e y m_c en la expresión (1), escribimos:

$$\rho_A V - M_{He} = \frac{h}{L} M_c$$

Despejando obtenemos la altura:

$$h = \left(\frac{\rho_A V - M_{He}}{M_c}\right) L$$

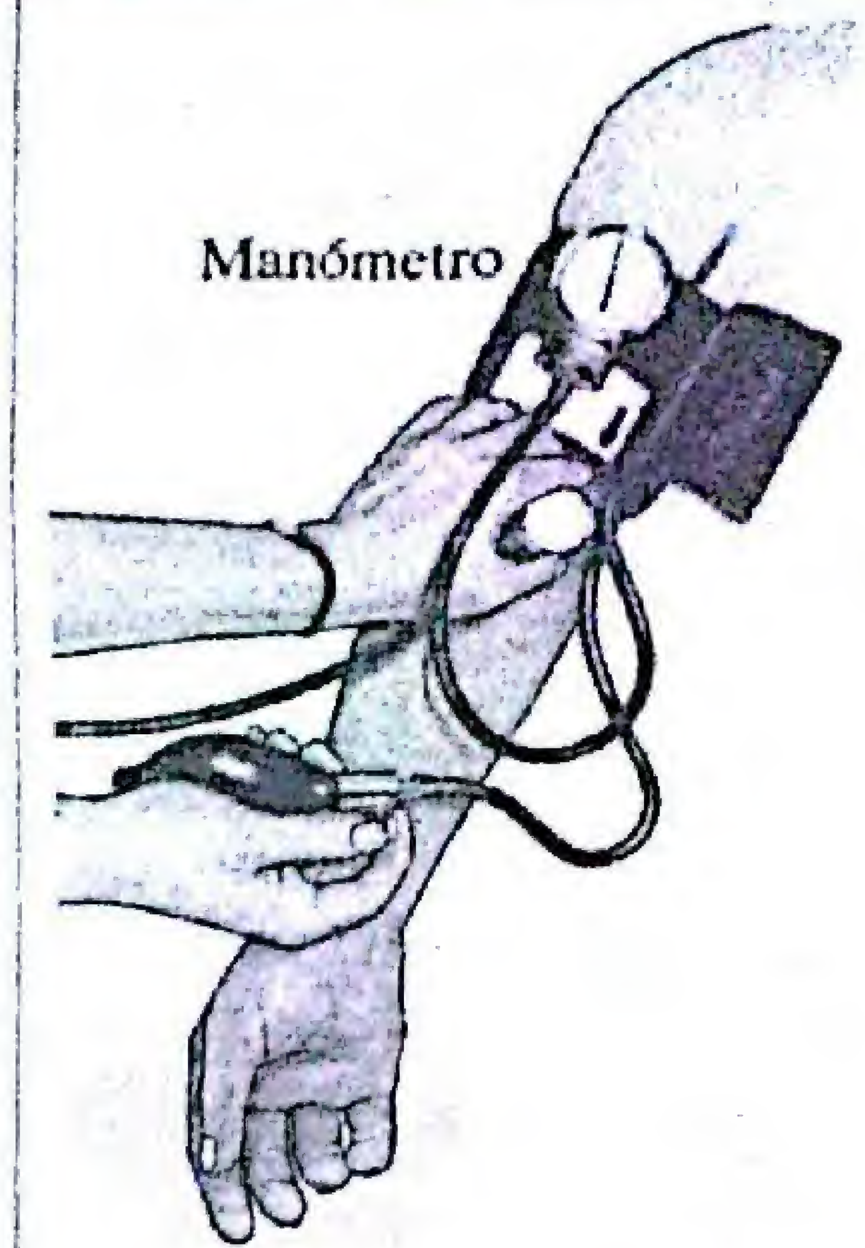
$$h = \frac{(1{,}3\text{kg/m}^3)(4\pi(0{,}4\text{m})^3/3) - 0{,}3\text{kg}}{0{,}1\text{kg}}(2\text{m}) = 0{,}97\text{m}$$

Respuesta:

$h = 0{,}97m$

PR-1.06. *¿Cómo está tu tensión arterial?*

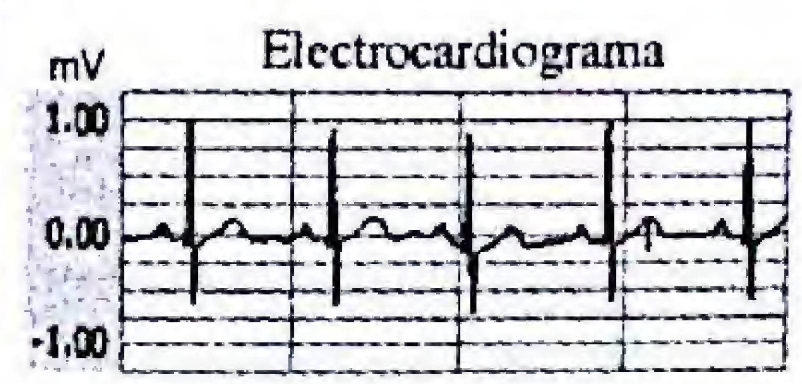
La tensión arterial es la presión que ejerce la sangre contra las paredes de las arterias. Esta presión es la requerida para que pueda circular la sangre por los vasos sanguíneos y aporte el oxígeno y los nutrientes a todos los órganos del cuerpo para su funcionamiento.

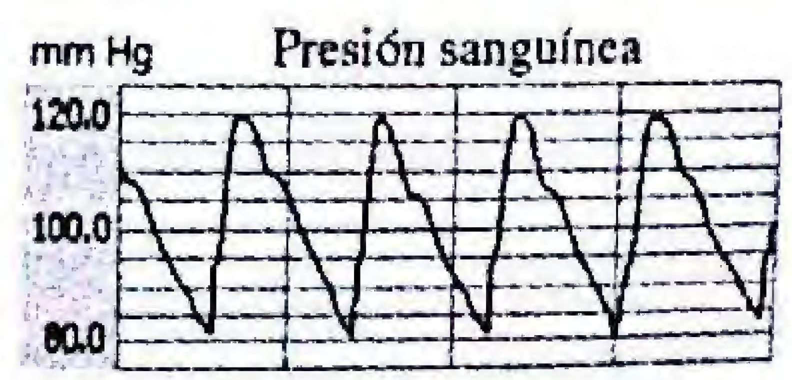


a) ¿Por qué, usualmente la presión se mide en un brazo?
b) Si se mide la presión arterial de un paciente y resulta 120 / 80, ¿Cuál es el significado de este resultado?
c) Suponga que al mismo paciente estando de pie, se le mide la presión en una arteria en la pierna, a un metro por debajo del corazón, ¿cómo afectaría ésto la lectura anterior?

Solución: a) El lugar habitual de la medida de la presión de la sangre es el brazo, a la altura de la aorta mas próxima al corazón. La presión arterial se mide normalmente en milímetros de mercurio (mm Hg) sobre la presión atmosférica.

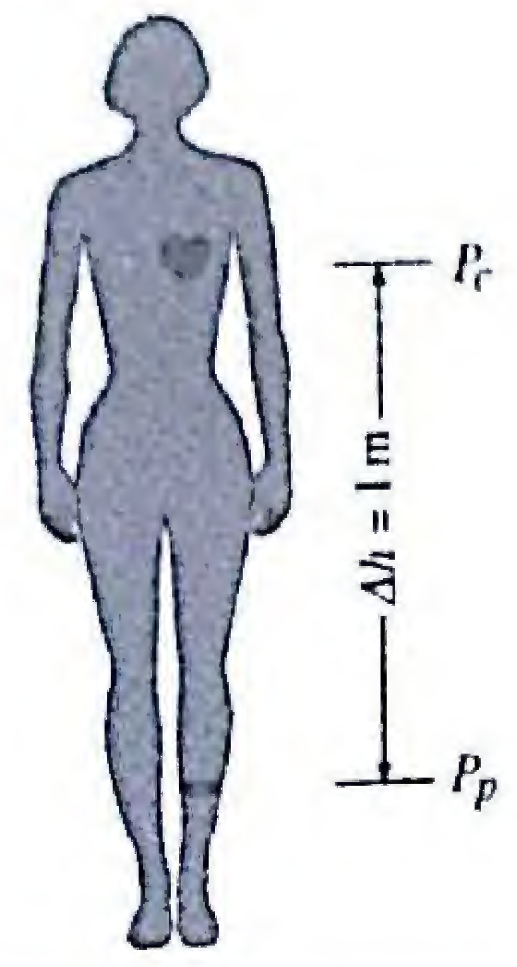
b) La sangre no fluye de forma continua, lo hace a borbotones y en oleadas que corresponden a cada latido del corazón. Es por ello que la medida de la presión arterial tiene dos componentes: 1) Un valor máximo llamado *presión sistólica* que corresponde a la fase de bombeo, cuando el corazón late. 2) Un valor mínimo llamado *presión diastólica* cuando el corazón está en reposo o de relleno, entre latidos cardiacos. Para un paciente, un valor de la presión arterial de 120/80 mm de Hg se considera típica o normal. Valores por encima de 130/90 mm son indicativos de Hipertensión o presión arterial alta y por debajo de 100/60 son indicativos de hipotensión o presión arterial baja.





b) El método mas común para medir la presión sanguínea es colocar una funda inflable de goma alrededor del brazo y llenarla de aire, hasta que el flujo de sangre quede interrumpido temporalmente (indicado por la desaparición del pulso en la arteria del antebrazo). Lentamente se libera la presión de la funda y cuando ésta es ligeramente inferior a la presión sanguínea máxima, la sangre empieza a fluir a través de la arteria con cada latido del corazón.

Estos latidos claros se oyen en el estetoscopio y el valor se toma como la máxima presión arterial o *presión sistólica*. A medida que se libera mas aire de la funda la sangre comienza a fluir con mas uniformidad hasta que los latidos dejan de oírse nítidos. En este momento se registra la *presión diastólica*.



Densidad de la sangre:
$\rho_s = 1{,}05\text{x}10^3$ kg/m^3

c) La presión a la altura de una pierna será mayor que en el corazón por una cantidad:

$$\Delta P = P_p - P_c = \rho_s g \Delta h$$

$$\Delta P = (1{,}05x10^3 Kg/m^3)(9{,}8m/s^2)(1{,}0m) = 1{,}03x10^4\ Pa$$

Si tenemos en cuenta que 1 mm de mercurio equivale a:

$$\Delta p = (13{,}6x10^3 kg/m^3)(9{,}8m/s^2)(10^{-3}m) = 133Pa$$

La diferencia de presión con respecto a las lecturas que se habían tomado a nivel del brazo es de 77,3 mm de Hg.

Respuesta:

$$\boxed{\Delta P = 1{,}03x10^4\ Pa = 77{,}3\text{mm Hg}}$$

PR-1.07. *El día que Arquímedes exclamó: ¡ Eureka!*

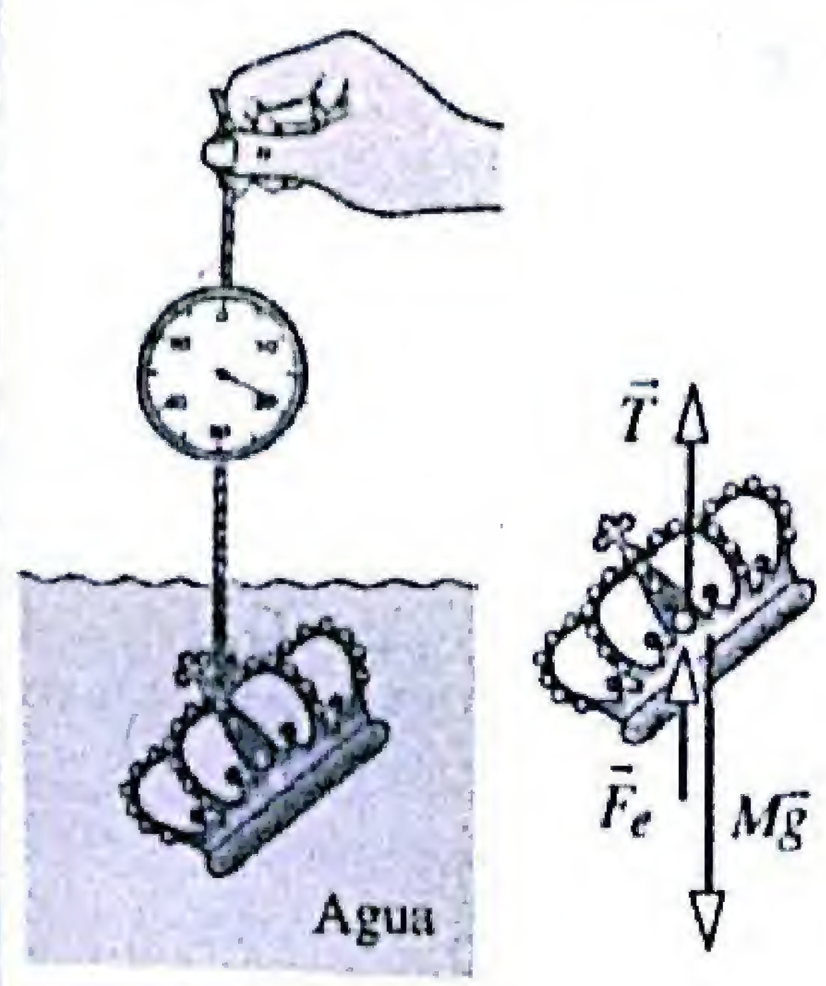
Cuenta la historia que Arquímedes (287-212 AC) descubrió su famoso principio, mientras se encontraba tomando el baño en una tina de agua y meditando cómo podía atender la solicitud del rey Hieron de determinar si su corona había sido hecha de oro puro, sin dañarla. Al sumergirse en el agua notó una pérdida parcial del peso de sus piernas y brazos, e inmediatamente salió corriendo desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡Eureka! (que significa en griego, *lo he encontrado*). Suponga que Arquímedes encontró que en el aire la corona pesaba 21 N y cuando era sumergida en agua pesaba 19,5 N. ¿Fue engañado el Rey por el orfebre?

Solución: Cuando la corona está sumergida en el agua, las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso $M\vec{g}$, la tensión $\vec{T}$ ejercida por la cuerda (que es la lectura del dinamómetro) y el empuje $\vec{F}_e$ ejercido por el agua. En equilibrio:

$$\sum F_y = F_e + T - Mg = 0$$

De acuerdo al *principio de Arquímedes*, la fuerza ascensional de empuje es igual al peso del agua que ha sido desplazada por la corona: $F_e = \rho_A V g$, donde V es el volumen de la corona y ρ_A la densidad del agua. Sustituyendo en la ecuación de equilibrio y despejando V, se tiene:

$$\rho_A V g = Mg - T \quad \Rightarrow \quad V_c = \frac{Mg - T}{\rho_A g}$$



Por lo tanto, la densidad de la corona es:

$$\rho_c = \frac{M_c}{V_c} = M\left(\frac{\rho_A g}{Mg - T}\right) = \left(\frac{Mg}{Mg - T}\right)\rho_A$$

$$\rho = \frac{21N}{(21 - 19{,}5)N}1000\frac{kg}{m^3} = 14000\frac{kg}{m^3}$$

El valor de esta densidad es inferior al correspondiente al oro puro ($\rho_O = 1{,}93x10^4 kg/m^3$).

***Respuesta*:**

$\rho = 1{,}4x10^4 kg/m^3$ (corona)
$\rho_O = 1{,}93x10^4 kg/m^3$ (oro)
La corona no es de oro puro

PR-1.08. *¿Qué cantidad de oro tiene la corona del rey?*

Arquímedes reportó al rey Hieron que el orfebre lo había estafado con una corona que no era de oro puro, sino que probablemente, era de una aleación de oro y plata. Tomando el resultado encontrado en el problema anterior para la densidad de la corona: $\rho =$ 1,4x10^4 kg/m^3, determine qué porcentaje de oro tenía la corona.

Solución. La masa total M, de la corona es la suma de la masa de oro mas la masa de la plata:

Oro: $\rho_O = 19{,}3x10^3 kg/m^3$
Plata: $\rho_P = 10{,}5x10^3 kg/m^3$

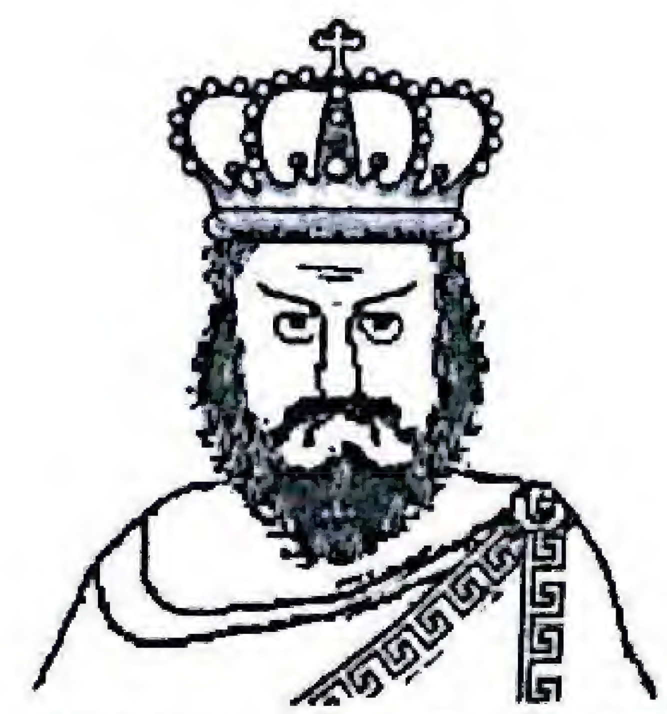
$$M = \rho V = \rho_O V_O + \rho_P V_P\ ,$$

Sustituyendo el volumen ocupado por la plata en la expresión anterior: $V_P = V - V_O$, hallamos el volumen ocupado por el oro:

$$V_O = \left(\frac{\rho - \rho_P}{\rho_O - \rho_P}\right)V$$

La masa del oro es:

$$m_O = \rho_O V_O = \left(\frac{\rho - \rho_P}{\rho_O - \rho_P}\right)\rho_O V$$



¡Esta corona no es de oro puro!

Sustituyendo el volumen total: $V = M / \rho$, encontramos la fracción de oro:

$$x = \frac{m_O}{M} = \left(\frac{\rho - \rho_P}{\rho_O - \rho_P}\right)\frac{\rho_O}{\rho}$$

$$x = \left(\frac{14x10^3 - 10{,}5x10^3}{19{,}3x10^3 - 10{,}5x10^3}\right)\frac{19{,}3x10^3}{14x10^3} = 54{,}8\ \%$$

Respuesta:

Composición de la corona: 54,8% Oro / 45,2% Plata

PR-1.09. *Soltando una pelota dentro del agua*

Una pelota de densidad $\rho = 600\ \text{kg/m}^3$ se sumerge en agua a una profundidad $h = 52$ cm y luego se suelta:
a) ¿Cuál será su aceleración de subida en el agua?
b) ¿En cuánto tiempo alcanzará el nivel de la superficie?
c) ¿Qué altura máxima alcanzará?

Se ignora la fricción o cualquier otro efecto disipativo.

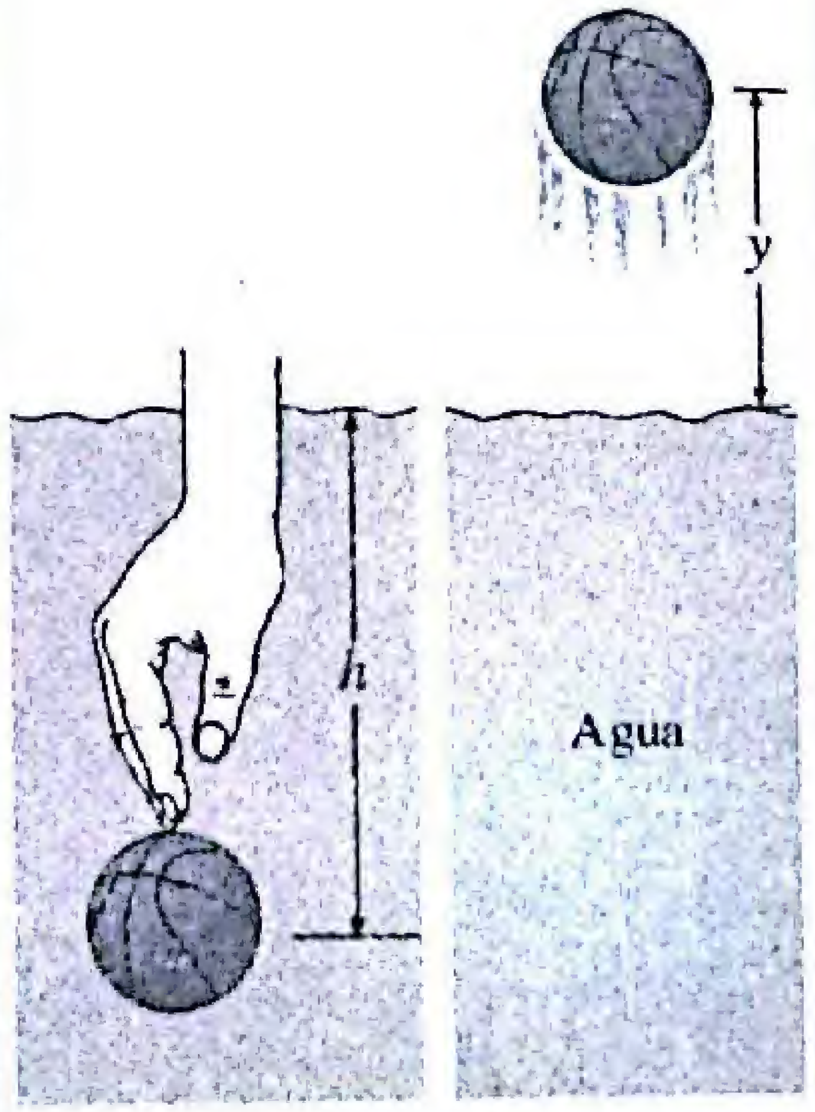
Solución: a) La fuerza neta hacia arriba es igual a la fuerza de empuje menos el peso de la pelota:

$$F = F_e - Mg = \rho_A Vg - \rho Vg$$

Siendo V el volumen de la pelota y ρ_A la densidad del agua. La aceleración de la pelota será:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{\rho_A Vg - \rho Vg}{\rho V} = \left(\frac{\rho_A}{\rho} - 1\right)g$$

$$a = \left(\frac{1000\text{kg/m}^3}{600\text{kg/m}^3} - 1\right)(9{,}80\text{m/s}^2) = 6{,}53\text{m/s}^2$$



b) Por ser éste un movimiento uniformemente acelerado, el tiempo que emplea en alcanzar la superficie viene dado por:

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(0{,}52\text{m})}{6{,}53\text{m/s}^2}} = 0{,}4\,s$$

b) La velocidad que alcanza el llegar a la superficie del agua está dada por $v^2 = 2ah$ y una vez en el aire, la pelota alcanzará una altura máxima:

$$y_m = \frac{v^2}{2g} = \frac{2ah}{2g} = \frac{a}{g}h = \left(\frac{\rho_A}{\rho} - 1\right)h$$

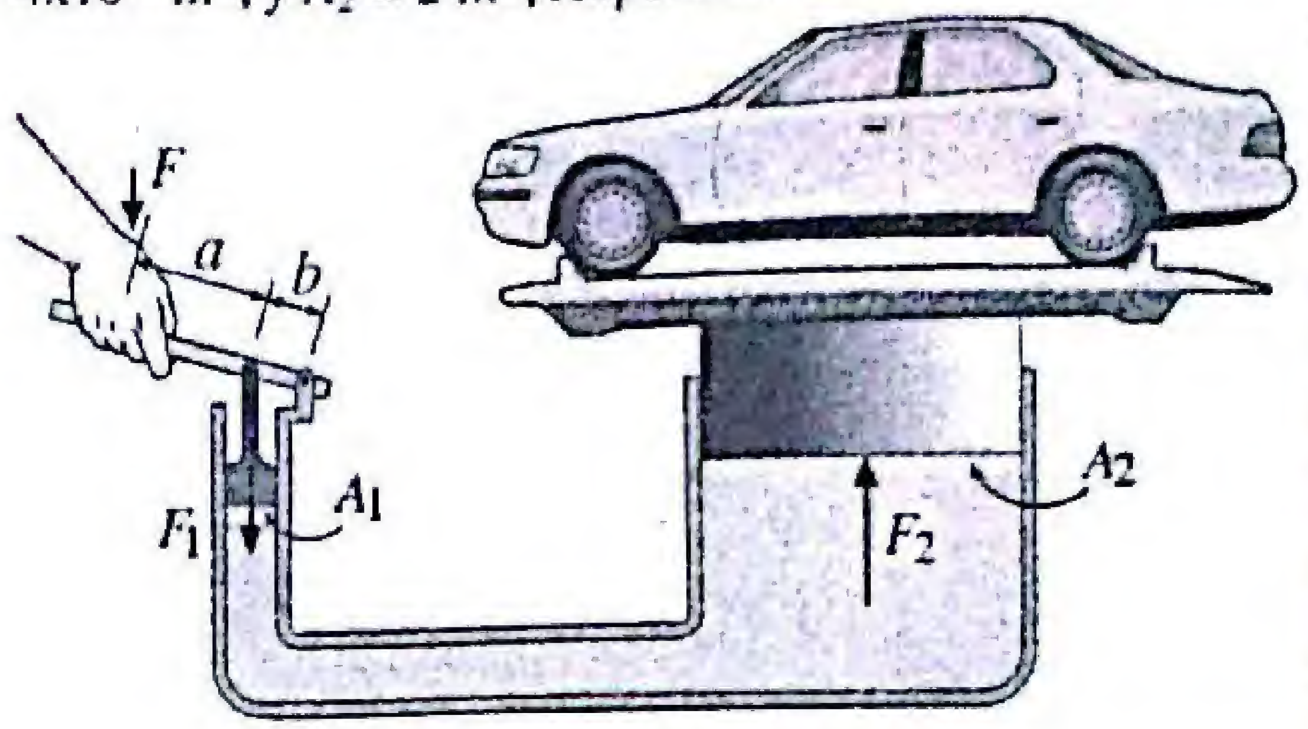
$$y_m = \left(\frac{1000\text{kg/m}^3}{600\text{kg/m}^3} - 1\right)(0{,}52\text{m}) = 0{,}35\text{m}$$

Respuesta:

a) $a = 6{,}53m/s^2$
b) $t = 0.4$ s
c) $y_m = 0{,}35m$

PR-1.10. *Se puede levantar un automóvil con un dedo*

En un gato o elevador hidráulico manual, un fluido usualmente aceite, llena las cámaras de dos cilindros conectados. La aplicación de una pequeña fuerza sobre un pistón pequeño, provoca una fuerza mayor sobre un pistón mas grande. Las áreas de los pistones son: $A_1 = 4x10^{-2}\ \text{m}^2$, y $A_2 = 2\ \text{m}^2$, respectivamente.



a) Determine la fuerza F_1 que es necesario aplicar al pistón pequeño para sostener un automóvil de masa M = 1531kg (Peso: 15 000 N).

b) Si el pistón pequeño se maneja con el mecanismo de palanca mostrado, siendo a = 30 cm y b = 10 cm, qué fuerza debe ejercer una persona en el extremo para levantar el automóvil.

c) ¿Habrá ganancia de energía en el elevador hidráulico?

Solución: Si se desprecia la fricción al aplicar una pequeña fuerza F_1 al pistón pequeño, entonces la presión del fluido en este pistón es incrementada en: $\Delta p = F_1/A_1$. Por el principio de Pascal, la presión en el pistón mayor debe incrementarse en la misma cantidad:

$$\Delta p = F_1/A_1 = F_2/A_2$$

Por lo tanto, la fuerza aplicada al pistón pequeño es:

$$F_1 = F_2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = (15000\text{N})\left(\frac{4x10^{-2}\text{m}^2}{2\text{m}^2}\right) = 300\text{N}$$

b) Tomando torques con respecto al pivote en el extremo de la barra, se tiene:

$$\sum \tau = F(a+b) - F_1 b = 0,$$

y la fuerza a aplicar es:

$$F = \left(\frac{b}{a+b}\right)F_1 = \left(\frac{10}{30+10}\right)300N = 75N$$

¡La fuerza aplicada resulta unas 200 veces menor que el peso del automóvil!

c) No hay ganancia de energía. Si se desprecia la fricción entre los pistones y las paredes de los cilindros, mostraremos que, el trabajo de salida sobre el pistón grande es igual al trabajo de entrada sobre el pistón pequeño. En efecto, cuando el pistón pequeño es empujado una distancia d_1 hacia abajo, debe forzar un volumen de aceite, d_1A_1, hacia el cilindro grande. Como el volumen del fluido se conserva esto provoca que el pistón grande se desplace hacia arriba una distancia d_2, tal que:

$$d_2A_2 = d_1A_1$$

El trabajo realizado por el pistón grande es:

$$W_2 = F_2d_2 = (F_1\frac{A_2}{A_1})(\frac{A_1d_1}{A_2}) = F_1d_1 = W_1$$

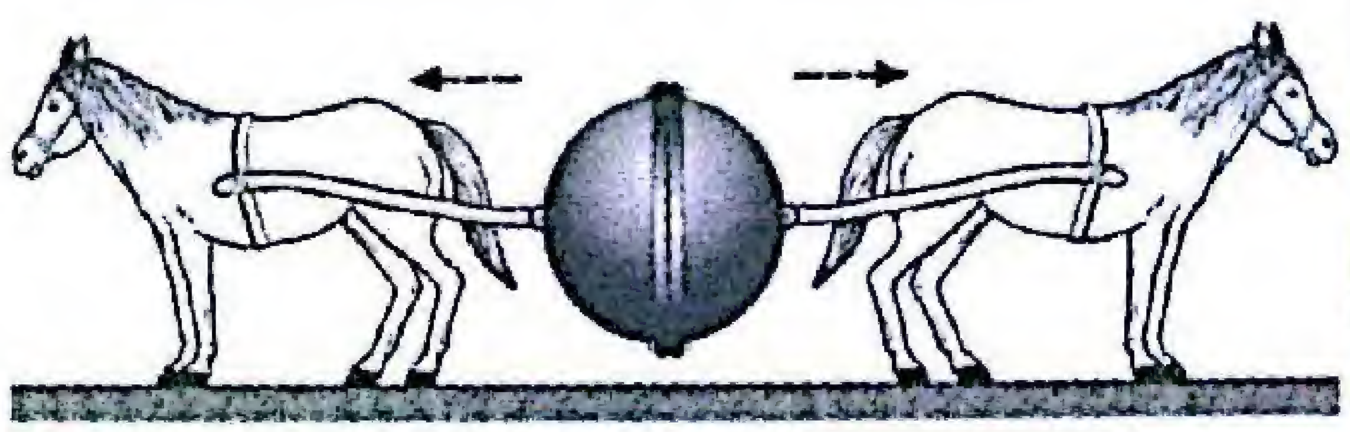
El trabajo de salida es igual al trabajo de entrada.

Respuesta:

a) $F_1 = 300N$
b) $F = 75N$
b) No. $W_2 = W_1$

PR-1.11. *Los hemisferios de Magdeburgo*

En 1654 Otto Von Guericke, alcalde de Magdeburgo, e inventor de la bomba de vacío, hizo la siguiente demostración pública en presencia del emperador: Extrajo aire a una esfera compuesta de dos conchas hemisféricas metálicas de paredes delgadas y de igual radio R, colocadas en contacto borde con borde. Para separar los hemisferios, y después de varios fracasos, hubo que emplear grupos de ocho caballos a cada lado.



a) Demuestre que la fuerza requerida para despegar los hemisferios es:

$$F = \pi R^2(P_2 - P_1)$$

siendo P_2 la presión atmosférica externa y P_1 la presión interna.

b) Calcule el valor de la fuerza si el radio de los hemisferios es R = 0.5 m y la presión del aire interno es:

$$P_1 = 10^{-2}P_2$$

Solución: La fuerza externa que hay que aplicar para separar los hemisferios tiene que ser igual a la componente horizontal de la fuerza neta que se establece debida a la diferencia de presión entre el aire exterior y el interior. La componente horizontal de la fuerza que actúa a un ángulo θ es $F_x = \Delta p\cos\theta dA$. Consideremos una tira en forma de anillo a un ángulo de θ constante, cuyo radio es $R sen\theta$ y cuyo ancho es $Rd\theta$. El área de la tira será:

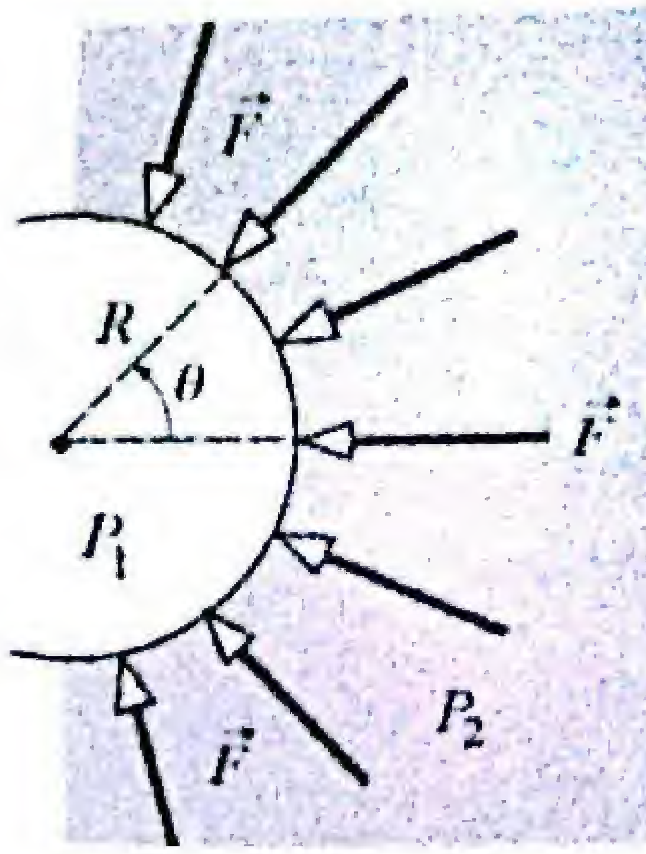
$$dA = 2\pi(R sen\theta)(Rd\theta) = 2\pi R^2 sen\theta d\theta$$

Si P_2 es la presión atmosférica afuera y P_1 la presión en el interior de los hemisferios, la fuerza horizontal que se ejerce sobre toda la tira es:

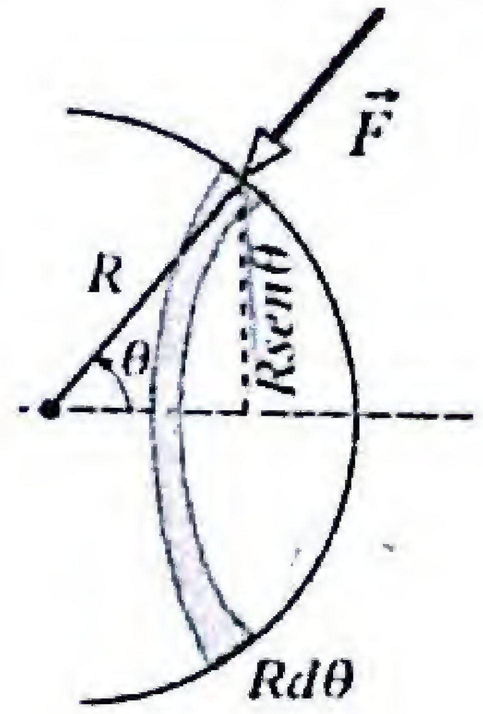
$$dF_x = (P_2 - P_1)\cos\theta dA = 2\pi R^2\Delta p\cos\theta sen\theta d\theta$$

La fuerza neta sobre un hemisferio se obtiene sumando las fuerzas horizontales sobre todos las tiras en forma de anillo:

$$F_x = \int dF_x = 2\pi R^2\Delta p\int_0^{\pi/2}\cos\theta sen\theta d\theta$$



Integrando, se encuentra finalmente la fuerza neta sobre un hemisferio:



$$F_x = 2\pi R^2\Delta p\int_0^{\pi/2} sen\theta d sen\theta = 2\pi R^2\Delta p\left.\frac{sen^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2}$$

$$F_x = \pi R^2\Delta p = \pi R^2(P_2 - P_1)$$

b) Usando los datos numéricos encontramos el valor de la fuerza externa requerida para separar los dos hemisferios:

$$F_x = \pi R^2\Delta p = \pi(0.5m)^2(1.01x10^5 - 1.01x10^3)Pa$$

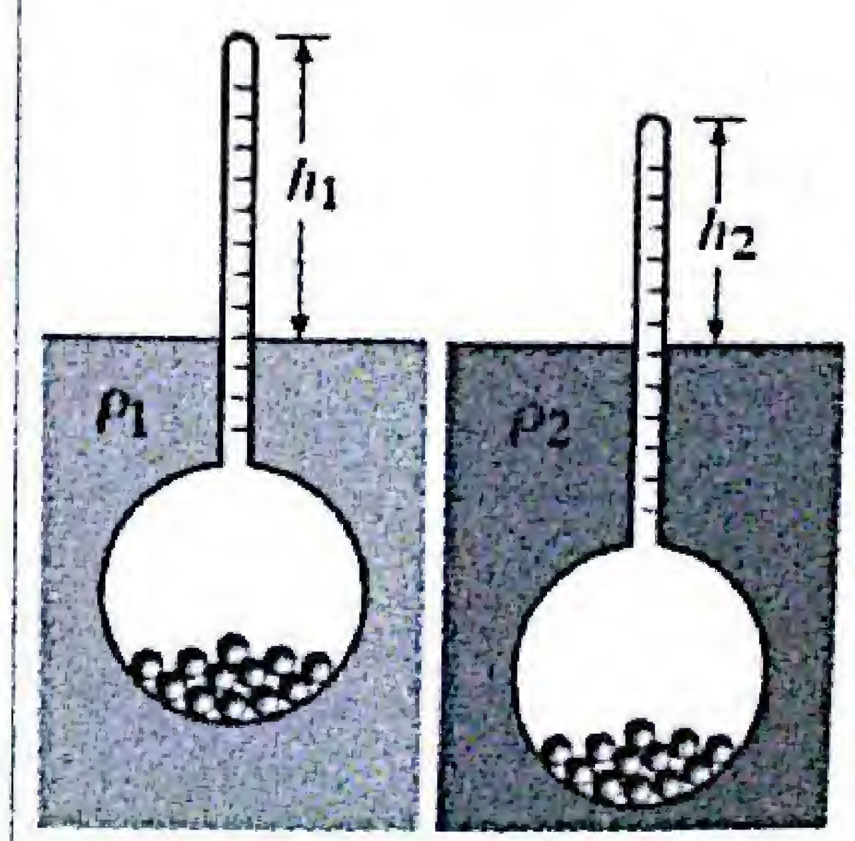
$$F_x \cong 78500N$$

Respuesta:

b) $F_x \cong 78500N$

PR-1.12. *Midiendo densidades con un hidrómetro*

Un hidrómetro o densímetro consiste en un bulbo esférico con perdigones de plomo y un vástago cilíndrico que se coloca flotando en un fluido. Una escala calibrada en el extremo superior permite leer directamente la densidad. Suponga que el área transversal del vástago es A = 0,4 cm^2 y el volumen total es V = 13 cm^3. Cuando el hidrómetro es sumergido en agua (densidad ρ_1 = 1000 kg/m^3) flota con una altura del vástago h_1 = 8 cm por encima de la superficie del agua. Mientras que en un líquido desconocido, sobresale de la superficie una altura h_2 = 1 cm. Determine la densidad de este líquido.



Solución: En el agua la fuerza de empuje sobre el hidrómetro es: $F_1 = \rho_1 V_1 g$ y equilibra su peso mg:

$$\sum F_y = F_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 V_1 g = mg \qquad (1)$$

En el líquido desconocido, la fuerza de empuje sobre el hidrómetro es: $F_2 = \rho_2 V_2 g$ y equilibra su mismo peso mg:

$$\sum F_y = F_2 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 V_2 g = mg \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se obtiene:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \rho_1\left(\frac{V - Ah_1}{V - Ah_2}\right)$$

Por lo tanto, el valor de la densidad del líquido desconocido es:

$$\rho_2 = \left(1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(\frac{13 - 0{,}4x8}{13 - 0{,}4x1}\right) = 778\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

El hidrómetro es un instrumento de alta precisión, ya que variaciones de densidad relativamente pequeñas producen variaciones grandes en la lectura. Se utilizan para medir las densidades relativas en la industria vinícola. También en la revisión de la densidad del ácido de una batería de carro, cuya concentración determina su estado de carga.

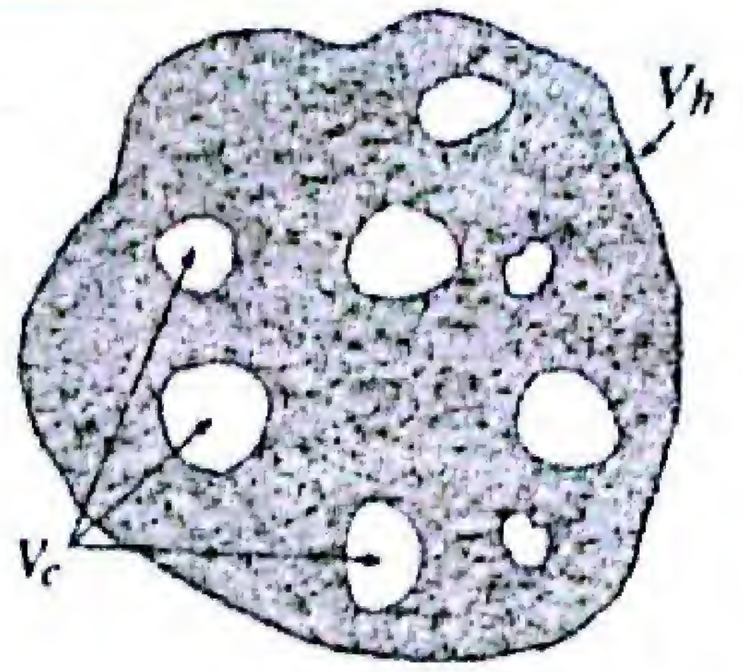
Respuesta:

$$\boxed{\rho_2 = 778\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

PR-1.13. *Cavidades dentro de una roca de hierro*

Una roca de hierro que tiene un cierto número de cavidades, pesa 613 N en el aire y 397 N en el agua. ¿Cuál será el volumen total de las cavidades internas en el material?

Solución: Si V_h el volumen ocupado por el hierro y V_c el volumen de las cavidades internas, entonces el volumen total de la pieza de hierro es: $V = V_h + V_c$. En el aire, el peso de la pieza es: $Mg = (\rho_h V_h)g$ y cuando está sumergida en el agua, su peso aparente es: $W = Mg - F_e$, siendo la fuerza de empuje: $F_e = (\rho_a V)g$. Por lo tanto:



$$Mg - W = (\rho_a V)g = \rho_a g(V_h + V_c) = \rho_a g\frac{M}{\rho_h} + \rho_a g V_c$$

$$Mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_h}\right) - W = \rho_a g V_c$$

Despejando, se obtiene el volumen total de las cavidades internas de la roca:

$$V_c = \frac{Mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_h}\right) - W}{\rho_a g}$$

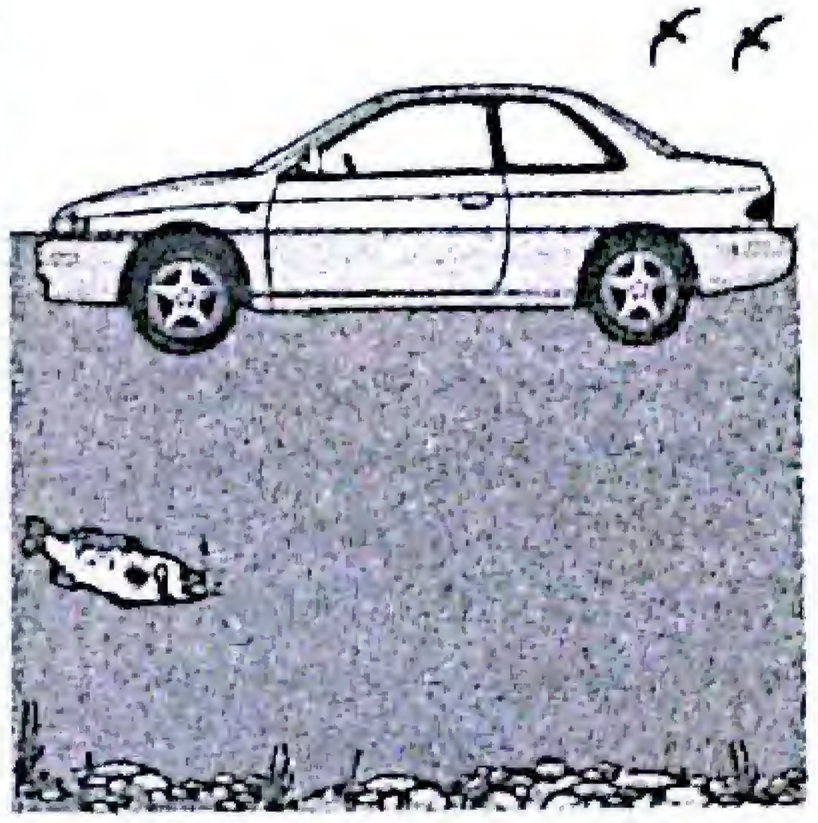
$$V_c = \frac{613\text{N}\left(1 - \frac{1000\text{kg/m}^3}{7870\text{kg/m}^3}\right) - 397}{(1000\text{kg/m}^3)9{,}8\text{m/s}^2} = 0{,}014\text{m}^3$$

Respuesta:

$$\boxed{V_c = 0{,}014\text{m}^3}$$

PR-1.14. *Este carro puede flotar en el agua*

Un automóvil que tiene una masa de 1000 kg y ocupa un volumen de 4 m^3, cae al agua. El compartimiento de pasajeros es hermético de modo que al principio no entra agua y el automóvil queda flotando como se ilustra en la figura.



a) En esta situación, ¿qué volumen del automóvil queda sumergido bajo la superficie del agua?

b) Suponga ahora que va entrado agua lentamente al automóvil y al cabo de un tiempo se hunde, ¿cuantos metros cúbicos de agua ha entrado en el momento en que desaparece bajo la superficie del agua?

Solución: a) Aplicando el principio de Arquímedes, tenemos que, en equilibrio, el valor de la fuerza de empuje F_e debe ser igual al peso del agua desalojada por el volumen sumergido del automóvil:

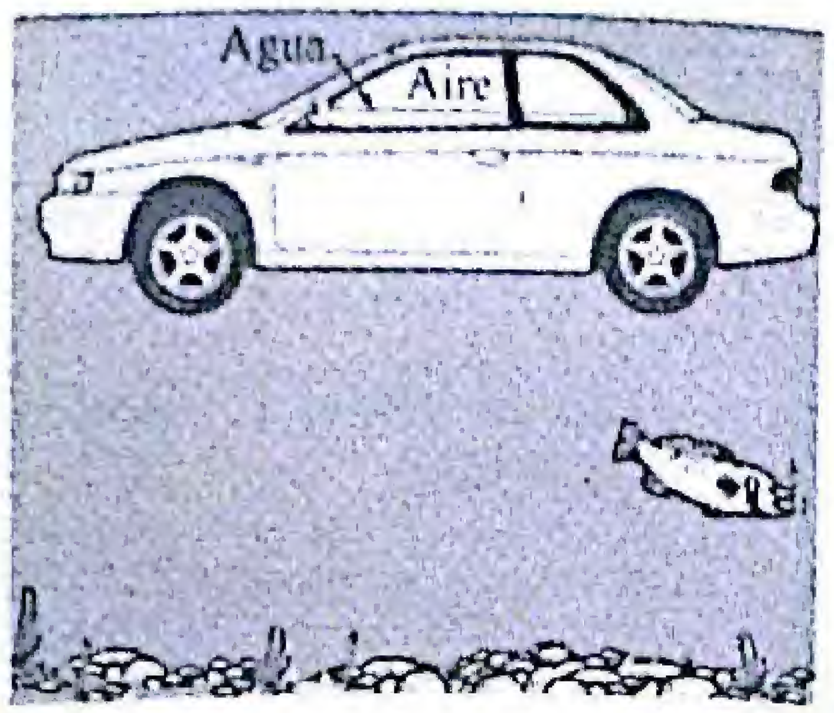
$$F_e = (\rho_A V_s)g = Mg$$

El volumen sumergido del automóvil es:

$$V_s = \frac{M}{\rho_A} = \frac{1000\text{kg}}{1000\text{kg/m}^3} = 1{,}0\text{m}^3$$

Es decir, en esta posición queda sumergida la cuarta parte del volumen total del automóvil.

b) Cuando el automóvil está a punto de hundirse, su peso mas el de la cantidad de agua que ha penetrado es igual a la fuerza de empuje ejercida por el agua desalojada cuyo volumen es igual al de todo el automóvil, V_c. Si llamamos V_a el volumen de agua que ha entrado, podemos escribir:



$$F_e = (\rho_A V_c)g = Mg + mg = Mg + \rho_A V_a g$$

$$V_a = \frac{\rho_A V_c - M}{\rho_A} = V_c - \frac{M}{\rho_A} = 4\text{m}^3 - \frac{1000\text{kg}}{1000\text{kg/m}^3}$$

$$V_a = (4 - 1)\text{m}^3 = 3\text{m}^3$$

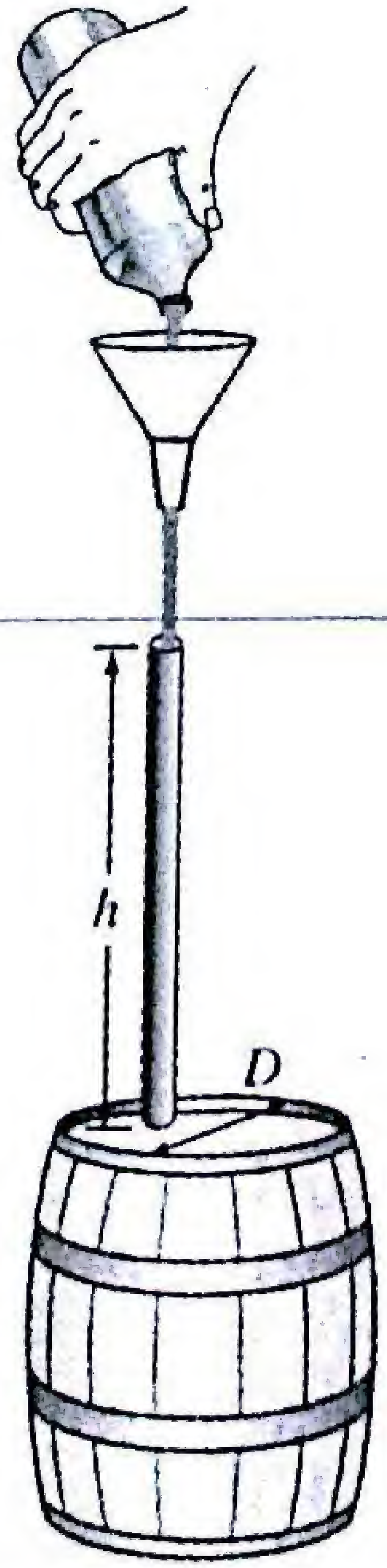
El automóvil se hunde cuando ha entrado un volumen de agua igual a tres cuartos de su volumen total.

Respuesta:

a) $V_s = 1{,}0\text{m}^3$
b) $V_a = 3{,}0\text{m}^3$

PR-1.15. *Con un poco de agua Pascal reventó un barril*

En el siglo XVII, Blas Pascal mostró en forma dramática el enorme efecto de la presión que puede ejercer una delgada columna de agua. Llenó con agua un barril de vino de diámetro D = 40 cm, al que conectó en forma vertical un tubo largo de 6 mm de diámetro. Luego fue añadiendo agua por el tubo, encontrando que el barril explotaba al llegar la columna a una altura h = 12 m.
a) ¿Cuál fue el volumen de agua que echó en el tubo?
b) ¿Cuál fue la fuerza ejercida por la columna de agua sobre la tapa del barril?



Solución: a) El volumen de agua en el tubo es:

$$V = (\pi r^2)(h) = \pi(3\text{x}10^{-3}\text{m})^2(12\text{m}) = 3{,}39\text{x}10^{-4}\,\text{m}^3$$

La masa del agua es:

$$M = \rho V = (1000\text{kg/m}^3)(3{,}39\text{x}10^{-4}\,\text{m}^3) = 0{,}339\ \text{kg}$$

Es decir, apenas fue necesario echar 0,34 litros de agua.

b) La presión ejercida sobre la tapa del barril por la columna de agua es:

$$p = \rho g h = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\text{x}9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{x}12\text{m} = 1{,}18\text{x}10^5\text{Pa}$$

Sobre la tapa hacia adentro está aplicada la presión atmosférica, p_{atm}, mientras que hacia fuera, la presión es: $p + p_{atm}$, de modo que la fuerza que revienta la tapa es:

$$F = pA = (1{,}18\text{x}10^5\frac{\text{N}}{\text{m}^3})\pi(0{,}2\text{m})^2 = 1{,}48\text{x}10^4\text{N}$$

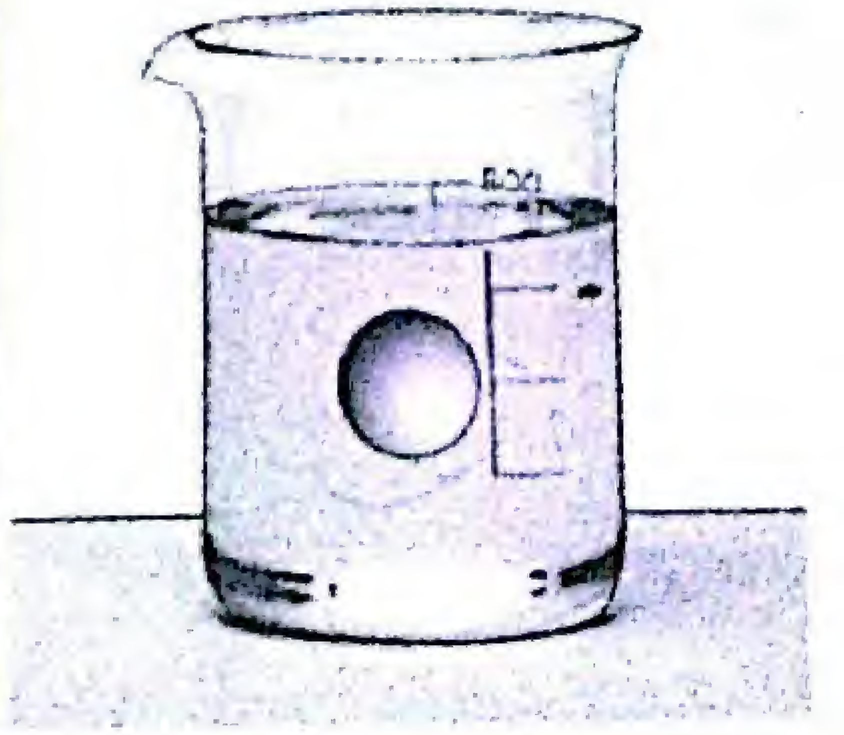
Esta fuerza equivale a un peso de 1,5 toneladas.

Respuesta:

a) $M = 0{,}339$ kg
b) $F = 1{,}48\text{x}10^4\text{N}$

PR-1.16. *Pelota suspendida en un líquido misterioso*

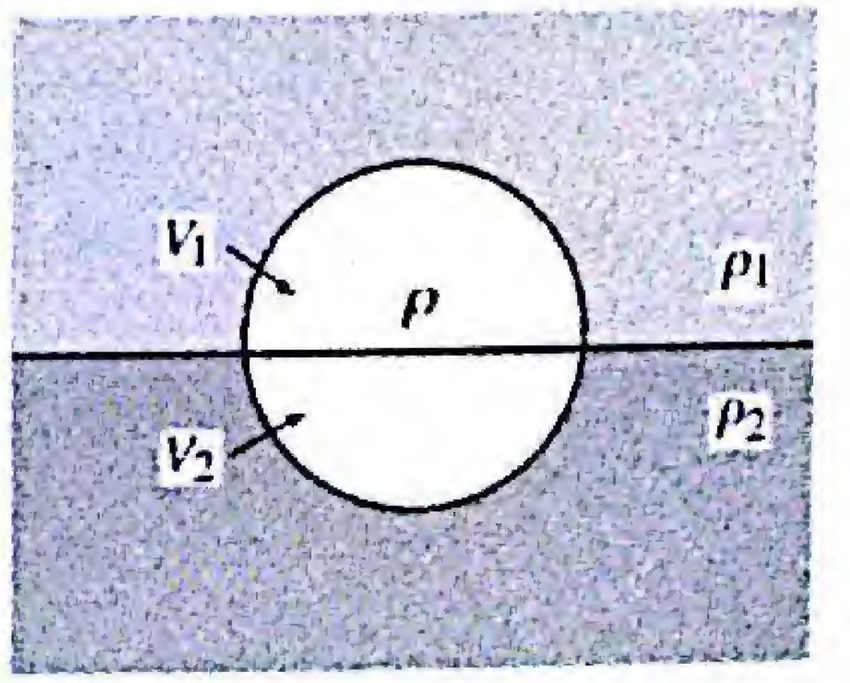
En una demostración de física, colocamos una pelota de goma suspendida en el medio de un líquido, para retar a los alumnos a que encuentren una explicación. Esto es posible porque, en realidad, el recipiente contiene dos líquidos distintos que no se mezclan entre sí: agua y alcohol, cuya frontera es casi imperceptible. Suponga una pelota homogénea de volumen V y densidad ρ, que flota entre los dos líquidos de densidades respectivas ρ_1 y ρ_2, siendo $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Determine la fracción del volumen de la pelota que queda en cada líquido.



Solución: Si V es el volumen de la pelota y ρ su densidad, su peso es:

$$mg = \rho V g$$

La fuerza total de empuje debida a los dos líquidos desplazados es:



$$F_e = F_{e1} + F_{e2} = \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g$$

En equilibrio, se tiene: $F_e = mg$, por lo tanto:

$$\rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho V g$$

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho V$$

Combinando esta expresión con la del volumen total de la pelota: $V = V_1 + V_2$, se obtienen los volúmenes parciales:

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1) = \rho V$$

$$V_1 = V(\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1})$$

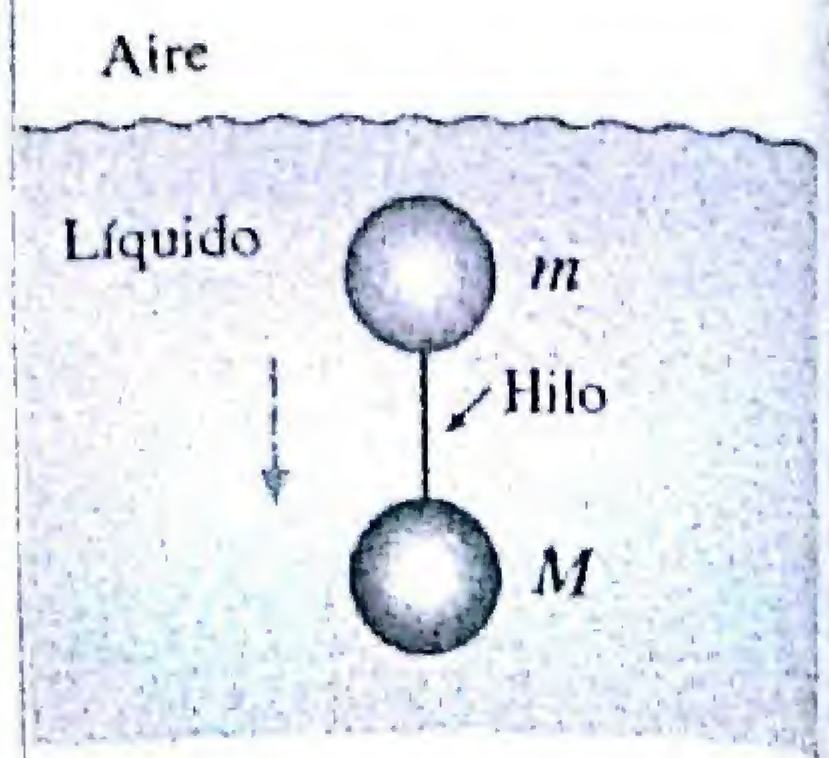
$$V_2 = V - V_1 = V(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1})$$

Respuesta:

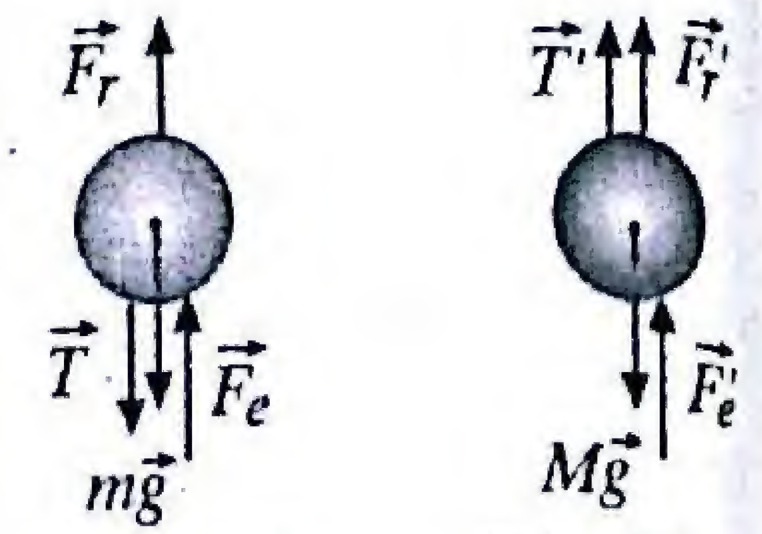
$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$$
$$\frac{V_2}{V} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

PR-1.17. *Caída de dos pelotas en el seno de un líquido*

Dos pelotas sólidas de igual radio pero de diferentes masas, $M > m$, están unidas mediante un hilo y al echarlas en un líquido, el sistema se hunde. ¿Cuál será la tensión del hilo durante la caída estacionaria de las pelotas?



Solución: En la situación estacionaria la pelota mas pesada, de peso, Mg, estará por debajo de la mas liviana de peso mg, y el hilo que las une se dispondrá verticalmente bajo una tensión T. Además, sobre ambas pelotas tendrán igual valor tanto las fuerzas de empuje, $F_e = F_e'$, como también la de resistencia del fluido, $F_r = F_r'$. Las condiciones de movimiento con velocidad constante son:



Pelota superior Pelota inferior

Pelota superior: $$\sum F_y = F_e + F_r - mg - T = 0$$

Pelota inferior: $$\sum F_y = F_e' + F_r' - Mg + T' = 0$$

Restando la segunda ecuación de la primera y tomando en cuenta que: $T = T'$, se tiene:

$$(M - m)g - 2T = 0$$

Despejando, se obtiene la tensión del hilo:

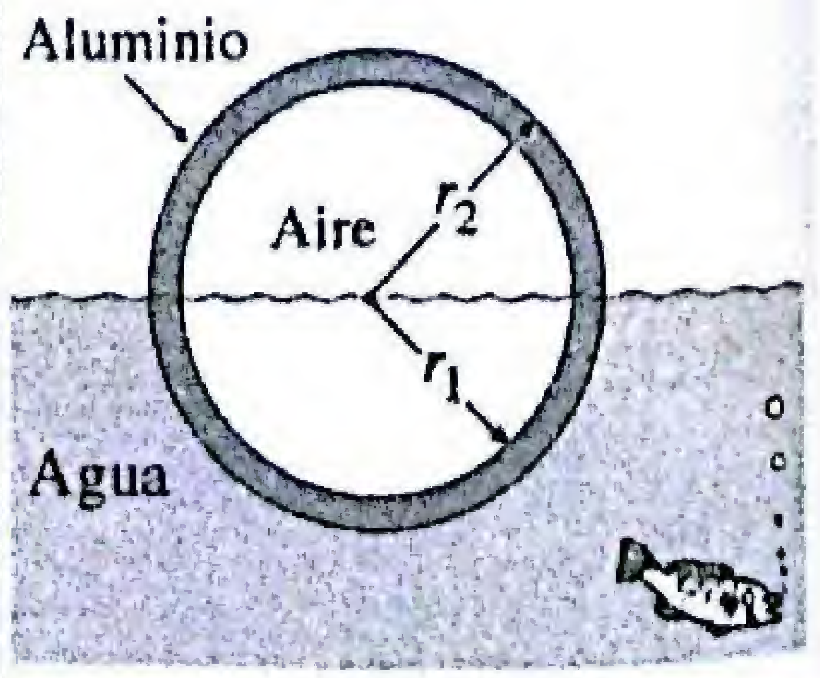
$$T = (\frac{M - m}{2})g$$

Respuesta:

$$\boxed{T = (\frac{M - m}{2})g}$$

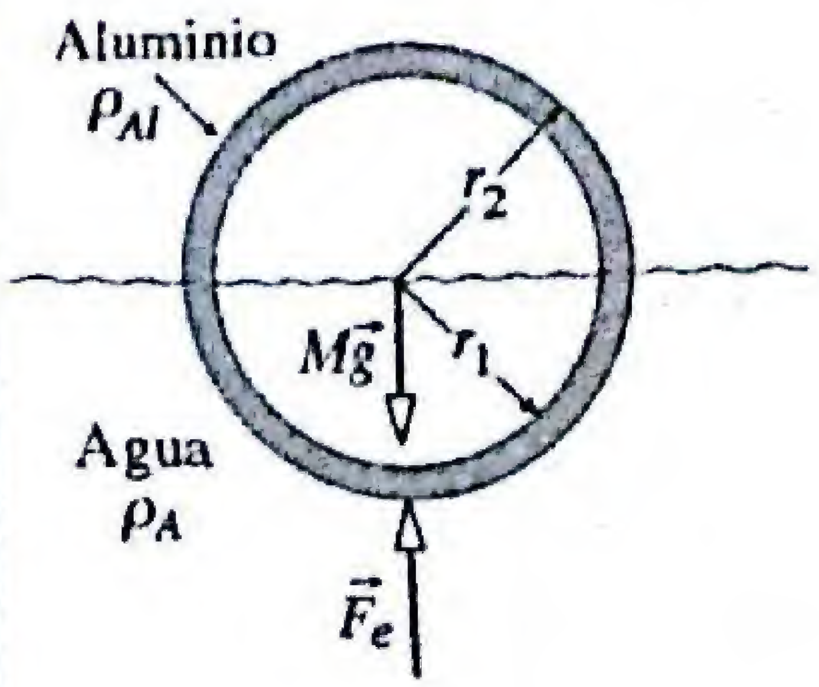
PR-1.18. *Una boya esférica sumergida hasta la mitad*

Se desea fabricar una boya de aluminio que tenga la forma de un cascarón esférico hueco de manera que flote en agua de mar justamente con la mitad sumergida. ¿Cuál deberá ser la relación entre los radios externo e interno de la boya (r_2 / r_1)?



Solución: El volumen del cascarón de aluminio es la diferencia de volúmenes de las esferas de radios exterior, r_2 e interior, r_1, respectivamente ($V = V_2 - V_1$). Si ρ_{Al} es la densidad del aluminio, su peso correspondiente será:

$$Mg = (\rho_{Al}V)g = \rho_{Al}(V_2 - V_1)g$$



De acuerdo al principio de Arquímedes, la fuerza de empuje debe ser igual al peso del agua desalojada, cuyo volumen en este caso es la mitad del volumen externo, es decir:

$$F_e = m_A g = \frac{1}{2}(\rho_A V_2)g$$

En equilibrio se debe cumplir, $F_e = Mg$, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}(\rho_A V_2)g = (\rho_{Al}V)g = \rho_{Al}(V_2 - V_1)g$$

$$\frac{\rho_A}{2\rho_{Al}} = (1 - \frac{V_1}{V_2}) = (1 - \frac{4\pi r_1^3 / 3}{4\pi r_2^3 / 3}) = (1 - \frac{r_1^3}{r_2^3})$$

Agua de mar: $\rho_A = 1025$ kg/m^3
Aluminio: $\rho_{Al} = 2700$ kg/m^3

Despejando y luego insertando los valores numéricos, se tiene la relación que debe haber entre los dos radios:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{(1 - \frac{\rho_A}{2\rho_{Al}})^{1/3}} = \frac{1}{[1 - \frac{1025\text{kg/m}^3}{2(2700\text{kg/m}^3)}]^{1/3}} = 1{,}07$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{r_2}{r_1} = 1{,}07}$$

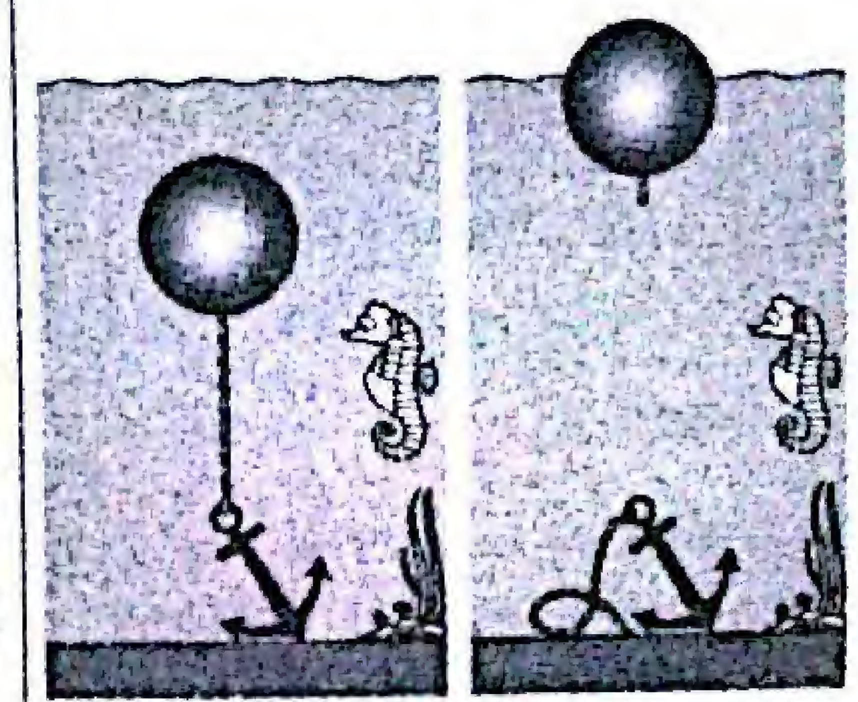
PR-1.19. *El cable se rompe y la esfera sube*

Un cable anclado al fondo de una laguna sostiene una boya esférica bajo la superficie. El volumen de la esfera es 0,15 m^3 y la tensión en el cable es de 450 N.

a) Calcule la fuerza de flotación ejercida por el agua sobre la esfera.

b) Determine la masa de la esfera.

c) Si el cable se rompe y la esfera sube a la superficie, qué fracción del volumen de la esfera quedará sumergida?



Solución: a) Cuando la esfera está completamente sumergida, la fuerza de empuje ejercida por el agua es:

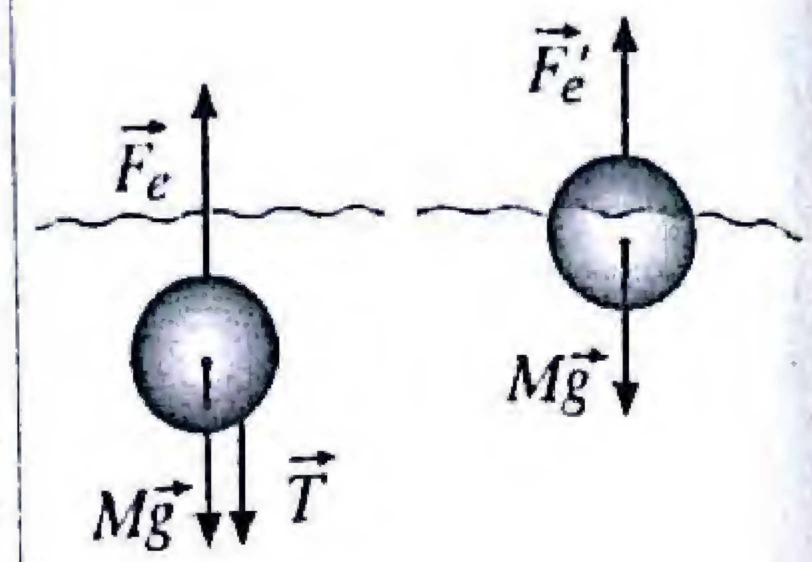
$$F_e = \rho_A g V = (1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}15\text{m}^3) = 1470\text{N}$$

b) En equilibrio la fuerza neta es cero:

$$\sum F_y = F_e - T - Mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Mg = F_e - T$$

Por lo tanto, la masa de la esfera es:

$$M = \frac{F_e - T}{g} = \frac{1470\text{N} - 450\text{N}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 104\text{kg}$$



c) Si la esfera sube a la superficie y V' es el volumen de la parte sumergida, ahora tenemos una fuerza de empuje menor que equilibra el peso:

$$\rho_A g V' = Mg$$

Por lo tanto: $V' = M / \rho_A$ y la fracción del volumen sumergido es:

$$\frac{V'}{V} = \frac{M}{\rho_A V} = \frac{104\text{kg}}{(1000\text{kg/m}^3)0{,}15\text{m}^3} = 0{,}693$$

Es decir, el 69,3% del volumen de la esfera queda sumergido en el agua.

Respuesta:

a) $F_e = 1470\text{N}$
b) $M = 104\text{kg}$
c) $V'/V = 0{,}693$

PR-1.20. *Oscilaciones armónicas de un palo que flota*

Una barra cilíndrica de madera está cargada en uno de sus extremos con plomo, de manera tal que queda flotando verticalmente en el agua. La longitud de la porción sumergida es L_0 y la masa total de la barra, incluyendo el lastre de plomo es m. Cuando se le hunde ligeramente a partir de su posición de equilibrio y luego se suelta, la barra queda oscilando verticalmente.

a) El agua en realidad amortigua el movimiento. Si despreciamos este hecho, demuestre que la oscilación es armónica simple.
b) Encontrar el período de las oscilaciones.

Solución: a) La fuerza neta sobre barra es la resultante del peso hacia abajo y de la fuerza de empuje hacia arriba:

$$F = mg - \rho g V = mg - \rho g L A$$

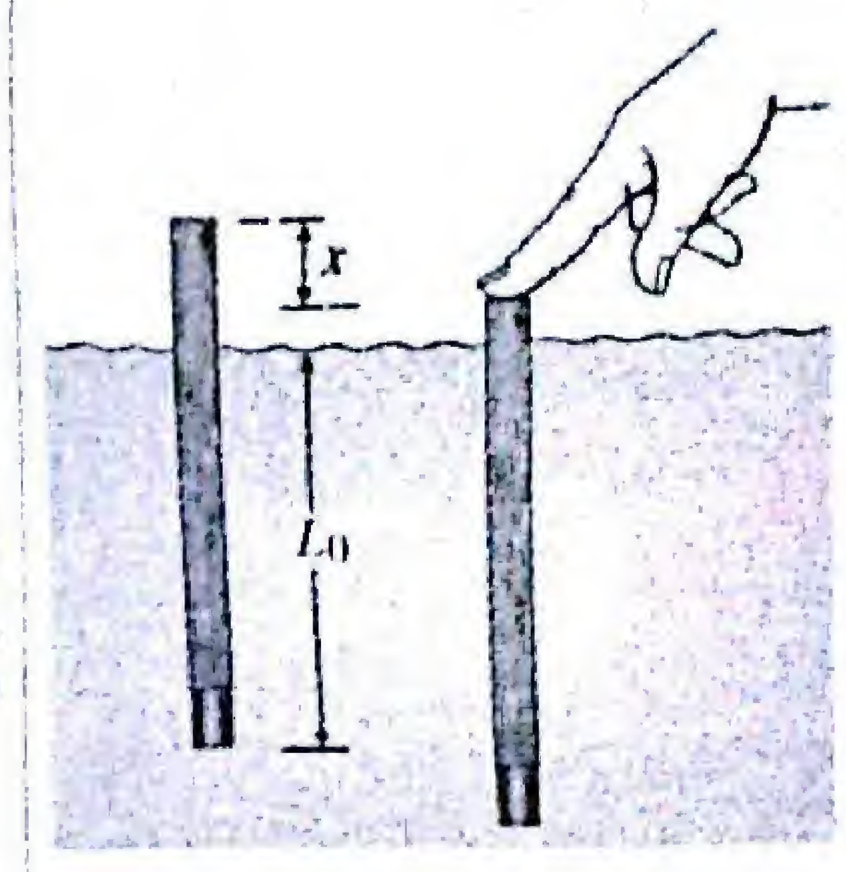
Siendo A el área transversal de la barra y ρ la densidad del agua. En equilibrio, la fuerza neta sobre la barra es cero, por lo tanto:

$$mg = \rho g L_0 A$$

Si hundimos la barra a una profundidad adicional x, la fuerza de empuje hacia arriba aumenta y la fuerza neta que tiende a restaurar el equilibrio será:

$$F(x) = mg - \rho g(L_0 + x)A = \rho g L_0 A - \rho g(L_0 + x)A$$

$$F(x) = -\rho g A x = -\rho g\left(\frac{m}{\rho L_0}\right)x = -\left(\frac{mg}{L_0}\right)x$$



Vemos así que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, $F(x) = -kx$, siendo la constante: $k = mg/L_0$. Por lo tanto el movimiento es armónico simple.

b) La aceleración de la barra es: $a = d^2x/dt^2$ y la ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Si la comparamos con la ecuación análoga para un oscilador masa-resorte ($dx^2/dt^2 + \omega^2 x = 0$), vemos que $\omega^2 = k/m$ y concluimos que el período de las oscilaciones es:

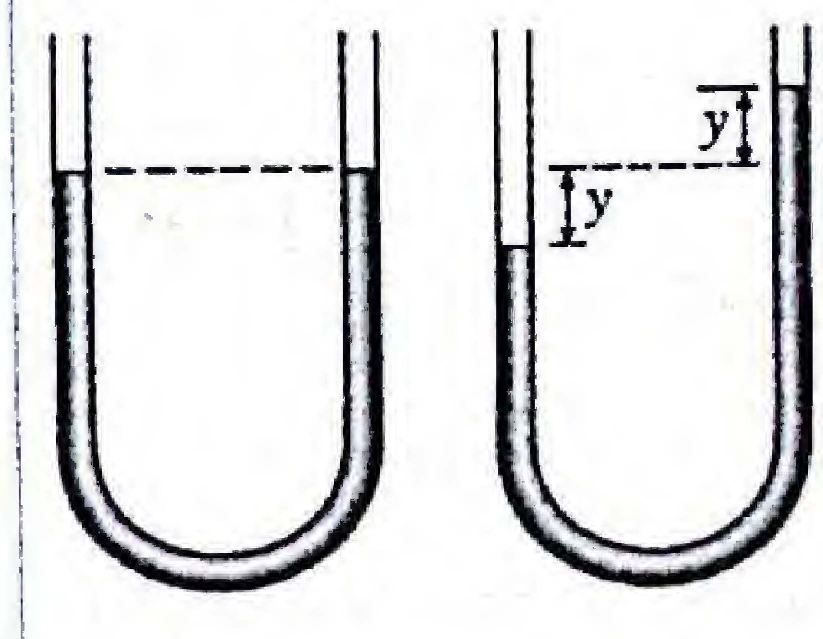
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}$$

Respuesta:

a) $F(x) = -kx$
b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_0}{g}}$

PR-1.21. *Oscilaciones de una columna de líquido*

En un tubo en U con área de sección transversal A, hay un líquido de densidad ρ con una longitud total L de superficie a superficie. Si el líquido es empujado momentáneamente hacia abajo, mediante un pistón en una de las columnas, determine el periodo del movimiento oscilatorio resultante. Se ignoran los efectos disipativos.



Solución: Sea y el desplazamiento de la superficie del líquido con respecto al nivel de equilibrio. La velocidad de cualquier parte de la columna del líquido en un instante de tiempo t es la misma: $v = dy/dt$. Como la masa total del líquido es $M = \rho V = \rho A L$, la energía cinética total del líquido en ese instante es:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(\rho AL)(\frac{dy}{dt})^2$$

Para calcular la energía potencial del líquido, imaginemos la situación en que una porción del líquido de volumen yA se quita de la columna izquierda y se agrega a la columna de la derecha por encima del nivel original de equilibrio. El incremento correspondiente de energía potencial es:

$$U(y) = (\rho Ay)gy = \rho gAy^2$$

La energía total del líquido (cinética mas potencial) es una constante del movimiento:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(\rho AL)(\frac{dy}{dt})^2 + \rho gAy^2$$

Comparemos esta expresión con la correspondiente de la energía de un oscilador armónico simple constituido por una masa m atada a un resorte de constante k:

$$E = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Podemos escribir el período de las oscilaciones del líquido:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho AL}{2\rho gA}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

Vemos así que el período depende solo de la longitud L del líquido en el tubo y no depende ni de la densidad ρ ni del área A de su sección transversal.

Respuesta:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$$

Hacer

PR-1.22. *Un cubo de hielo para un cóctel etílico*

Un cubo de hielo (densidad $\rho_H = 916$ kg/m^3) de lados L = 3 cm está flotando en una copa con agua fría (densidad $\rho_A = 1000$ kg/m^3), de modo que sus caras superior e inferior quedan paralelas a la superficie del agua.
a) ¿A qué distancia a por encima del nivel del agua se encuentra la cara superior del hielo?
b) Ahora se vierte lentamente un licor frío (densidad ρ_L = 790 kg/m^3) hasta que su nivel coincida con la superficie superior del cubo. Suponiendo que el licor y el agua no se mezclan, ¿cuál será el espesor b de la capa de licor?

Solución: a) De acuerdo al principio de Arquímedes, la fuerza de empuje sobre el hielo es igual al peso del agua desalojada:

$$F_e = \rho_A Vg = \rho_A L^2(L-a)g$$

Esta fuerza del agua equilibra el peso del hielo:

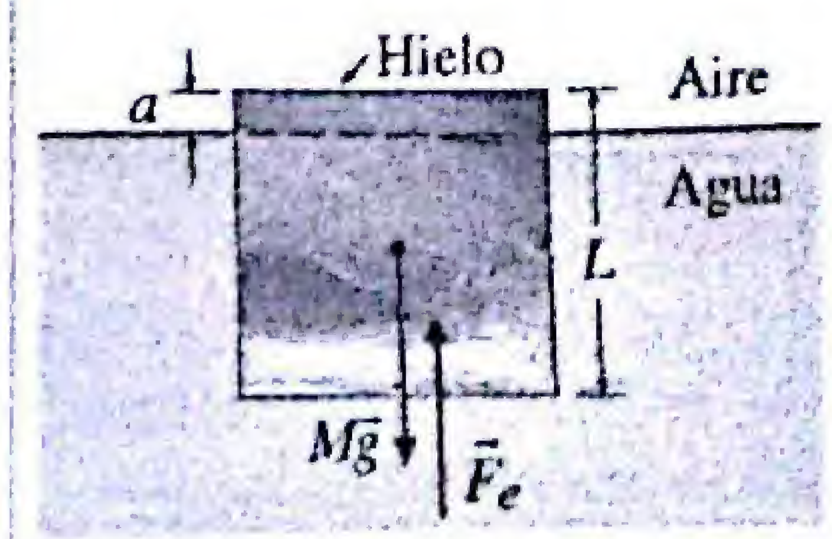
$$F_e = Mg \quad \Rightarrow \quad \rho_A L^2(L-a)g = \rho_H L^3 g$$

Simplificando y despejando se obtiene la altura a de la capa de hielo que queda fuera del agua:

$$\rho_A(L-a) = \rho_H L$$

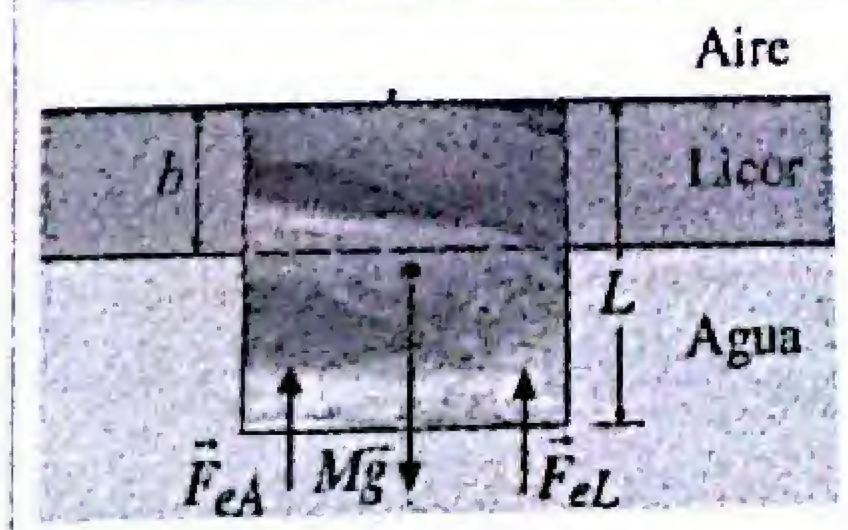
$$a = (1-\frac{\rho_H}{\rho_A})L = (1-\frac{916\text{kg/m}^3}{1000\text{kg/m}^3})3{,}0\text{cm} = 0{,}252\text{cm}$$

Densidades
Agua: $\rho_A = 1000$ kg/m^3
Hielo: $\rho_H = 916$ kg/m^3
Licor: $\rho_L = 790$ kg/m^3



b) Cuando agregamos el licor y suponiendo que éste no se mezcla con el agua, se ejercen dos fuerzas de empuje, debidas independientemente a cada uno de los líquidos. Estas dos fuerzas equilibran el peso del hielo:

$$\rho_A L^2(L-b)g + \rho_L L^2 bg = \rho_H L^3 g$$



Simplificando y despejando, se obtiene la altura b de la capa de hielo que queda en el licor:

$$\rho_A(L-b) + \rho_L b = \rho_H L$$

$$b = (\frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_A - \rho_L})L = (\frac{1000-916}{1000-790})3\text{cm} = 1{,}20\text{cm}$$

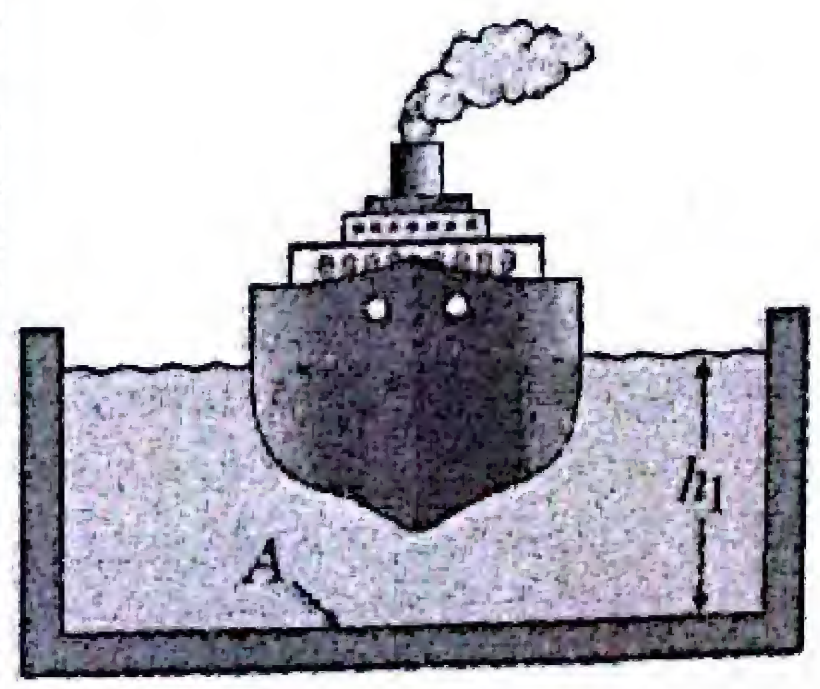
El 40% del cubo de hielo queda sumergido en el licor.

Respuesta

a) $a = 0{,}252$ cm
b) $b = 1{,}20$ cm

PR-1.23. *¿Cambia el nivel del agua al botar una carga?*

Un barco está flotando en un dique de base rectangular con área A. Inicialmente la profundidad del agua en el dique es h_I. Determine el cambio en el nivel del agua si...
a) Desde el barco se arroja al agua un ancla pesada de hierro, de masa m_0 y cuya densidad ρ_0 es mayor que la del agua.
b) Desde el barco se arroja al agua un tronco de madera cuya densidad es menor que la del agua.



Solución: a) Sea M_B la masa del barco y M_O la masa del ancla. Inicialmente el barco desplaza un volumen V_B de agua. Según el principio de Arquímedes el peso del agua desplazada debe equilibrar al peso del barco mas el del ancla. Por lo tanto:

$$\rho_A V_B g = (M_B + M_O)g \qquad \Rightarrow \qquad V_B = \frac{M_B + M_O}{\rho_A}$$

Siendo ρ_A la densidad del agua. Al botar el ancla, el barco desplaza un volumen menor de agua, V_B' y aplicando de nuevo el principio de Arquímedes:

$$\rho_A V_B' g = M_B g \qquad \Rightarrow \qquad V_B' = \frac{M_B}{\rho_A}$$

Inicialmente, el volumen bajo la línea de flotación al nivel h_1 incluye el volumen del agua, V_A y el volumen ocupado por el barco, V_B:

$$V_A + V_B = h_1 A$$

Finalmente el volumen hasta el nivel h_2 incluye el volumen del agua, V_A, (que está fijo), el nuevo volumen ocupado por el barco, V_B' y el volumen del ancla V_O:

$$V_A + V_B' + V_O = h_2 A$$

La diferencia entre los volúmenes antes y después será:

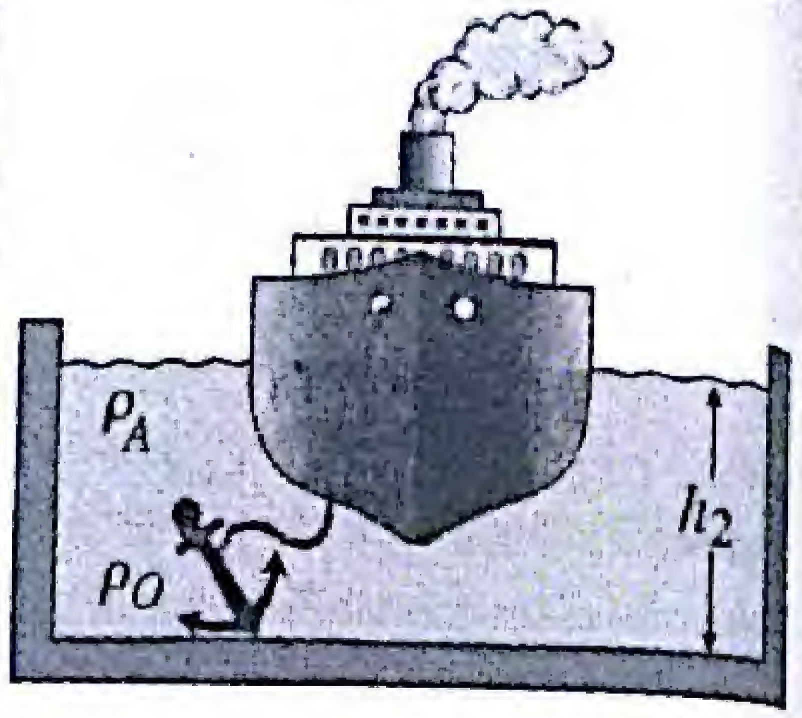
$$A(h_1 - h_2) = V_B - V_B' - V_O$$

Reemplazando las expresiones de los volúmenes, se obtiene la variación del nivel del agua:

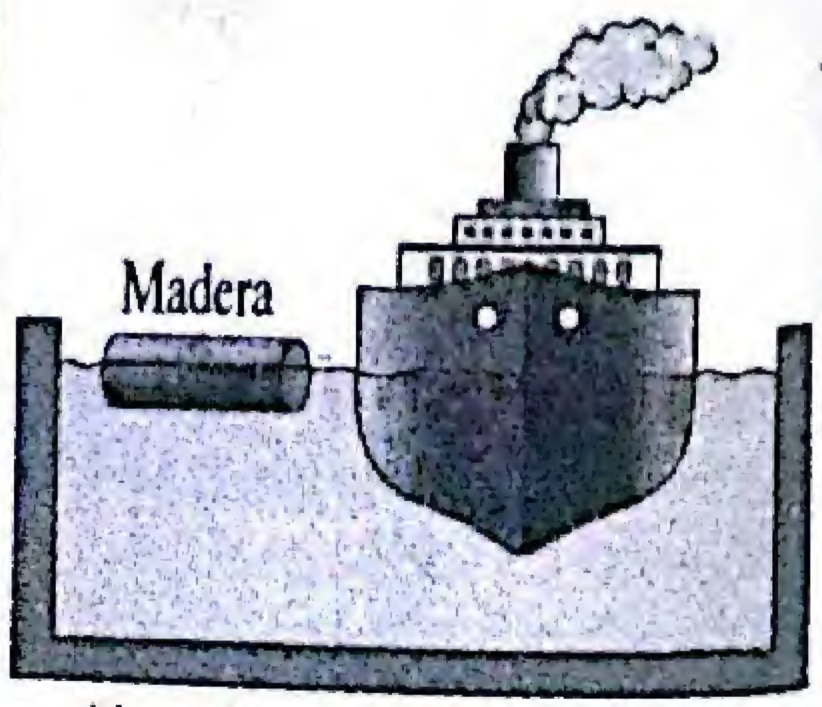
$$A(h_1 - h_2) = \frac{M_B + M_O}{\rho_A} - \frac{M_B}{\rho_A} - \frac{M_O}{\rho_O}$$

$$\Delta h = (h_1 - h_2) = \frac{M_O}{A}\left(\frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_O}\right)$$

Como la densidad del agua es menor que la del ancla ($\rho_A < \rho_O$) entonces ($\Delta h > 0$), esto significa que el nivel final del agua es menor que el inicial, es decir, el nivel desciende. Esto era de esperar en virtud de que, al echar el ancla al agua, el barco se aligera y así disminuye el volumen de agua que este desplaza.



Al arrojar el ancla, desciende el nivel del agua



Al arrojar un tronco de madera, No cambia el nivel del agua

b) Es evidente que en la situación en que el objeto lanzado sea un tronco de madera de densidad inferior a la del agua, la solución anterior no sería válida ya que el tronco no permanece dentro del agua sino que flota en la superficie. En este caso, el tronco desplazará el mismo volumen de agua que antes desplazaba estando dentro del barco, por lo tanto, el nivel del agua en el dique debe permanecer inalterado.

Respuesta:

a) El nivel del agua desciende en una cantidad:

$$\Delta h = \frac{M_O}{A}\left(\frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_O}\right)$$

b) El nivel del agua no cambia.

PR-1.24. *Intercambio en las lecturas de las básculas*

Una piedra está suspendida en una báscula de resortes B_1 y sumergida en un líquido dentro de un vaso de vidrio (Fig. a).

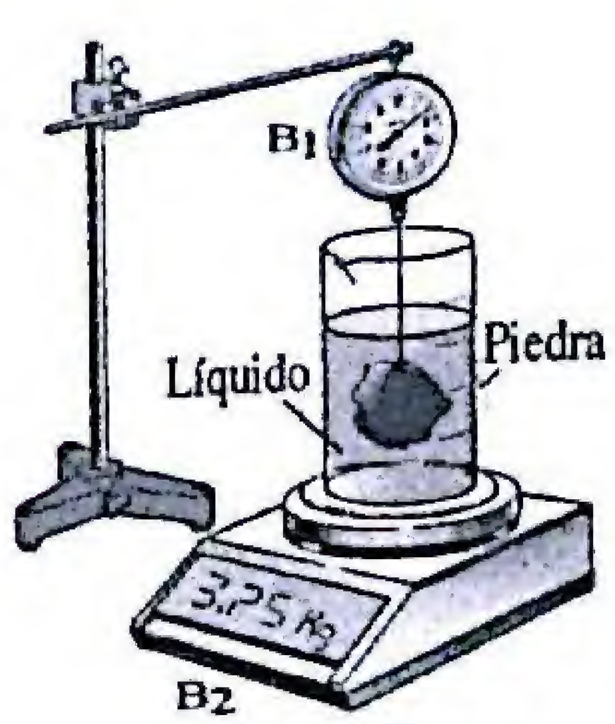


Fig. a

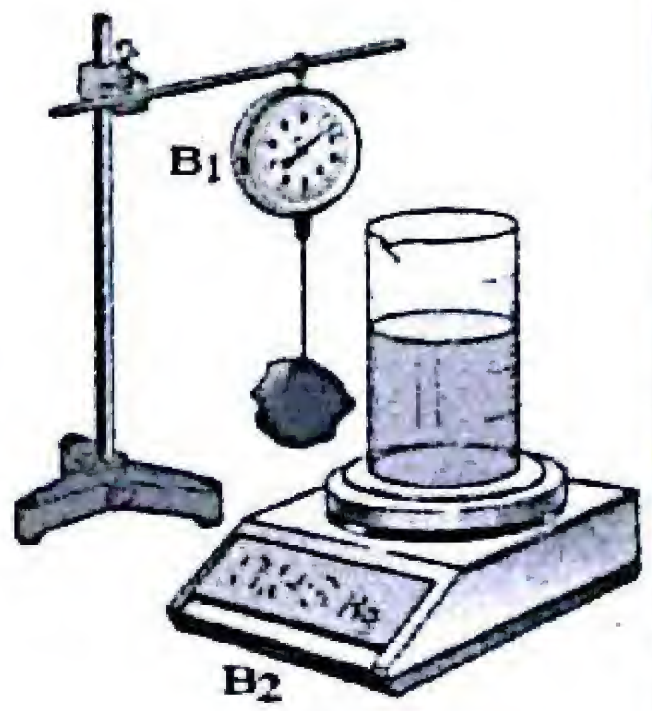


Fig. b

La masa del vaso de vidrio es $M_v = 0{,}50$ kg y la masa del líquido es $M_l = 0{,}75$ kg. Suponga que la báscula superior, B_1, indica una masa $M_1 = 1{,}25$ kg y la inferior, B_2, indica una masa $M_2 = 3{,}75$ kg. El volumen de la piedra es $V_p = 0{,}0015\ \text{m}^3$.

a) ¿Cuál es la densidad del líquido?

b) Si la piedra se saca del líquido (Fig. b), ¿cuáles serían las lecturas de las básculas B_1 y B_2?

Solución: a) Consideremos primero el sistema inicial constituido por la piedra, el líquido y el vaso de vidrio. Si $M_1 = F_1/g$ y $M_2 = F_2/g$ son las lecturas respectivas de las básculas superior e inferior, en equilibrio se debe cumplir:

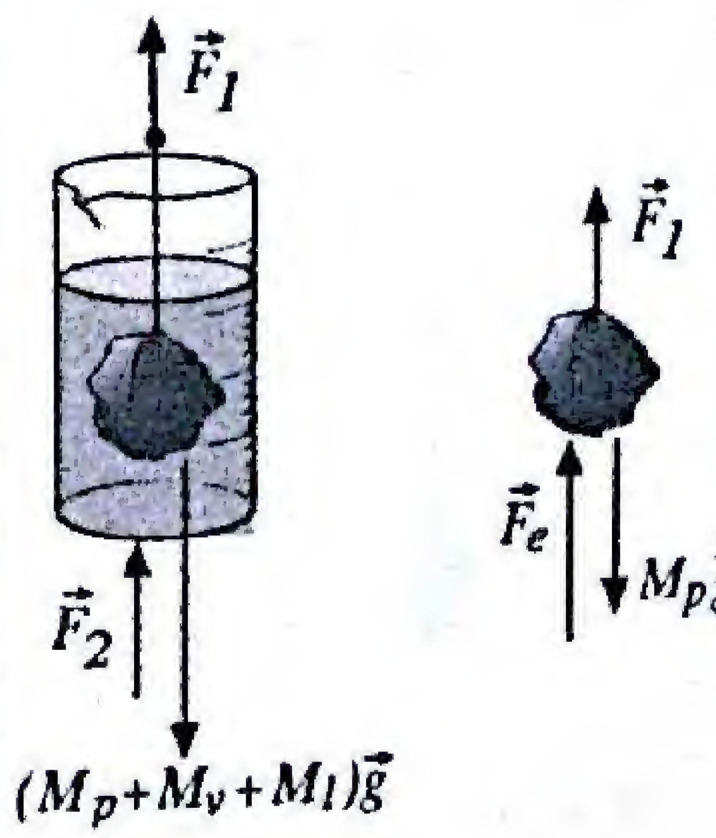
$$\sum F_y = F_1 + F_2 - (M_p + M_v + M_l)g = 0$$

$$M_1 g + M_2 g = (M_p + M_v + M_l)g$$

Despejando, obtenemos la masa de la piedra:

$$M_p = M_1 + M_2 - M_v - M_l$$

$$M_p = 1{,}25 + 3{,}75 - 0{,}50 - 0{,}75 = 3{,}75 kg$$



Consideremos ahora las fuerzas que están aplicadas sobre la piedra solamente. En equilibrio:

$$\sum F_y = F_1 + F_e - M_p g = 0$$

Siendo, $F_e = \rho_l V_p g$, la fuerza de empuje ejercida por el líquido.

$$\rho_l V_p g = M_p g - F_1 = M_p g - M_1 g$$

Despejando, obtenemos la densidad del líquido:

$$\rho_l = \frac{M_p - M_1}{V_p} = \frac{3{,}75kg - 1{,}25kg}{0{,}0015m^3} = 1667kg/m^3$$

b) Si ahora sacamos la piedra fuera del líquido, la báscula superior registra el valor de la masa de la piedra:

$$M_1' = M_p = 3{,}75kg$$

Mientras que la báscula inferior registra el valor de la masa del vaso de vidrio mas la masa del líquido:

$$M_2' = M_v + M_l = 0{,}50kg + 0{,}75kg = 1{,}25kg$$

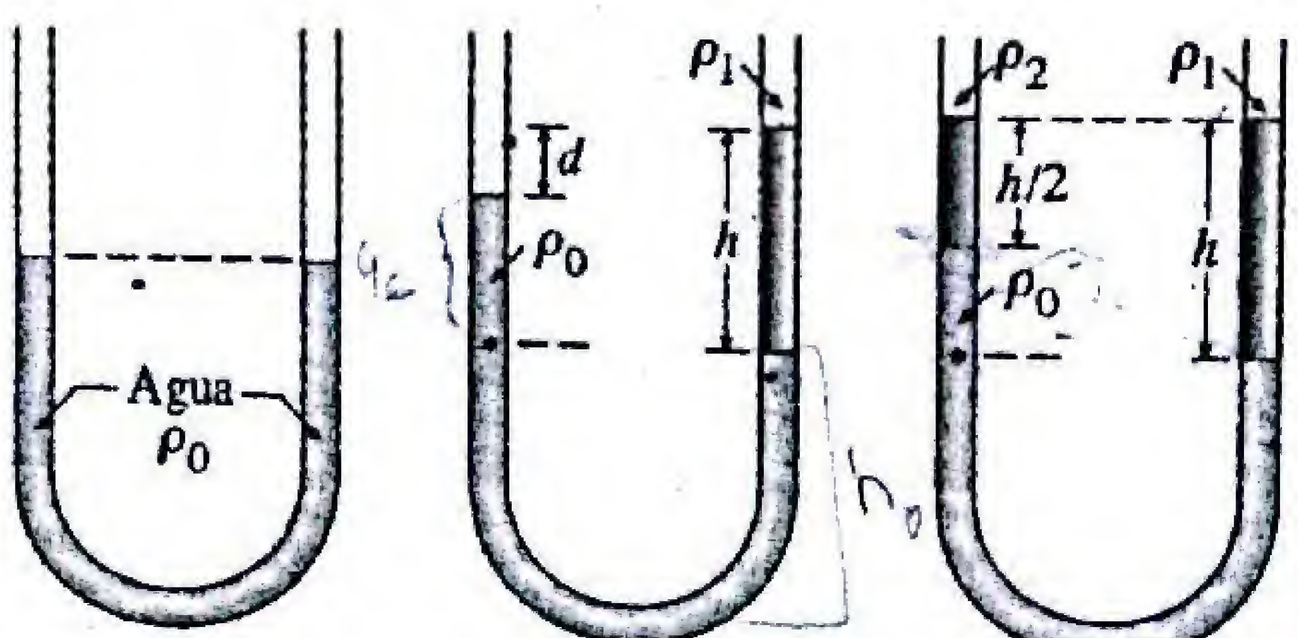
Vemos que, al sacar la piedra fuera del líquido, las lecturas de las dos básculas quedaron intercambiadas.

Respuesta:

a) $\rho_l = 1667kg/m^3$
b) $M_1' = 3{,}75kg$ y $M_2' = 1{,}25kg$

PR-1.25. *Agua entre dos líquidos desconocidos*

Un tubo en forma de *U* contiene inicialmente agua de densidad $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, (Fig. a).



(Fig. a) (Fig. b) (Fig. c)

Cuando agregamos en el lado derecho una columna de líquido de altura h = 5 cm de densidad, ρ_l, el nivel superior queda a una altura d = 1 cm por encima del nivel del lado izquierdo, (Fig. b). Cuando en el lado izquierdo se agrega otro líquido de densidad ρ_2 hasta una altura $h/2$ = 2,5 cm, ambas columnas quedan al mismo nivel, (Fig. c). Determine las densidades ρ_1 y ρ_2 de los dos líquidos desconocidos.

Solución: En la figura b la columna de líquido ρ_1 de altura h del lado derecho equilibra la columna de agua de altura $(h - d)$ del lado izquierdo.

$$\rho_1 g h = \rho_0 g (h - d)$$

Despejando, se obtiene la densidad desconocida:

$$\rho_1 = \rho_0 (\frac{h-d}{h}) = \rho_0 (1 - \frac{d}{h})$$

$$\rho_1 = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} (1 - \frac{1\mathrm{cm}}{5\mathrm{cm}}) = 800 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Cuando se agrega el segundo líquido, se deben equilibrar la columna del líquido ρ_1 de altura h con la columna de igual altura h, pero con una mitad de agua y la otra mitad del fluido ρ_2:

$$\rho_1 g h = \rho_0 g \frac{h}{2} + \rho_2 g \frac{h}{2}$$

Despejando, se obtiene la densidad del segundo líquido:

$$\rho_2 = 2\rho_1 - \rho_0 = 2(800 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}) - 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 600 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Respuesta:

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - \frac{d}{h}) = 800 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_2 = 2\rho_1 - \rho_0 = 600 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

PR-1.26. *Dos líquidos en tubo con un brazo inclinado*

Un tubo de vidrio de sección transversal constante está doblado con un brazo vertical y el otro brazo a un ángulo de inclinación θ.

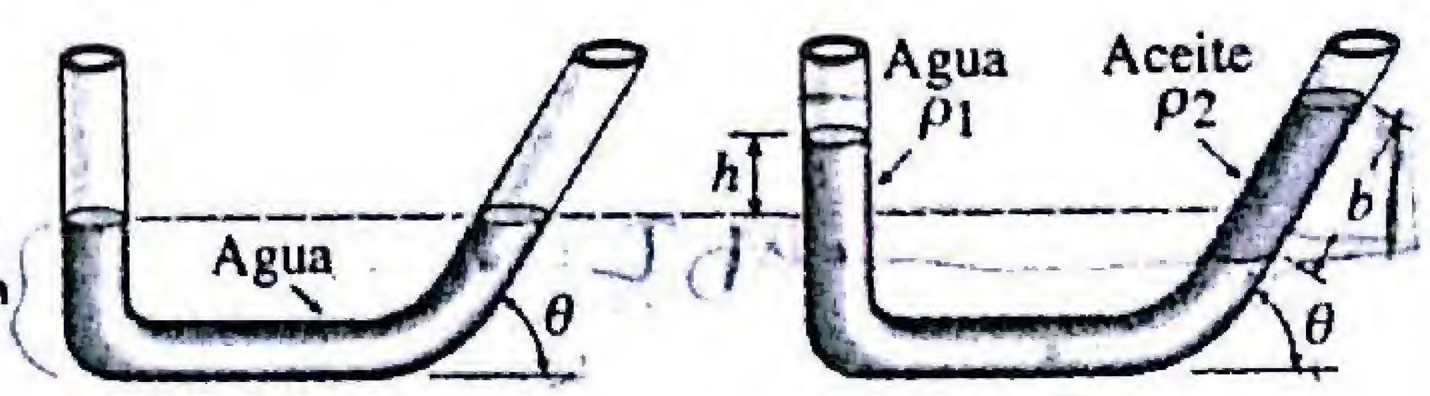


Fig. (a) Fig. (b)

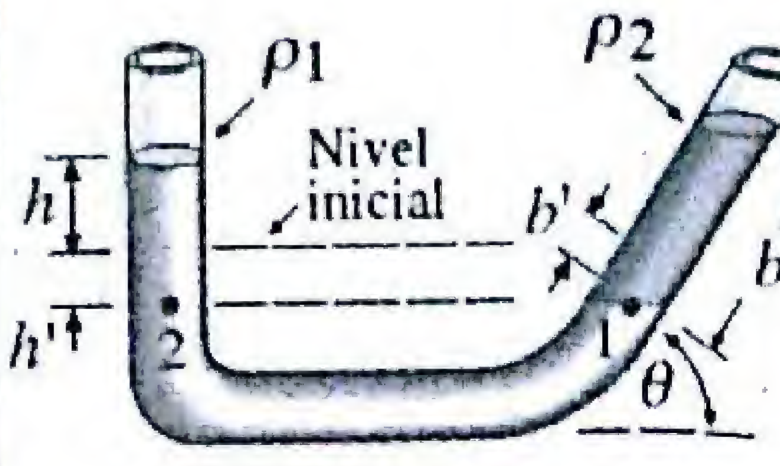
Inicialmente el tubo contiene agua de densidad ρ_l, hasta cierto nivel y ambos lados están abiertos a la atmósfera. A continuación, se vierte aceite de densidad, $\rho_2 < \rho_l$ en el brazo inclinado, formando una columna de longitud b. ¿Cuál será la altura h que asciende el agua en el brazo izquierdo?

Solución: En la columna inclinada el agua desciende una altura vertical, $h' = b' sen\theta$, que corresponde a un volumen desplazado:

$$V_1 = b' A = \frac{h'}{sen\theta} A$$

$b' =$

Siendo A el área transversal del tubo. En la columna izquierda el nivel del agua sube una altura h y el volumen desplazado será: $V_1' = hA$. Estos dos volúmenes deben ser iguales:



$$V_1' = V_1 \qquad \Rightarrow \qquad hA = \frac{h'}{sen\theta}A$$

De aquí que el desplazamiento vertical h' es:

$$h' = hsen\theta$$

Por otra parte, la presión al nivel del punto 1 en la frontera de los dos líquidos es :

$$P_1 = P_0 + \rho_2 gbsen\theta$$

siendo P_0, la presión atmosférica. Mientras que la presión en el punto 2 al mismo nivel en la columna de agua es:

$$P_2 = P_0 + \rho_1 g(h + h') = P_0 + \rho_1 gh(1 + sen\theta)$$

Como $P_1 = P_2$ tenemos:

$$P_0 + \rho_2 gbsen\theta = P_0 + \rho_1 gh(1 + sen\theta)$$

Simplificando, se obtiene así la altura h buscada:

$$\rho_2 bsen\theta = \rho_1 h(1 + sen\theta)$$

$$h = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{bsen\theta}{(1 + sen\theta)}$$

Respuesta:

$$\boxed{h = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{bsen\theta}{(1 + sen\theta)}}$$

PR-1.27. *El muro de contención de un dique*

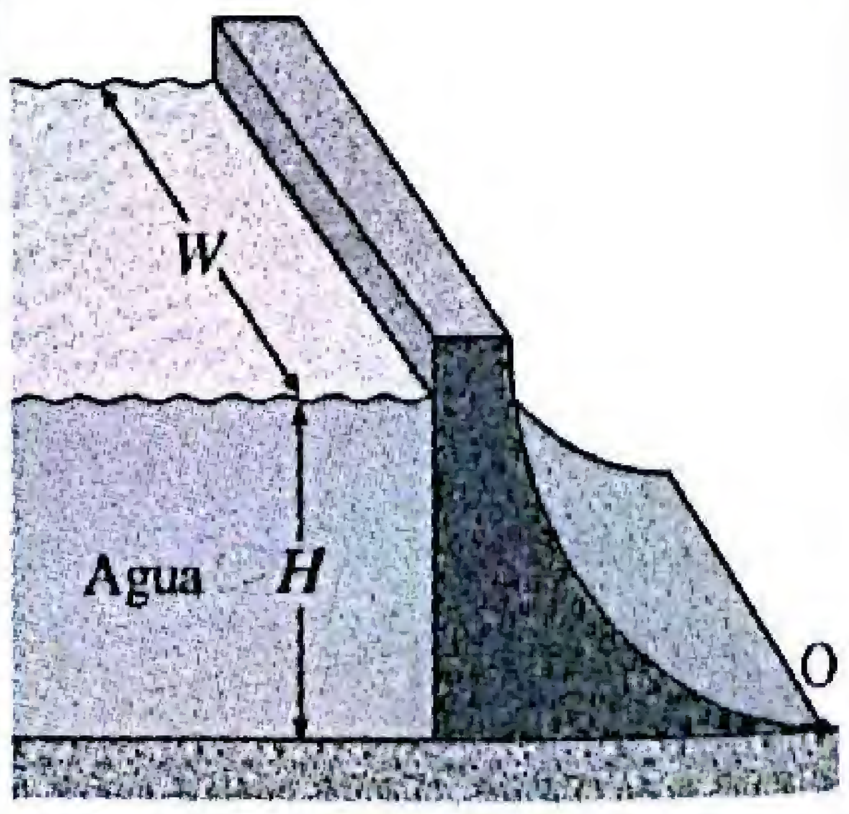
La profundidad del agua detrás de la cara vertical del muro de un dique es H y la anchura del dique es W.

a) ¿Por qué se construye el muro de contención de manera que el espesor se vaya incrementando hacia el fondo?

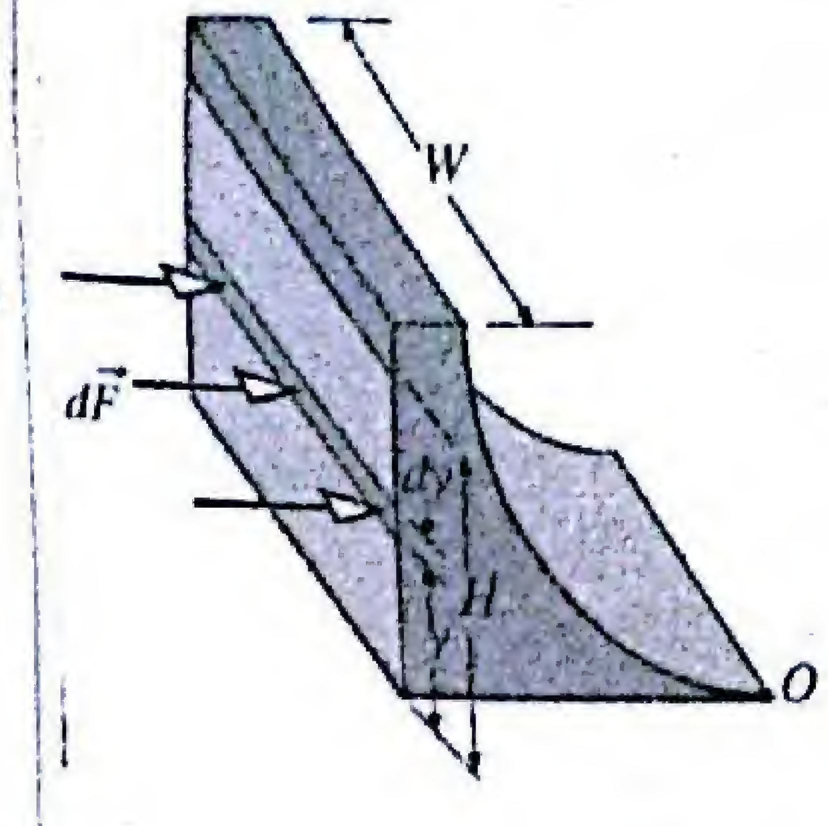
b) Halle la fuerza horizontal resultante que ejerce el agua sobre la pared.

c) Determine el torque de esta fuerza en torno a una línea que pase por O en la base del dique.

d) ¿Cuál es la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua?



Solución: a) La presión o fuerza por unidad de área que ejerce el fluido va aumentando con la profundidad, es por ello que el espesor del muro debe ser incrementado gradualmente para evitar que colapse.



b) Considere una franja de pared de espesor dy a la altura y. El área de la franja es: $dA = Wdy$ y la fuerza que ejerce el agua a la profundidad $(H - y)$ es:

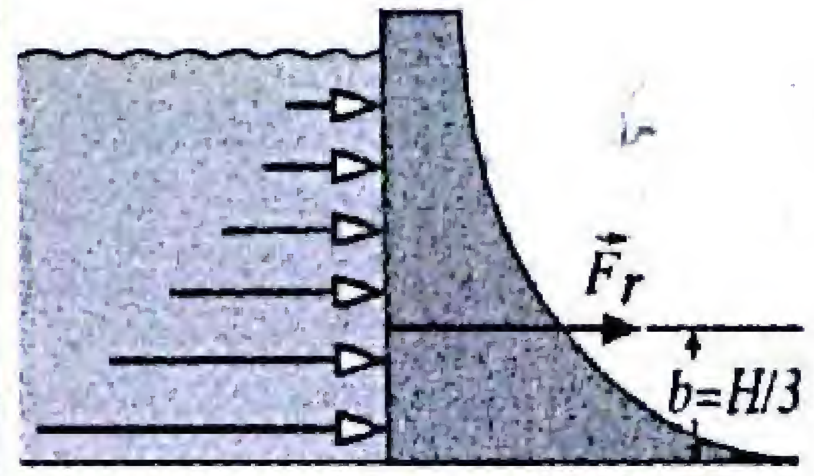
$$dF = P(y)dA = \rho g(H - y)Wdy$$

Por tanto, la fuerza total resultante sobre la pared es:

$$F_r = \rho g\int_0^H W(H - y)dy = \rho gW(Hy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^H = \frac{1}{2}\rho gWH^2$$

Este resultado podría haberse obtenido también si tomamos en cuenta que la presión varía linealmente con la profundidad de modo que, bastaría con multiplicar la presión media por el área:

$$F_r = P_m A = (\frac{\rho gH}{2})(WH) = \frac{1}{2}\rho gWH^2$$



c) El torque ejercido sobre la tira de espesor dy a la altura y es:

$$d\tau = ydF$$

y el torque total sobre la pared es:

$$\tau_r = \int_0^H ydF = \int_0^H y\rho g(H - y)Wdy = \rho gW(H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})\Big|_0^H$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\tau_r = \frac{1}{6}\rho gWH^3$$

d) Si el torque es $\tau_r = bF_r$, entonces el brazo de palanca efectivo de la fuerza con respecto a la base es:

$$b = \frac{\tau_r}{F_r} = \frac{\rho gWH^3/6}{\rho gWH^2/2} = \frac{1}{3}H$$

Este punto se denomina centro de presión.

Respuesta:

b) $F_r = \frac{1}{2}\rho gWH^2$

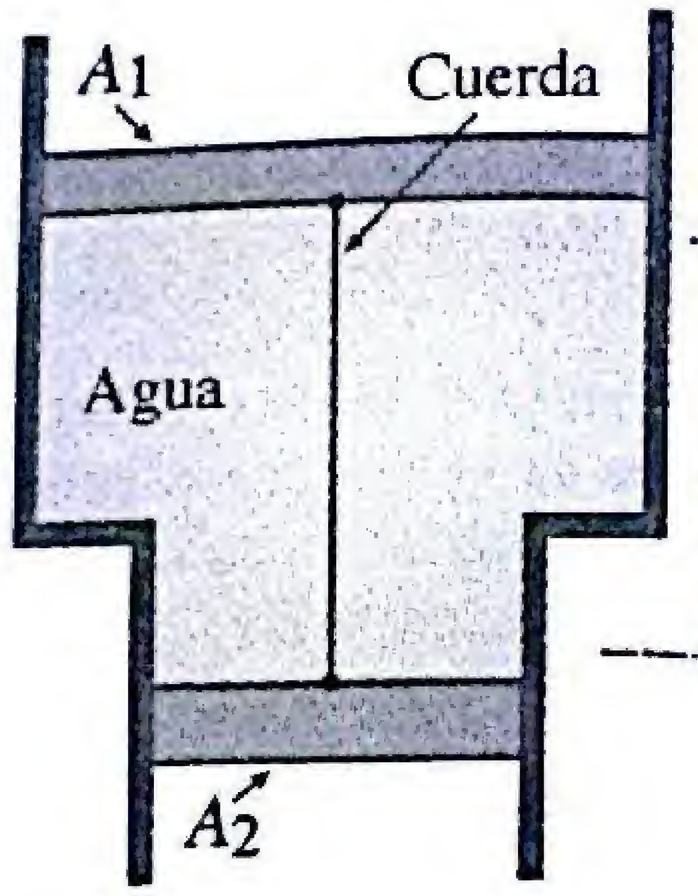
c) $\tau_r = \frac{1}{6}\rho gWH^3$

d) $b = \frac{1}{3}H$ de la base

PR-1.28. *Tensión de la cuerda entre dos émbolos*

Un recipiente está constituido por dos secciones cilíndricas en las cuales hay émbolos ligeros de áreas A_1 y A_2 respectivamente, con $A_2 < A_1$. Los émbolos están unidos entre sí por una cuerda inextensible de longitud L. El espacio entre los émbolos está lleno de agua. ¿Cuál será la tensión a que está sometida la cuerda?

Solución: Si P es la presión que ejerce el agua sobre el émbolo superior, entonces sobre el émbolo inferior la presión será: $P + \rho g L$, donde ρ es la densidad del agua. La condición de equilibrio para el émbolo superior es:



$$\sum F_y = PA_1 - P_0 A_1 - T = 0$$

Para el émbolo inferior:

$$\sum F_y = P_0 A_2 + T - (P + \rho g L) A_2 = 0$$

Donde P_0 es la presión atmosférica y T la tensión de la cuerda. Despejando $(P - P_0)$ de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda se obtiene:

$$T = (P - P_0) A_2 + \rho g L A_2$$

$$T = T\frac{A_2}{A_1} + \rho g L A_2$$

Despejando, se obtiene la tensión de la cuerda:

$$T = \frac{\rho g L A_1 A_2}{A_1 - A_2}$$

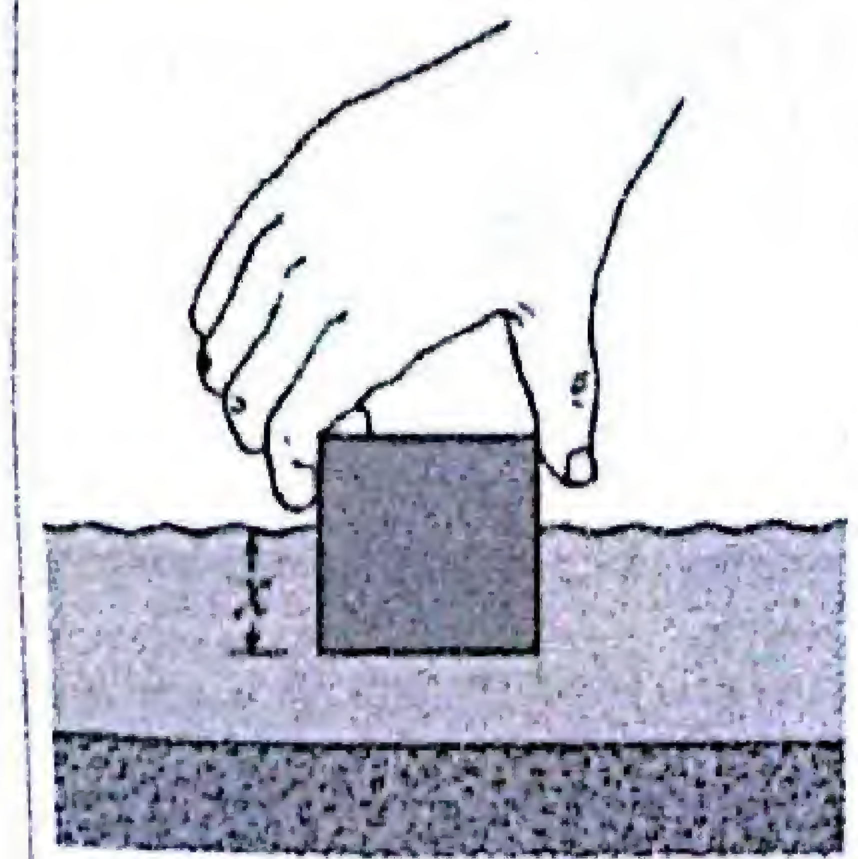
Respuesta:

$$\boxed{T = \frac{\rho g L A_1 A_2}{A_1 - A_2}}$$

PR-1.29. *Trabajo para extraer un cubo dentro del agua*

Un bloque cúbico de lado L y de densidad ρ se encuentra sumergido en agua, de modo que la superficie libre del agua coincide con la cara superior del cubo. Determine el trabajo que hay que efectuar para levantar el cubo desde esta posición hasta que su cara inferior esté al ras del nivel del agua

Solución: Cuando la arista está sumergida en una profundidad x, el trabajo elemental para elevar el cubo en una distancia infinitesimal dx es:



$$dW = Fdx = (Mg - F_e)dx = L^3 \rho g dx - L^2 \rho_a g x dx$$

Siendo ρ_a la densidad del agua. Por lo tanto el trabajo total para extraer el cubo será:

$$W = L^2 g \int_0^L (L\rho - \rho_a x)dx = L^2 g (L\rho x - \rho_a \frac{x^2}{2}\Big|_0^L$$

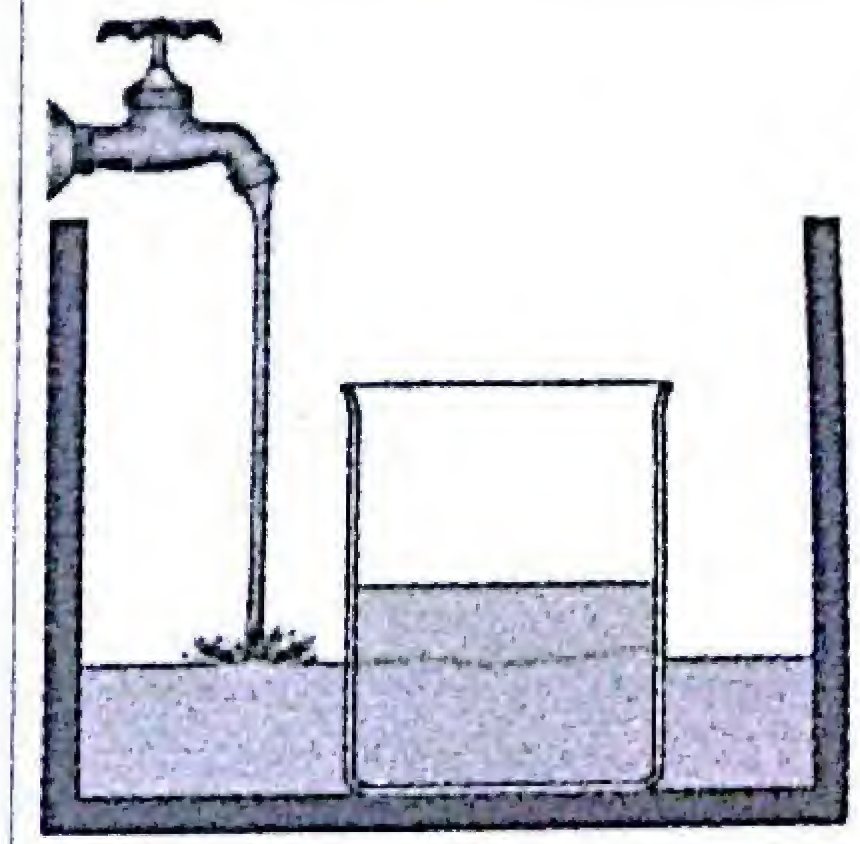
$$W = L^4 g (\rho - \frac{\rho_a}{2})$$

Respuesta:

$$\boxed{W = L^4 g(\rho - \frac{\rho_a}{2})}$$

PR-1.30. *Densidad del vidrio de un vaso*

Un vaso cilíndrico de vidrio de masa $M = 0{,}40$ kg y volumen interior $V = 500\ \text{cm}^3$, contiene una determinada cantidad de agua, se coloca en una pecera y luego se abre el grifo de la pecera. Experimentando, se encuentra que el vaso flotará cuando contenga agua hasta menos de la mitad de su volumen, pero se hundirá cuando contenga mas de la mitad de su volumen de agua. ¿Cuál es la densidad del vidrio de que está hecho el vaso?



Solución: Consideremos la situación crítica en que el vaso contiene 0,25 kg de agua y está a punto de hundirse. En este caso, el vaso desaloja un volumen total V de agua y la fuerza de empuje tiene el mismo valor que la fuerza del peso del vidrio mas el del agua:

$$\rho_a V g = [M_a + M_v]g$$

$$V' = \frac{M_a + M_v}{\rho_a} = \frac{0{,}4\text{kg} + 0{,}25\text{kg}}{1000\text{kg/m}^3} = 6{,}5\text{x}10^{-4}\text{m}^3 = 650\text{cm}^3$$

El volumen del material del vidrio es la diferencia de volúmenes:

$$V_v = V' - V = 650\text{cm}^3 - 500\text{cm}^3 = 150\text{cm}^3$$

Por lo tanto la densidad del vidrio es:

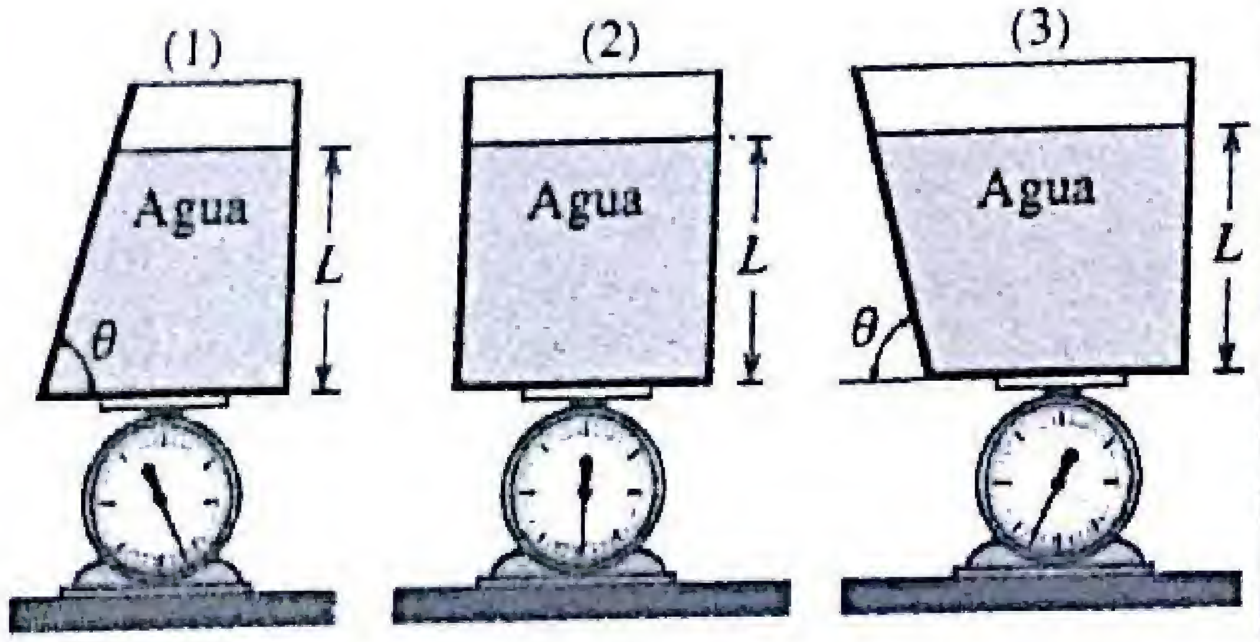
$$\rho_v = \frac{M_v}{V_v} = \frac{400\text{g}}{150\text{cm}^3} = 2{,}67\,g/\text{cm}^3 = 2670\text{kg/m}^3$$

Respuesta:

$\boxed{\rho_v = 2670\text{kg/m}^3}$

PR-1.31. *Paradoja hidrostática*

La Paradoja hidrostática de Stevin (1548-1620) plantea que la fuerza debido a la presión de un fluido en el fondo de un recipiente puede ser distinta que el propio peso del fluido. Considere los tres recipientes mostrados, que tienen todos igual base cuadrada de arista $L = 10$ cm.



Los recipientes (1) y (3) tienen una pared inclinada a un ángulo $\theta = 60°$. El del medio (Fig. 2) tiene sus cuatro paredes verticales. Suponga que las masas de los tres recipientes son despreciables y que están llenos de agua hasta una altura $L = 10$ cm. Determine:

a) La fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del recipiente.

b) La lectura de la báscula

c) ¿Por qué en los casos (1) y (3) la fuerza sobre el fondo del recipiente no coincide con la lectura de la báscula?

Solución: a) Como el área de la base es la misma para los tres recipientes y la presión ejercida sobre el fondo del recipiente depende únicamente de la altura del líquido ($P = \rho g L$), la fuerza sobre el fondo del recipiente resulta la misma en los tres casos:

$$F = PA = (\rho g L)L^2 = \rho g L^3$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = (1000\text{kg/m}^3)(9{,}80\text{m/s}^2)(0{,}1\text{m})^3 = 9{,}8\text{N}$$

b) Como la masa de los recipientes son despreciables, en cada caso la báscula registra el peso del agua en el recipiente. Para el recipiente (1) el peso es:

$$P_1 = m_1 g = \rho V_1 g = \rho g (L^3 - L\frac{1}{2}\frac{L}{tg\theta}xL) = \rho g L^3 (1 - \frac{1}{2tg\theta})$$

$$P_1 = (1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(9{,}80\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0{,}1\text{m})^3(1 - \frac{1}{2tg60^0}) = 6{,}97\text{N}$$

Para el recipiente (2) el peso es:

$$P_2 = m_2 g = \rho V_2 g = \rho L^3 g$$

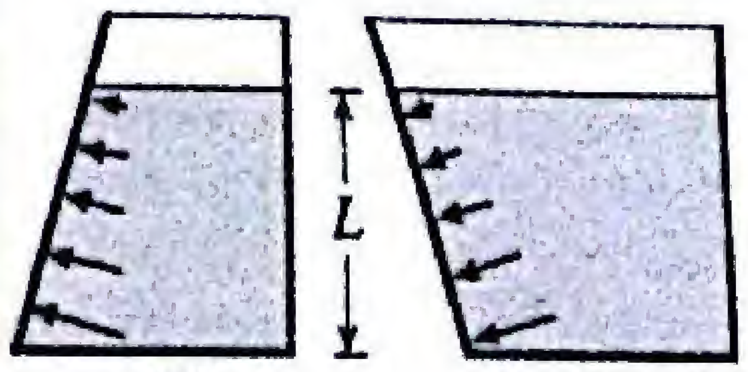
$$P_2 = (1000\text{kg/m}^3)(0{,}1\text{m})^3(9{,}80\text{m/s}^2) = 9{,}8\text{N}$$

Para el recipiente (3) el peso es:

$$P_3 = m_3 g = \rho V_3 g = \rho g [L^3 + L(\frac{1}{2}\frac{L}{tg\theta}xL)] = \rho g L^3 (1 + \frac{1}{2tg\theta})$$

$$P_3 = (1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(9{,}80\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0{,}1\text{m})^3(1 + \frac{1}{2tg60^0}) = 12{,}6\text{N}$$

c) En los casos (1) y (3) la fuerza sobre el fondo del recipiente no coincide con la lectura de la báscula porque hay que tomar en cuenta que el agua también ejerce una fuerza normal sobre la pared inclinada. Para calcular esta fuerza notamos que la presión varía linealmente con la profundidad desde cero hasta $\rho g L$. La presión media es:



$$\overline{P} = \frac{0 + \rho g L}{2}$$

La fuerza con que el agua actúa sobre la pared inclinada es:

$$F = \overline{P}A = \frac{\rho g L}{2}(\frac{L}{sen\theta})L$$

La componente vertical de esta fuerza es:

$$F_y = F\cos\theta = \frac{\rho g L^3}{2}(\frac{\cos\theta}{sen\theta}) = \frac{\rho g L^3}{2tg\theta}$$

En el caso (1) la fuerza sobre la pared inclinada tiene su componente vertical *hacia arriba*, mientras que en el caso (3), tiene su componente vertical *hacia abajo*.

Respuesta:

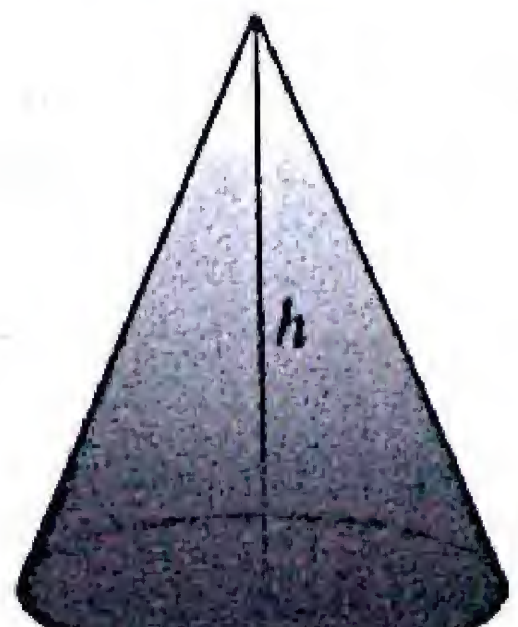
a) Las fuerzas son iguales: $F_1 = F_2 = F_3 = 9{,}8\text{N}$
b Lecturas de la báscula: $P_1 = 6{,}97\text{N}$, $P_2 = 9{,}8\text{N}$, $P_3 = 12{,}6\text{N}$

PR-1.32. *Paradoja en un recipiente cónico*

Considere un recipiente cónico de altura h y cuya base tiene un radio R. Suponga que el recipiente es de masa despreciable y está completamente lleno de agua.

a) Calcule la fuerza debida a la presión que ejerce el agua sobre la base del recipiente y compruebe que resulta ser justamente tres veces el peso del agua en el recipiente.

b) ¿Cómo se podría explicar esta aparente contradicción?



Solución: a) Por geometría sabemos que el volumen de un recipiente cónico es un tercio del producto del área de su base por su altura. Por lo tanto, el peso del fluido contenido de densidad ρ es:

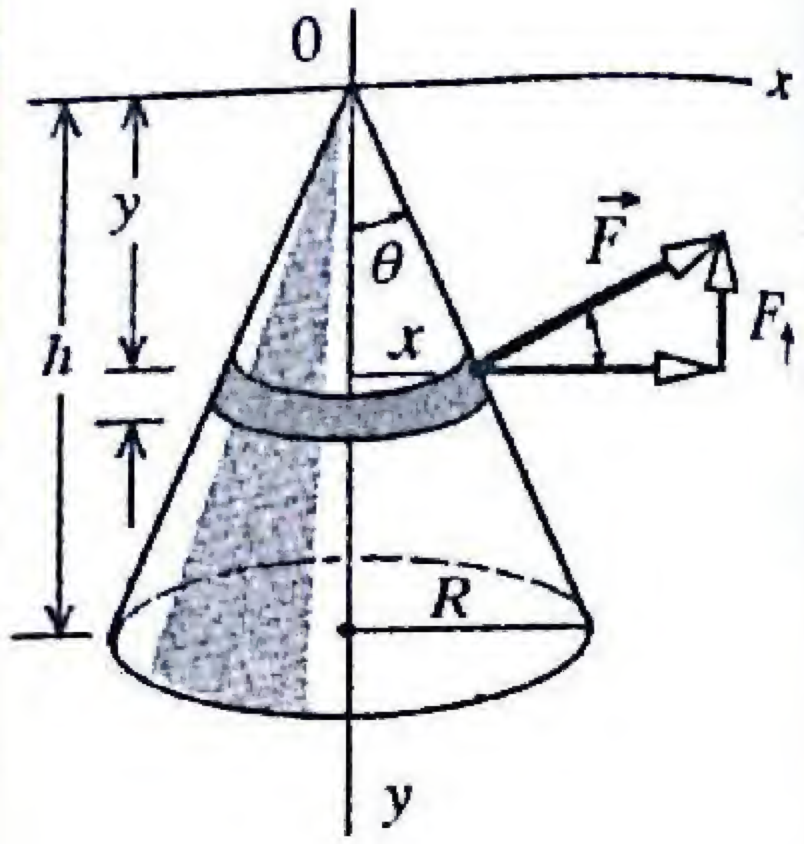
$$Mg = \rho Vg = \rho(\frac{1}{3}\pi R^2 h)g$$

Todos los puntos en la base del recipiente están a igual presión y la fuerza ejercida sobre ésta es debida a la presión del fluido de altura h es:

$$F_\downarrow = \text{Presión.Area} = (\rho hg)\pi R^2$$

Vemos que esta fuerza es justamente tres veces el peso del líquido:

$$F_\downarrow = 3Mg$$



b) Este resultado aparentemente paradójico puede ser explicado si tomamos en cuenta que el fluido también ejerce una fuerza sobre la pared inclinada y empuja al recipiente hacia arriba. En efecto, vamos a demostrar que si colocamos el recipiente de masa despreciable sobre una báscula, ésta debería registrar el peso Mg del líquido. La fuerza que actúa perpendicularmente a la pared del recipiente tiene una componente vertical:

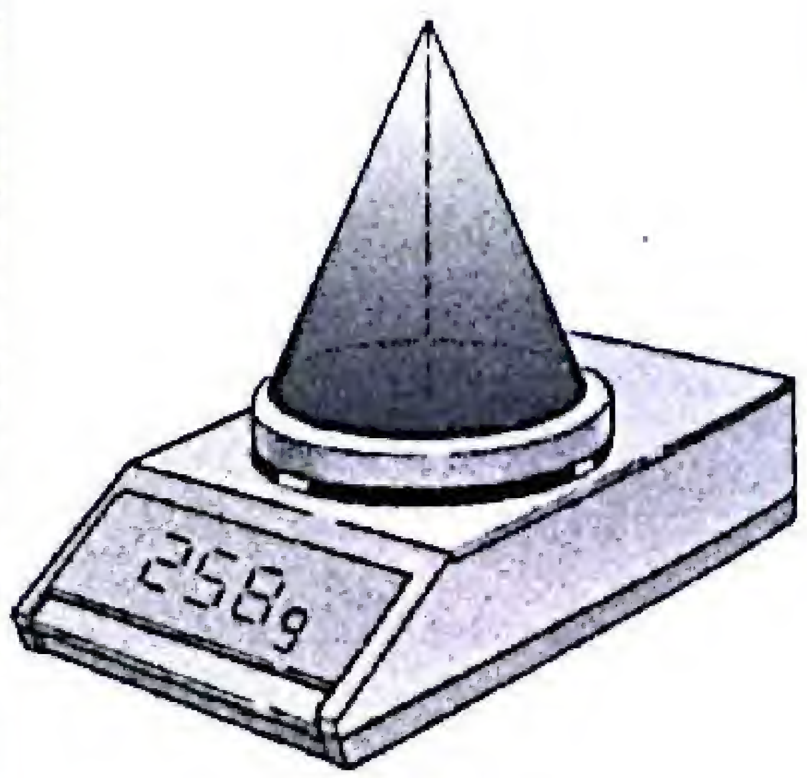
$$dF_\uparrow = P(y)dA sen\theta = (\rho gy)(2\pi x\frac{dx}{sen\theta})sen\theta$$

Tomando en cuenta que:

$$tg\theta = R/h = x/y, \quad \Rightarrow \quad y = (\frac{x}{R})h$$

La fuerza con que el fluido empuja al recipiente hacia arriba es:

$$F_\uparrow = 2\pi\rho gh\int_0^R \frac{x^2}{R}dx = \frac{2\pi\rho gh}{R}\frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^2 h\rho g$$



De modo que si colocamos el recipiente completamente lleno con agua sobre una báscula, la lectura sería:

$$F_\downarrow - F_\uparrow = \pi R^2 h\rho g - \frac{2}{3}\pi R^2 h\rho g = \frac{1}{3}\pi R^2 h\rho g = Mg$$

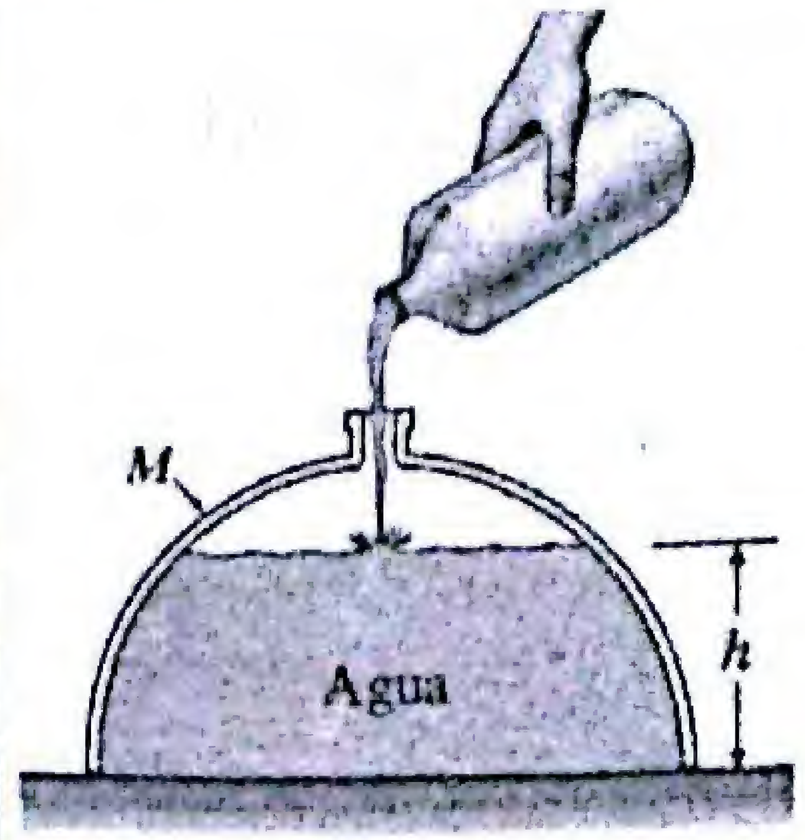
Es decir, no habría ninguna contradicción porque la báscula lo que registra es el peso del líquido.

Respuesta:

a) $F_\downarrow = 3Mg$
b) $F_\downarrow - F_\uparrow = Mg$

PR-1.33. *Echando agua hasta que escurra por debajo*

Un recipiente de vidrio de masa M tiene la forma de semiesfera de radio R. El recipiente no tiene tapa ni fondo y se mantiene apoyado sobre una superficie horizontal que lo sella herméticamente. Se le va echando agua por el agujero de la parte superior hasta que el nivel del agua alcanza una altura h en que escurre por debajo y la semiesfera se despega del plano. Determine esta altura h.

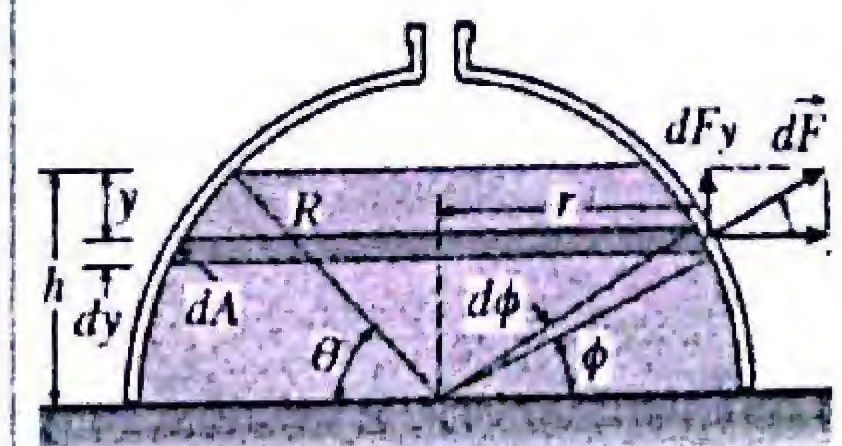


Solución: a) Para calcular la fuerza vertical que ejerce el agua sobre la pared curva del recipiente, tomamos una banda circular de radio $r = Rcos\phi$ y de anchura $Rd\phi$. El diferencial de área es:

$$dA = (2\pi r)(Rd\phi) = 2\pi R^2 cos\phi d\phi.$$

La presión ejercida por el agua de densidad ρ a la profundidad y es:

$$p(y) = \rho gy = \rho g(h - Rsen\phi)$$



De modo que la fuerza aplicada perpendicular a la tira es:

$$dF = pdA = 2\pi R^2\rho g(h - Rsen\phi)(cos\phi d\phi)$$

La componente vertical de esta fuerza es: $dF_y = dFsen\phi$, y la fuerza total que empuja el recipiente hacia arriba será:

$$F_y = \int dFsen\phi = 2\pi R^2\rho g\int_0^\theta (h - Rsen\phi)cos\phi sen\phi d\phi$$

$$F_y = 2\pi R^2\rho g[h\int_0^\theta cos\phi sen\phi d\phi - R\int_0^\theta cos\phi sen^2\phi d\phi]$$

$$F_y = 2\pi R^2\rho g[h\frac{sen^2\theta}{2} - R\frac{sen^3\theta}{3}]$$

Tomando en cuenta que: $h = Rsen\theta$, la fuerza es:

$$F_y = \frac{1}{3}\pi R^3\rho g sen^3\theta = \frac{1}{3}\pi h^3\rho g$$

El valor del nivel h para el cual esta fuerza equilibra al peso Mg y luego el recipiente se despega es:

$$\frac{1}{3}\pi h^3 \rho g = Mg \qquad \Rightarrow \qquad h = \left[\frac{3M}{\pi\rho}\right]^{1/3}$$

El resultado no depende del valor del radio R, pero este debe ser lo suficientemente grande para garantizar un volumen de agua tal que el recipiente se despegue antes de llenarse.

Respuesta:

$$\boxed{h = \left[\frac{3M}{\pi\rho}\right]^{1/3}}$$

No depende de R

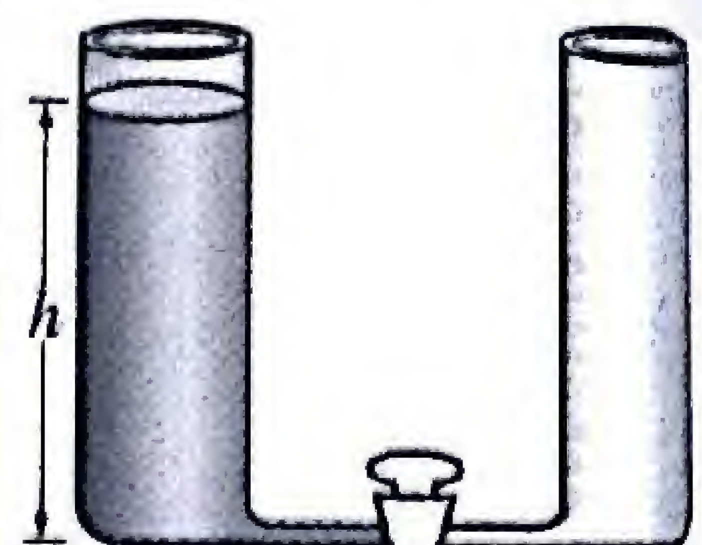
PR-1.34. *Paradoja de los vasos comunicantes*

Dos recipientes idénticos están unidos en el fondo por un tubo estrecho provisto de una llave. Al principio el recipiente de la izquierda contiene líquido hasta una altura h. Luego se abre la llave, y el líquido fluye del recipiente de la izquierda al de la derecha. Al final, el líquido alcanza igual nivel $h/2$ en ambos recipientes.

a) Calcule la energía potencial del sistema en el estado final y demuestre que su valor es la mitad de la energía potencial inicial.

b) Explique qué se hizo la otra mitad de la energía.

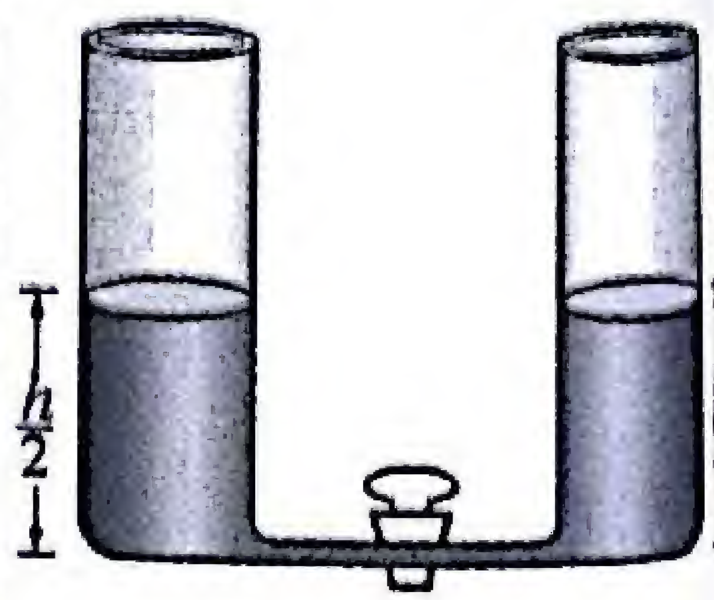
Solución: a) En el estado inicial el centro de gravedad del líquido está a la mitad de su altura y, por lo tanto la energía potencial es igual su peso mg multiplicado por $h/2$:



$$U_i = (mg)(\frac{h}{2}) = \frac{mgh}{2}$$

En el estado final, la energía potencial es la suma de las energías en los dos vasos:

$$U_f = (\frac{mg}{2})\frac{h}{4} + (\frac{mg}{2})\frac{h}{4} = \frac{mgh}{4} = \frac{1}{2}U_i$$



Hemos encontrado que la energía potencial final es justo la mitad de la energía potencial inicial. ¿Pero, dónde fue a parar la otra mitad de la energía?

b) Vamos a suponer que el líquido haya pasado al estado final del nivel $h/2$, en forma cuasi estática, es decir, en reposo todo el tiempo con cero energía cinética, y sin haber realizado trabajo alguno sobre otros cuerpos.

En este caso, podemos decir que la mitad de la energía inicial que falta se ha convertido enteramente en calor desprendido por fricción interna entre las diferentes capas del líquido. Esto significa que en el estado final, la temperatura del líquido sería mayor.

En el caso de que el líquido fuese ideal, no habría interacción entre el líquido y las paredes del recipiente ni tampoco habría fricción entre las capas del propio líquido, entonces cuando abrimos la llave, el líquido quedaría con un movimiento oscilatorio entre los dos recipientes. En particular, el líquido estaría momentáneamente en reposo (cero energía cinética) únicamente en aquellos instantes en que alcanza el nivel h en cada uno de los dos recipientes (máxima energía potencial).

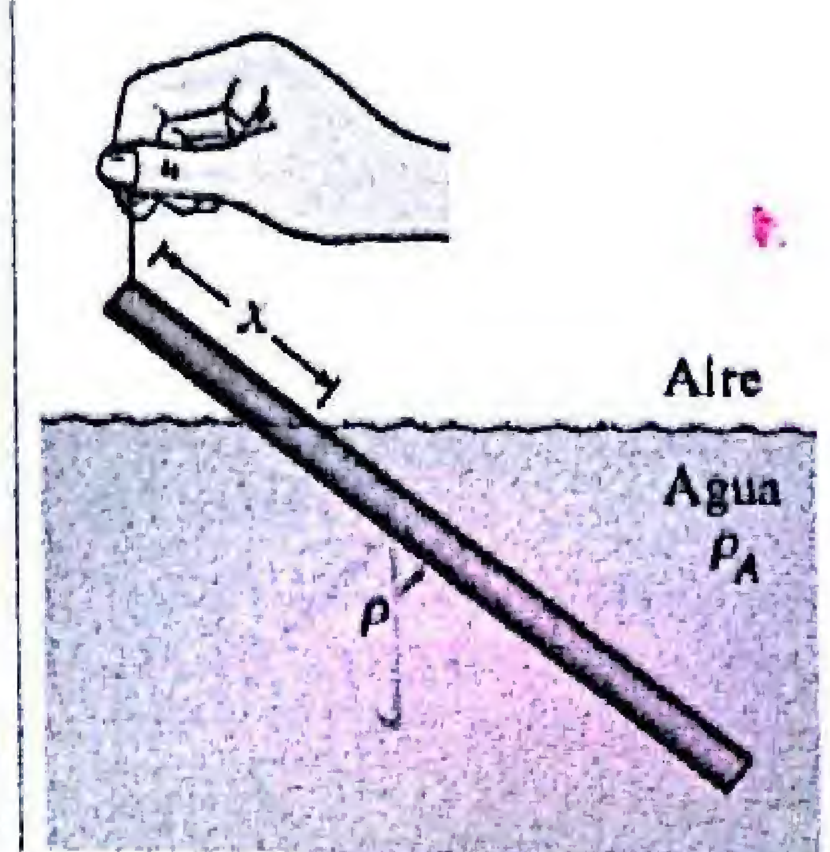
Respuesta:

$$\boxed{U_i = \frac{mgh}{2} \qquad U_f = \frac{mgh}{4}}$$

PR-1.35. *Palo de madera flotando en forma inclinada*

Un palo delgado de madera de longitud L y densidad ρ está sujeto por un extremo mediante un hilo vertical. El otro extremo del palo se encuentra sumergido en el agua. En equilibrio, el palo flota en forma inclinada y con una porción de longitud x que permanece fuera del agua. ¿Cuál es la densidad de la madera?

Solución: La superficie del agua divide el palo en dos partes. La parte que queda fuera en el aire, de longitud x tiene un peso $M_1 g = \rho x A g$; y la parte sumergida en el agua tiene un peso $M_2 g = \rho(L-x)Ag$, siendo A el área de la sección transversal del palo y su densidad $\rho = M/AL$. La fuerza de empuje actúa en el centro geométrico de la parte sumergida y su valor es:



$$F_e = \rho_A V_2 g = \rho_A(L-x)Ag$$

Siendo ρ_A la densidad del agua. En equilibrio, la fuerza neta sobre el palo es cero y podemos tomar los torques con respecto a cualquier punto. Como la tensión T del hilo es desconocida, conviene escoger el punto de suspensión, P, para el cálculo de los torques. Los brazos de las fuerzas son las distancias horizontales desde el punto P a sus respectivos puntos de aplicación. La condición de equilibrio rotacional es :

$$\sum \tau_P = M_1 g(\frac{x}{2}\cos\theta) + M_2 g(x + \frac{L-x}{2})\cos\theta$$

$$-F_e(x + \frac{L-x}{2})\cos\theta = 0$$

Reemplazando la expresión para la fuerza de empuje F_e y para las masas, M_1 y M_2, se tiene:

$$\rho x A g(\frac{x}{2}\cos\theta) + \rho(L-x)Ag(x + \frac{L-x}{2})\cos\theta$$

$$-\rho_A(L-x)Ag(x + \frac{L-x}{2})\cos\theta = 0$$

Simplificando, se obtiene:

$$\rho x^2 + \rho(L-x)(L+x) - \rho_A(L-x)(L+x) = 0$$

$$\rho x^2 + \rho(L^2 - x^2) - \rho_A(L^2 - x^2) = 0$$

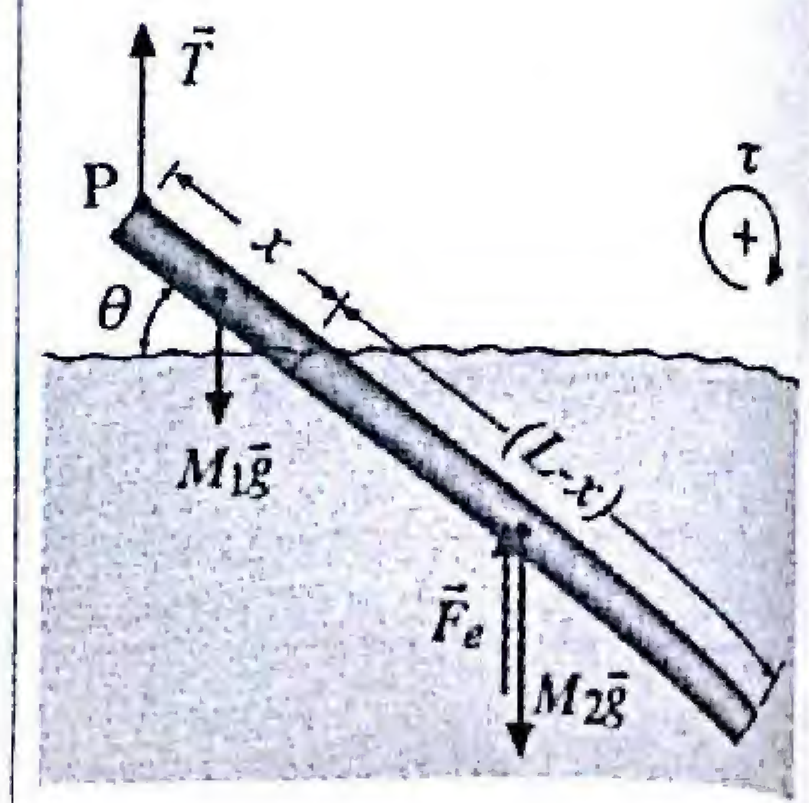
Finalmente despejando, encontramos la densidad ρ de la madera:

$$\rho L^2 = \rho_A(L^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = \rho_A(1 - \frac{x^2}{L^2})$$

Observe que en los casos límite esta expresión, predice que:

Si $x = 0$ entonces $\rho = \rho_A$

Si $x = L$ entonces $\rho = 0$



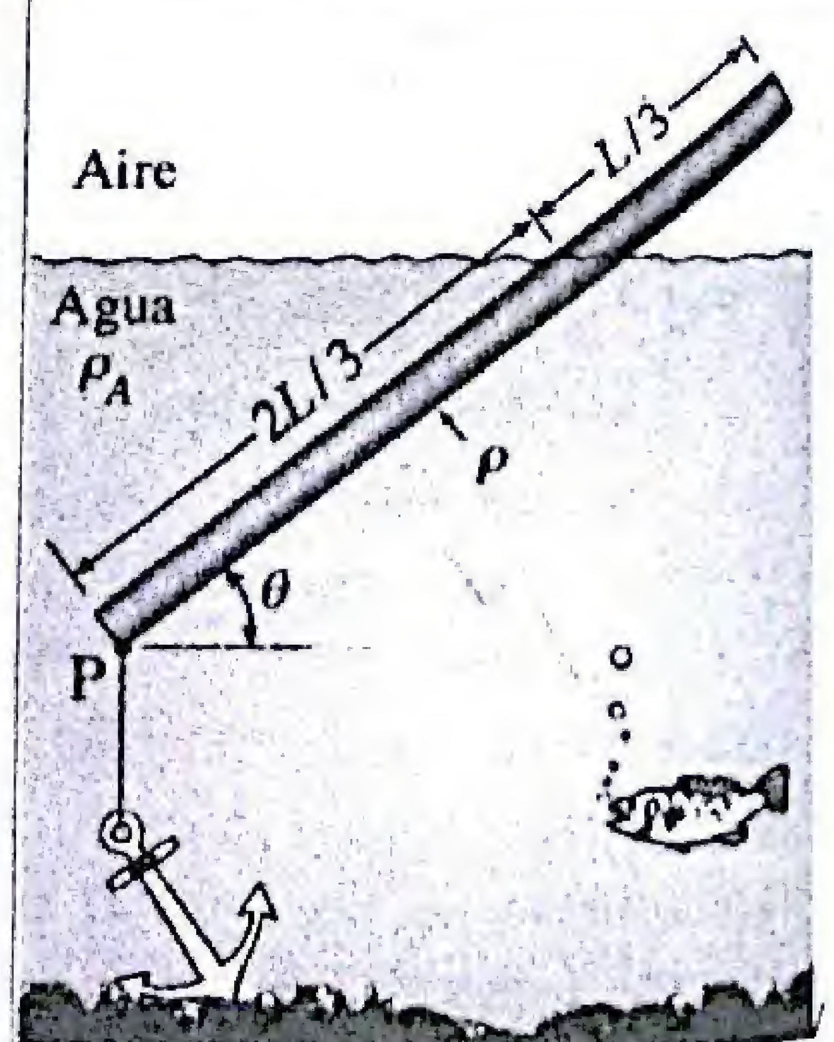
Respuesta:

$$\boxed{\rho(x) = \rho_A(1 - \frac{x^2}{L^2})}$$

PR-1.36. *Palo de madera anclado en el agua*

Un palo de madera largo y delgado, está anclado desde el fondo del agua, mediante un hilo vertical. En equilibrio, el palo flota de forma tal que forma un ángulo θ con la horizontal y dos tercios de su longitud total está sumergida en el agua. Si la densidad del agua es $\rho_A = 1000$ kg/m^3, ¿cuál es la densidad de la madera?

$L - \frac{L}{3} = \frac{2L}{3}$



Solución: Si ρ es la densidad de la madera, el peso del palo es: $Mg = (\rho LA)g$, siendo A su área transversal. Esta fuerza actúa sobre su centro geométrico, a una distancia horizontal del punto P:

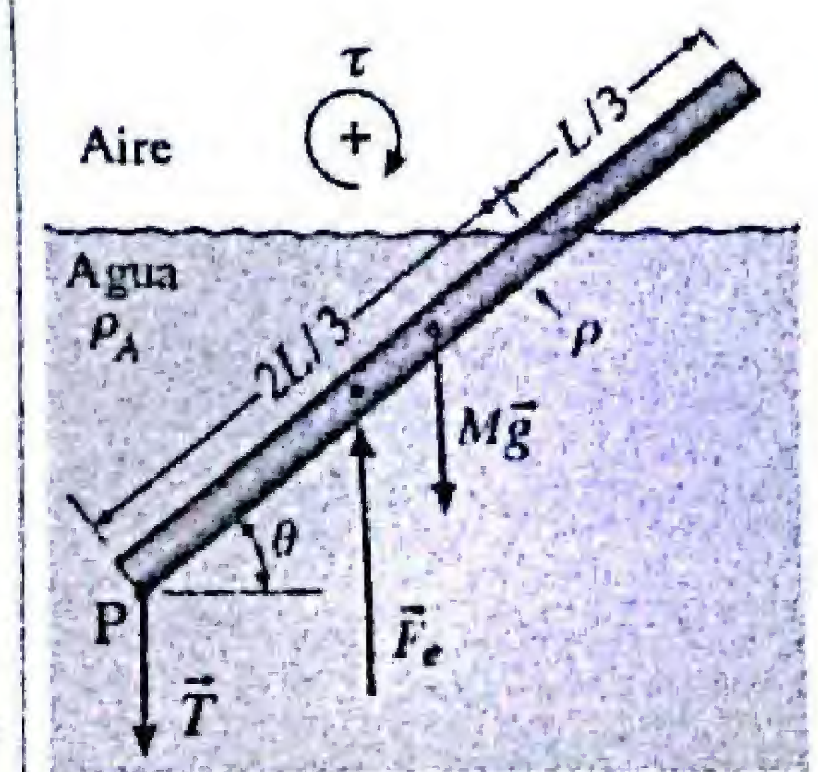
$$x_g = \frac{L}{2}\cos\theta$$

Si ρ_A es la densidad del agua, la fuerza de empuje sobre el palo es:

$$F_e = \rho_A V g = \rho_A(2L/3)Ag$$

Esta fuerza actúa sobre el centro geométrico de la parte sumergida, a una distancia horizontal del punto P:

$$x_e = \frac{1}{2}(\frac{2L}{3}\cos\theta)$$



Tomando torques respecto al punto P, en la condición de equilibrio se cumple:

$$\sum \tau_P = Mgx_g - F_e x_e = 0$$

$$(\rho LAg)(\frac{L}{2}\cos\theta) = (\rho_A \frac{2L}{3}Ag)(\frac{1}{2}\frac{2L}{3}\cos\theta)$$

Simplificando, se obtiene la densidad de la madera:

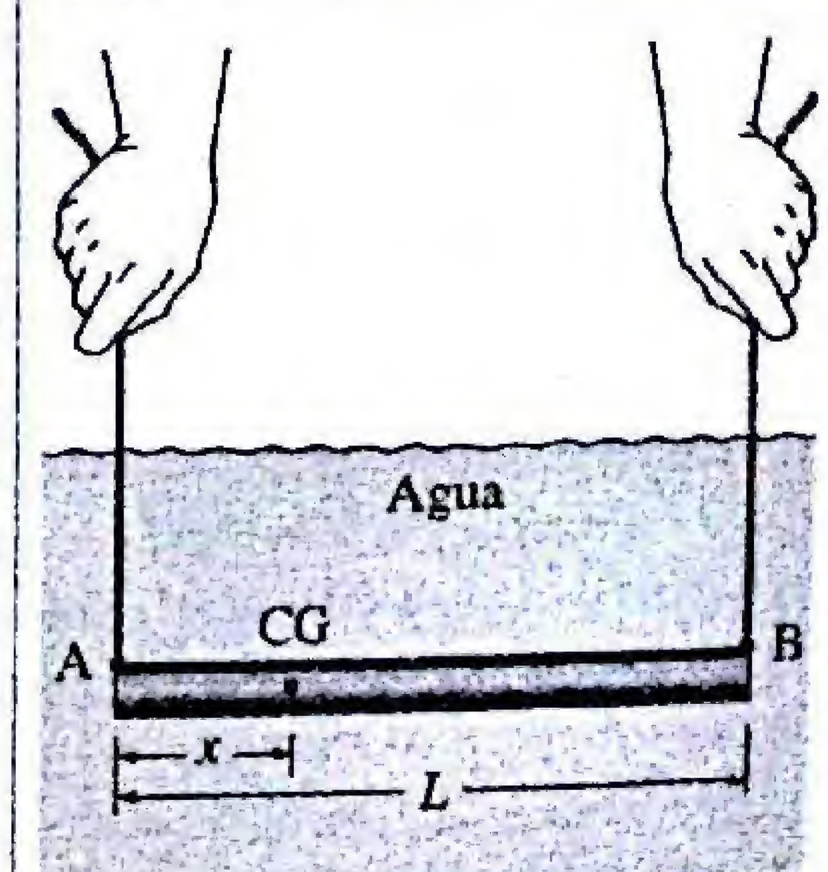
$$\rho = \frac{4}{9}\rho_A = \frac{4}{9}(1000\,kg/m^3) = 444\,kg/m^3$$

Respuesta:

$$\boxed{\rho = \frac{4}{9}\rho_A = 444 \text{ kg/m}^3}$$

PR-1.37. *Sosteniendo sumergida barra no uniforme*

Una barra metálica de longitud L = 100 cm y sección transversal uniforme de área A = 6 cm^2, tiene una masa M = 2 kg está sumergida en agua, sostenida por sus extremos mediante dos cuerdas. Debido a que su densidad no es uniforme, el centro de gravedad de la barra está a una distancia x = 25 cm del extremo A. Determine las fuerzas con que deben sostenerse las cuerdas para que la barra quede sumergida en posición horizontal.



Solución: El volumen de la barra es:

$$V = AL = (6\text{cm})(100\text{cm}) = 600\text{cm}^3 = 6\text{x}10^{-4}\text{m}^3$$

La fuerza de empuje es igual al peso de la porción de agua desalojada:

$$F_e = \rho_a V g = (1000\text{kg/m}^3)(6\text{x}10^{-4}\text{m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2) = 5{,}88\text{N}$$

El valor del peso de la barra es:

$$Mg = (2\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 19{,}6\text{N}$$

Tomando torques respecto al extremo A de la barra, en la condición de equilibrio se cumple:

$$\sum \tau_A = Mgx - F_e\frac{L}{2} - T_B L = 0$$

La tensión en el hilo B es:

$$T_B = \frac{Mgx - F_e L/2}{L}$$

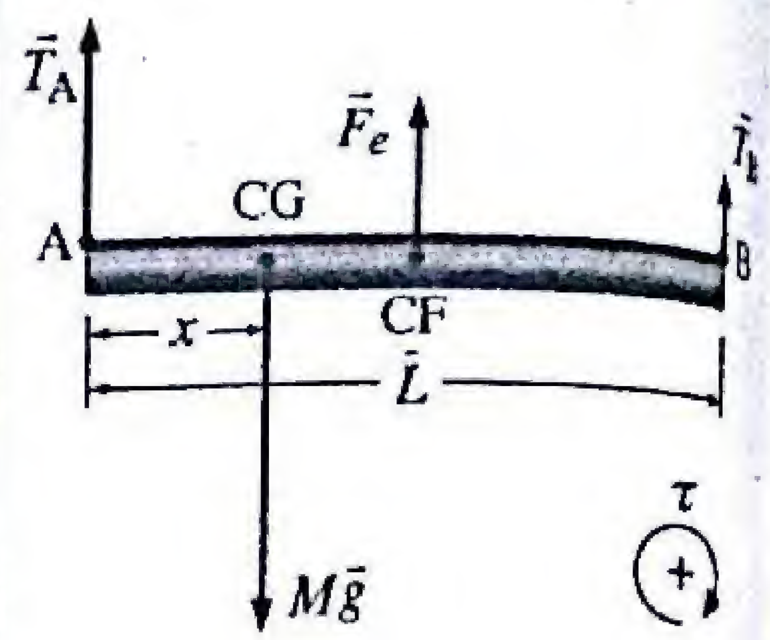
$$T_B = \frac{(19{,}6\text{N})(0{,}25\text{m}) - (5{,}88\text{N})(0{,}5\text{m})}{1\text{m}} = 1{,}96\text{N}$$

Aplicando la ecuación para el equilibrio vertical:

$$\sum F_y = T_A + T_B + F_e - Mg = 0$$

Despejando, encontramos la tensión del hilo A:

$$T_A = Mg - F_e - T_B = 19{,}6\text{N} - 5{,}88\text{N} - 1{,}96\text{N} = 11{,}8\text{N}$$



Respuesta:

$T_A = 11{,}8\text{N}$
$T_B = 1{,}96\text{N}$

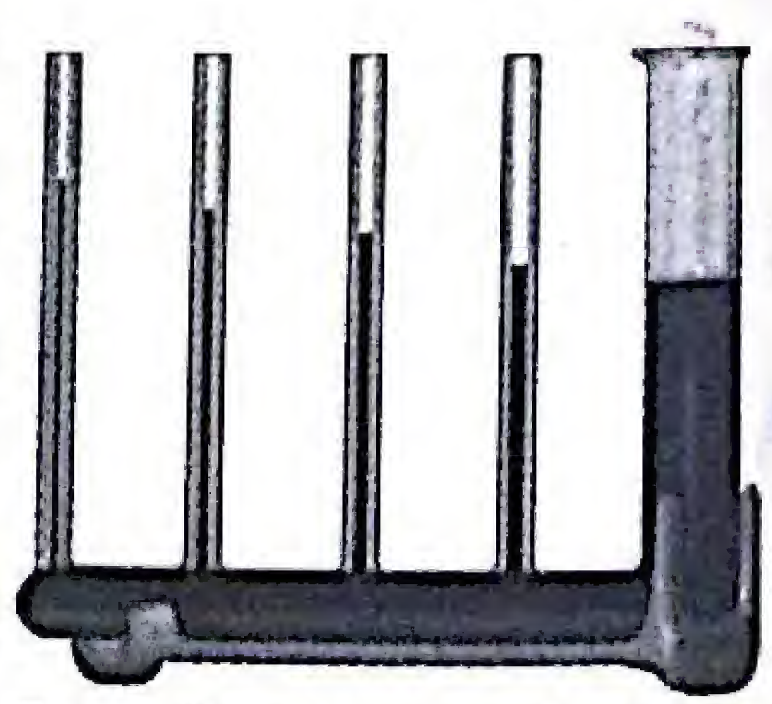
PR-1.38. *Elevación de un líquido por la acción capilar*

Los líquidos tienden a elevarse por los tubos delgados (capilares), debido tanto a la adhesión (humectación) como a la tensión superficial. La adhesión atrae las moléculas de agua a los lados del tubo mientras que la tensión superficial empuja esta columna hacia arriba.

a) Si γ es la tensión superficial del líquido y ϕ el ángulo de contacto entre la superficie del líquido de densidad ρ y el tubo de vidrio, halle la elevación en un tubo de radio r.

b) ¿Qué tan alto se elevará el agua a 20 °C en un tubo de radio $r = 0{,}5$ mm, sabiendo que para el agua y el vidrio el ángulo de contacto es $\phi = 0°$?

c) ¿Qué sucede si el líquido no moja el tubo de vidrio?



Demo: Elevaciones del líquido para tubos de vidrio de distintos radios

Solución: En la superficie del líquido habrá contacto con la pared de vidrio del tubo en todos los puntos de una circunferencia de radio r, por lo tanto, la fuerza de la tensión superficial del líquido es:

$$F = \gamma L = \gamma(2\pi r)$$

Esta fuerza apunta en una dirección formando un ángulo ϕ con la vertical y su componente vertical es:

$$F_y = F\cos\phi = \gamma(2\pi r)\cos\phi$$

El peso de la columna del líquido desde la superficie hasta la altura h es:

$$W = mg = \rho V g = \rho(\pi r^2 h)g$$

Aquí la presión atmosférica actúa sobre ambas superficies del líquido y por lo tanto no la tomamos en cuenta. En equilibrio, la fuerza de la tensión superficial es igual al peso de la columna:

$$\gamma(2\pi r)\cos\phi = \rho(\pi r^2 h)g$$

Despejando, se obtiene la expresión para la elevación h:

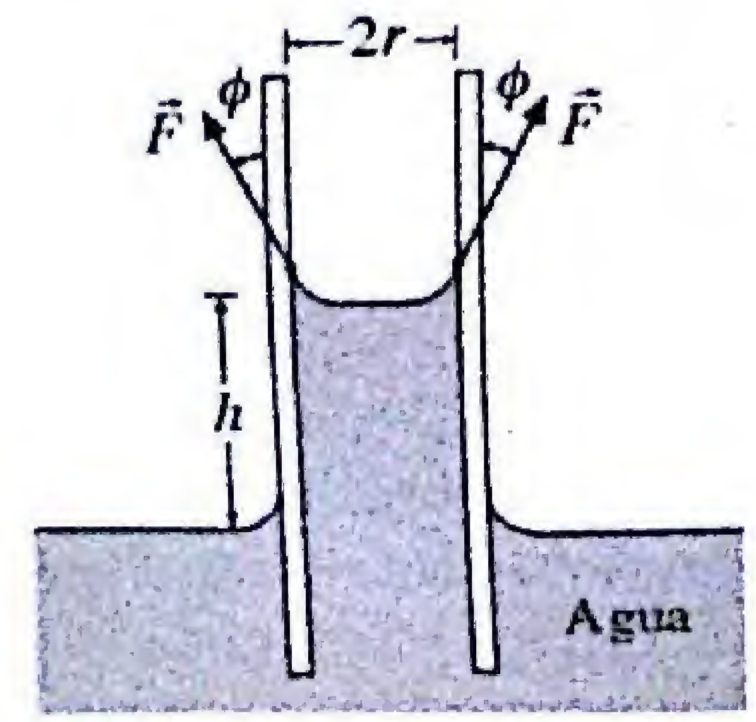
$$h = \frac{2\gamma\cos\phi}{\rho g r}$$

Se observa que, la altura h a la cual se eleva el líquido por el tubo capilar es inversamente proporcional a su radio.

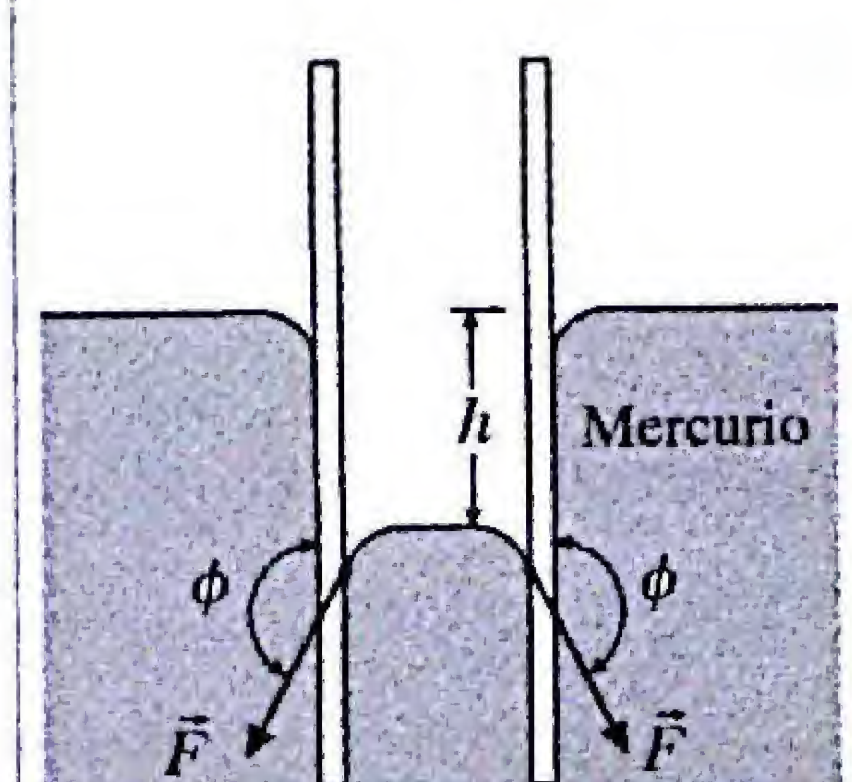
b) Sustituyendo los valores numéricos para el agua en la expresión anterior, se obtiene:

$$h = \frac{2(0{,}072\text{N/m})\cos 0°}{(1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(5\text{x}10^{-4}\text{m})} = 0{,}029\text{m}$$

c) En la situación en que el líquido no moja la superficie del tubo, podemos aplicar la expresión anterior, tomando en cuenta el hecho de que el ángulo ϕ es mayor que 90°. En este caso la altura h resulta negativa, es decir, en el tubo hay una depresión de la columna del líquido.



Agua a 20 °C: $\gamma = 0{,}072$ N/m
$\rho = 1000$ kg/m^3



Respuesta:

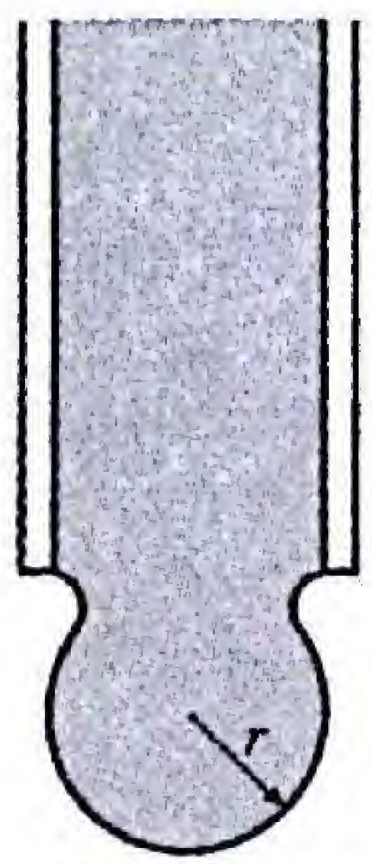
a) $h = \dfrac{2\gamma\cos\phi}{\rho g r}$
b) $h = 2{,}9$ cm
c) h es negativa

PR-1.39. *¿Cuántas gotas de aceite habrá que contar?*

Con una pipeta de vidrio se quiere transferir un volumen $V = 25\ \text{cm}^3$ de aceite cuya densidad es $\rho = 900\ \ \text{kg/m}^3$ dejándolo caer en gotas verticalmente. Si la tensión superficial es $\gamma = 0{,}032\ \ \text{N/m}$, ¿cuántas gotas habrá que contar?

Solución: Una gota se desprenderá del tubo en el instante en el que su peso Mg iguala a la fuerza de tensión superficial que la sostiene y la cual actúa a lo largo de la circunferencia de contacto con el tubo. Suponiendo que la gota es una esfera de radio r que se rompe justo en la boca del tubo, la fuerza de tensión superficial es:

$$F = \gamma L = \gamma(2\pi r)$$



Una gota al desprenderse del tubo

Por lo tanto:

$$Mg = (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho) g = 2\pi r \gamma$$

Despejando se obtiene el radio medio de la gota:

$$r = \sqrt{\frac{3\gamma}{2\rho g}} = \sqrt{\frac{3(0{,}032\text{N/m})}{2(900\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)}} = 2{,}33\text{x}10^{-3}\text{m}$$

Como el volumen de la gota es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, el número total de gotas en el volumen total V será:

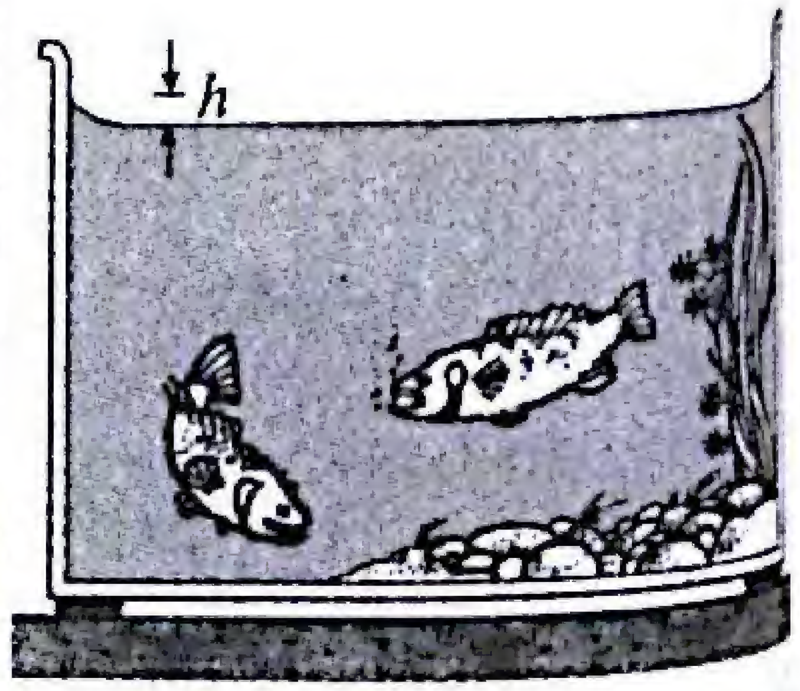
$$N = \frac{V}{v} = \frac{3V}{4\pi r^3} = \frac{3(25\text{cm}^3)}{4\pi(0{,}233\text{cm})^3} = 472\ \text{ gotas}$$

Respuesta:

472 gotas

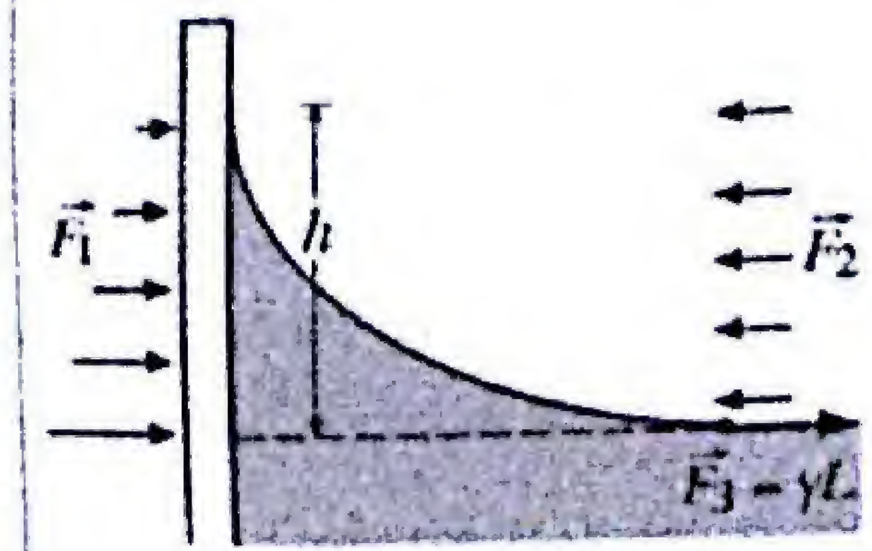
PR-1.40. *Altura del menisco en una pecera rectangular*

Considere una pecera de sección rectangular de ancho L, que contiene agua. Calcule la altura h del menisco que se forma entre la superficie del agua y el vidrio.



Solución: Consideremos las fuerzas horizontales que actúan a cada lado de la porción de agua del menisco de altura h. En el lado izquierdo la presión aumenta linealmente con la profundidad. La presión al nivel de la base, es la atmosférica externa P_0 y a la altura h, la presión es: $P = P_0 - \rho g h$. De modo que, el valor medio de la presión es:

$$\overline{P} = P_0 - \frac{1}{2}\rho g h$$



Luego la fuerza media ejercida por la pared del vidrio de ancho L y altura h es:

$$F_1 = \overline{P}A = (P_0 - \frac{1}{2}\rho g h)hL$$

Sobre la superficie curva del menisco actúa la presión atmosférica, de modo que la componente horizontal de la fuerza es:

$$F_2 = P_0 A = P_0 hL$$

Agua a 20 °C:
$\gamma = 0{,}072$ N/m
$\rho = 1000$ kg/m^3

Sobre el borde inferior del menisco actúa la tensión superficial ejercida por el resto del agua, que está aplicada sobre una línea recta de longitud L y la jala hacia la derecha:

$$F_3 = \gamma L$$

En reposo, la fuerza resultante sobre el volumen de agua del menisco es cero:

$$\sum F_x = F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$(P_0 - \frac{1}{2}\rho g h)hL - P_0 hL + \gamma L = 0$$

Después de simplificar, se obtiene la expresión para la altura h del menisco de agua que se forma:

$$-\frac{1}{2}\rho g h^2 + \gamma = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}}$$

$$h = \sqrt{\frac{2\text{x}0{,}072\text{N/m}}{(1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)}} = 3{,}83\text{x}10^{-3}\text{m}$$

Respuesta:

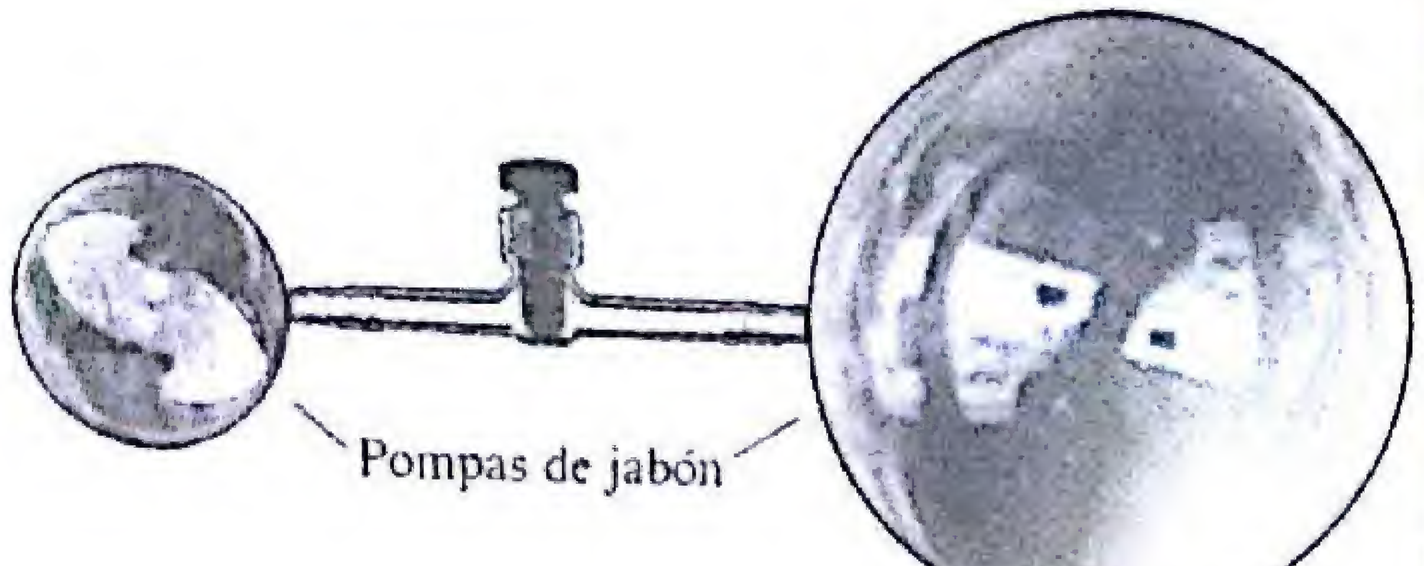
$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} = 3{,}83\ \text{mm}$$

PR-1.41. *Pompa de jabón grande se traga a la pequeña*

Las burbujas de jabón están constituidas por dos películas, una interior y otra exterior, con una capa muy delgada de líquido entre ellas. La tensión superficial causa una diferencia de presión entre el aire interior y el aire exterior de la burbuja.

a) Determine la sobre presión, es decir, la diferencia de presión entre el interior y el exterior de una burbuja esférica de radio R, y γ es la tensión superficial del líquido.

b) En los extremos de un tubo de vidrio con una llave de paso intermedia, se forman dos burbujas de jabón esféricas, una mucho mas grande que la otra. ¿Qué sucederá si se abre la llave?



Solución: a) Para calcular el exceso de presión que hay dentro de una burbuja de radio R consideremos un corte seccional de la misma. La fuerza de la tensión superficial del líquido sobre una membrana actúa en una circunferencia y su valor es:

$$\gamma L = \gamma(2\pi R)$$

La fuerza de tensión superficial total para las dos membranas (interior y exterior) es dos veces este valor y está dirigida hacia arriba:

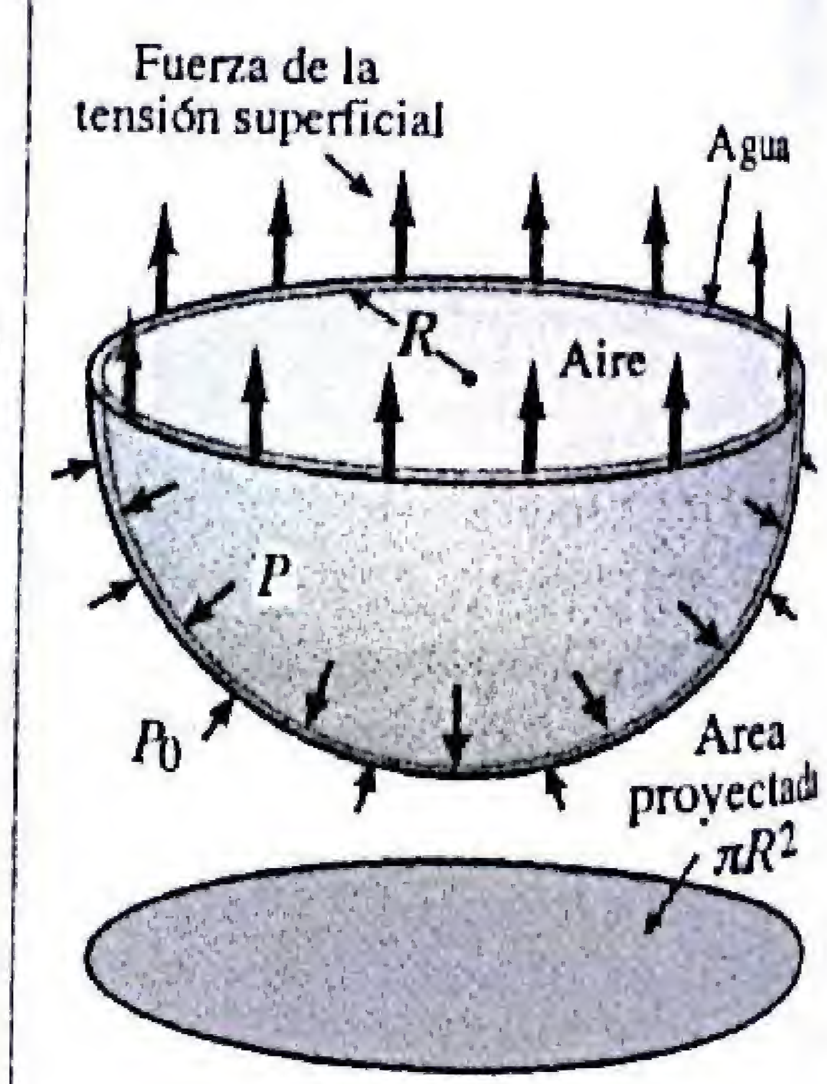
$$F_{\uparrow} = 2\gamma L = 4\gamma\pi R$$

Por otra parte, si consideramos en esta mitad de la burbuja un elemento de superficie ΔA, la presión que ejerce el aire interno por arriba es P y la presión atmosférica por debajo es P_0, y la fuerza normal es: $\Delta F = (P - P_0)\Delta A$. La componente vertical de esta fuerza es:

$$\Delta F_y = (P - P_0)\Delta A \cos\theta$$

Como $\Delta A \cos\theta$ es el área de este elemento proyectada sobre el plano horizontal, la fuerza neta ejercida por el aire hacia abajo es:

$$F_{\downarrow} = (P - P_0)\pi R^2$$



Esta mitad de la burbuja está en equilibrio, por lo tanto la fuerza ejercida por el aire es de igual módulo que la fuerza de la tensión superficial:

$$F_{\downarrow} = F_{\uparrow} \quad \Rightarrow \quad (P - P_0)\pi R^2 = 4\gamma\pi R$$

Por lo tanto, la diferencia de presión entre el interior y el exterior de la burbuja será:

$$P - P_0 = \frac{4\gamma}{R}$$

Se observa que, cuanto menor sea el radio R de la burbuja, mayor será la diferencia de presión.

b) Si se abre la llave de paso y quedan conectadas las dos burbujas mediante el tubo de vidrio, la burbuja mas pequeña como tiene una sobre presión mayor, irá disminuyendo gradualmente su tamaño hasta desaparecer. La burbuja mayor crecerá a expensas del aire que contenía la pequeña y termina tragándosela.

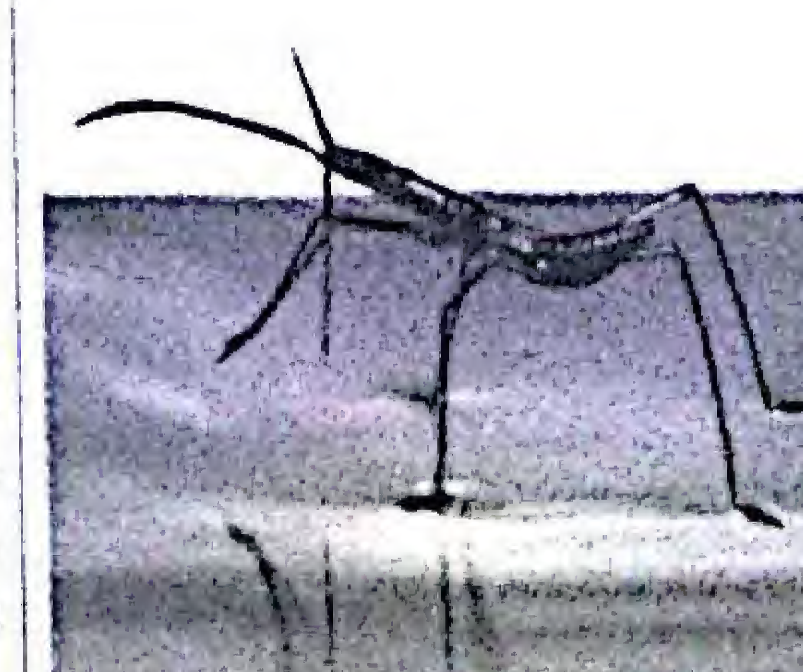
Respuesta:

a) $P - P_0 = \dfrac{4\gamma}{R}$

b) La burbuja grande se traga a la pequeña

PR-1.42. *Hay insectos que caminan sobre el agua*

Algunos insectos pueden caminar sobre la superficie de un estanque sin que se rompa la "piel" del agua. Esto es posible por la tensión superficial y además, porque sus patas están cubiertas de una sustancia parecida a la cera que evita que se mojen. Suponga que un insecto se posa sobre la superficie de una laguna, de tal forma que cada una de sus cuatro patas provoca en el agua una depresión de radio r = 2,0 mm y que la fuerza de la tensión superficial es ejercida formando un ángulo $\theta = 53°$ con la horizontal. ¿Cuál será la masa de este insecto?



Solución: Si suponemos que la fuerza de la tensión superficial del líquido está aplicada sobre una circunferencia de radio r, entonces:

$$F = \gamma L = \gamma(2\pi r)$$

La componente vertical de esta fuerza es:

$$F_y = F\,sen\theta = \gamma(2\pi r)\,sen\theta$$

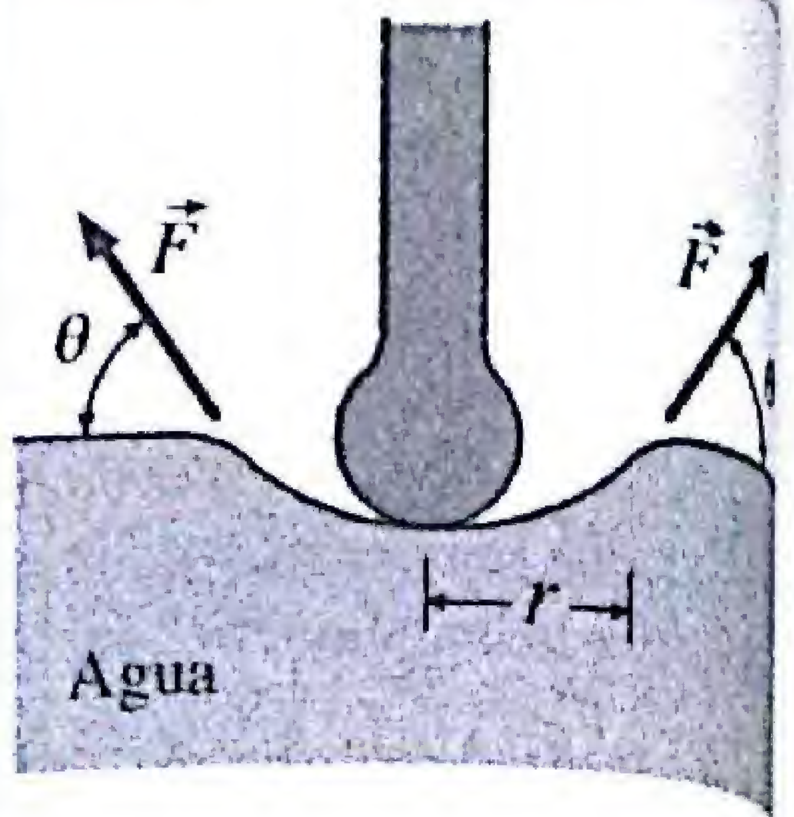
Si el insecto se apoya sobre sus cuatro patas y cada una de las cuales causan depresiones similares soportando por igual su peso, entonces:

$$\frac{1}{4}mg = \gamma(2\pi r)sen\theta$$

$$m = \frac{8\gamma\pi r sen\theta}{g}$$

La masa del insecto es:

$$m = \frac{8(0{,}0728\text{N/m})\pi(2\text{x}10^{-3}\text{m})\text{sen}53^{\circ}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 3{,}0x10^{-4}\text{kg}$$



Respuesta

$$\boxed{m = 0{,}3\ \text{g}}$$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. ***Cuando un objeto se coloca en un fluido...***

a) Desplaza un volumen de fluido igual a su propio volumen.

b) Se ejerce sobre él la misma presión en todos los puntos de su superficie sumergida.

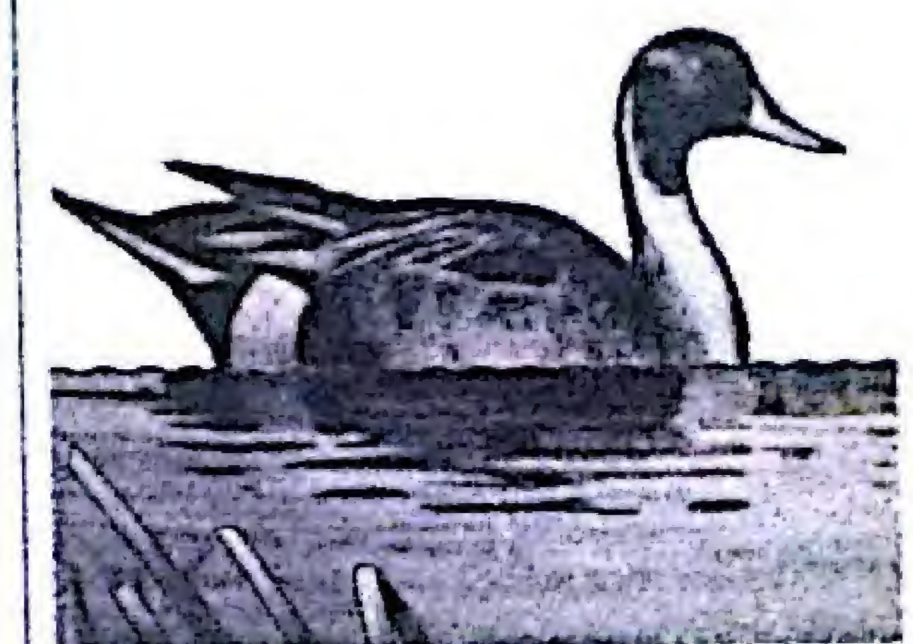
c) Se ejerce sobre él una fuerza de empuje hacia arriba que depende de su forma.

d) La fuerza de empuje es proporcional a la densidad del fluido.

e) La fuerza de empuje es proporcional a la densidad del objeto.

PE-1.02. ***¿Por qué flota un pato en el agua?***

Un pato flota en el agua gracias a que...



a) Tiene plumas.

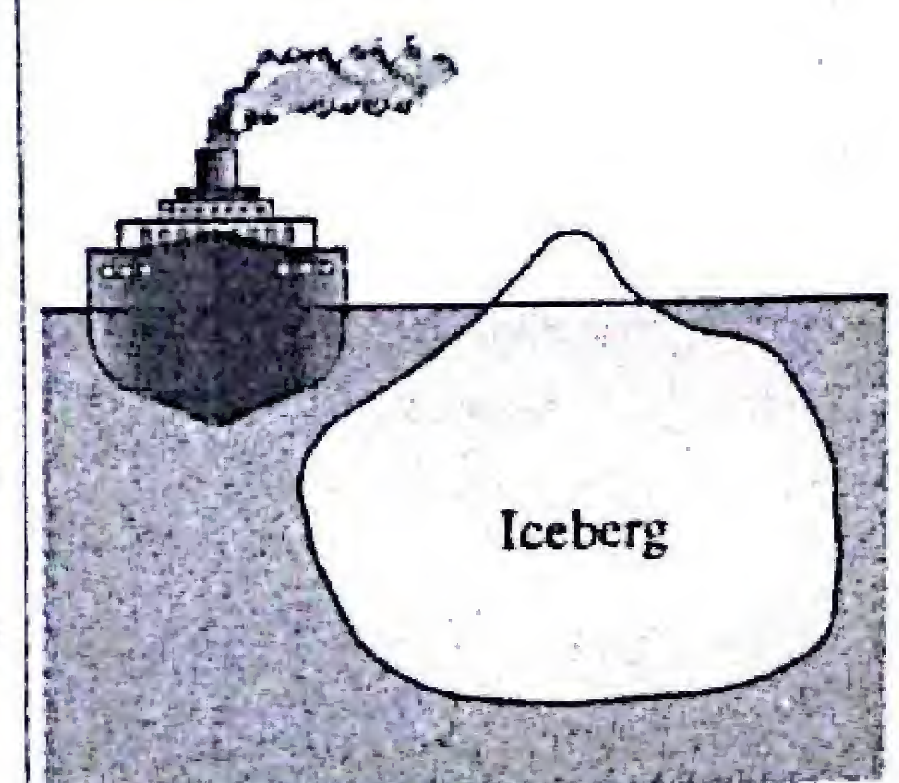
b) Puede nadar.

c) Se impulsa con sus alas.

d) La tensión superficial equilibra su peso.

e) Su densidad es menor que la densidad del agua.

PE-1.03. ***Lo que esconde la punta de un iceberg***



El hielo tiene menor densidad que el agua de mar, por dos razones: El agua es una sustancia que se expande al congelarse y además, el agua de mar contiene sal que la hace mas densa que el agua pura. Sabiendo que las densidades respectivas son: $\rho_H = 920$ kg/m^3 y $\rho_A = 1030$ kg/m^3. ¿Qué fracción de un iceberg se encuentra escondida debajo el agua?

a) 85% , b) 89%, c) 93%, d) 95%, e) 98%

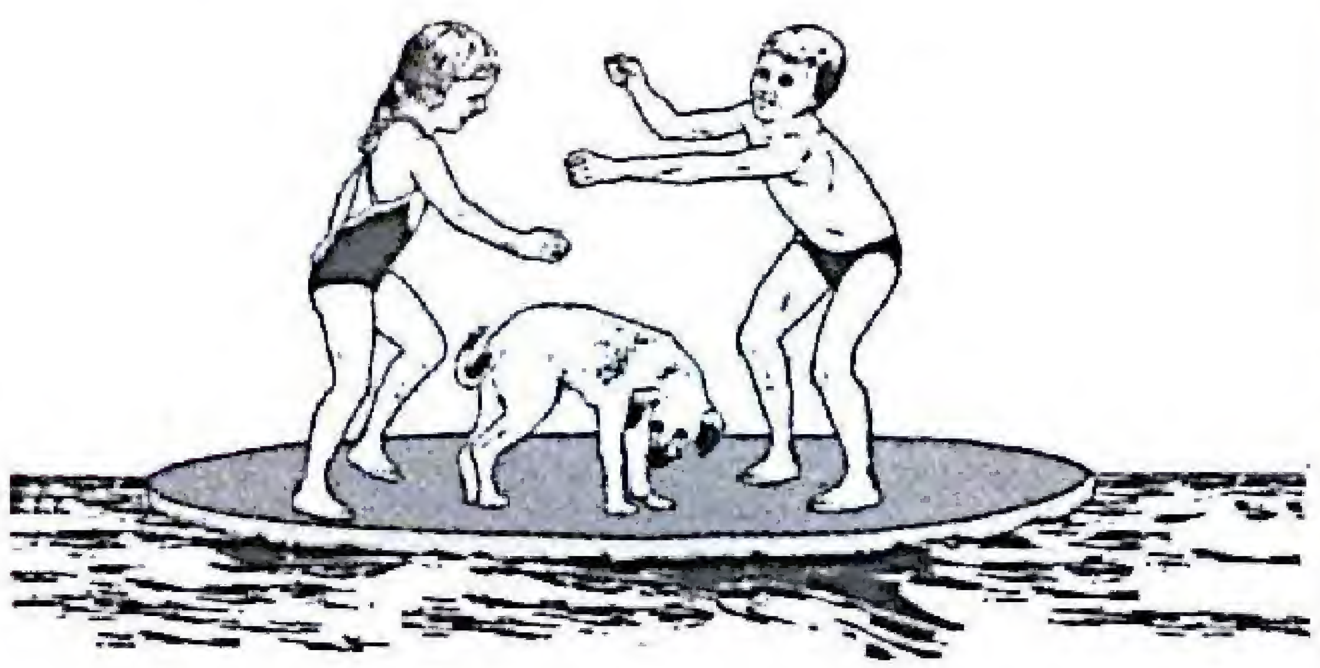
PE-1.04. *Es difícil ahogarse en el mar muerto*

El mar muerto situado en Palestina, es el agua más salada y densa del mundo. Casi el 25 % del líquido son sales disueltas y debido al clima cálido, el agua se evapora rápidamente, dejando a su paso la sal. La concentración de sal en el agua es tan alta que no hay peces y los únicos seres vivos que pueden habitar en ella son las bacterias. En un lugar del mar muerto la densidad del agua llega a 1500 kg/m^3, si la densidad del cuerpo humano es 980 kg/m^3, ¿qué fracción del cuerpo de una nadadora quedaría por encima de la superficie del agua?

a) 20%, b) 25%, c) 35%, d) 50%, e) 65%

PE-1.05. *Area de la tabla requerida para que flote al ras*

En una piscina con agua de densidad ρ = 1000 kg/m^3 y sobre una tabla de densidad ρ_T = 400 kg/m^3 y espesor h = 10 cm, se colocan dos niños y un perro



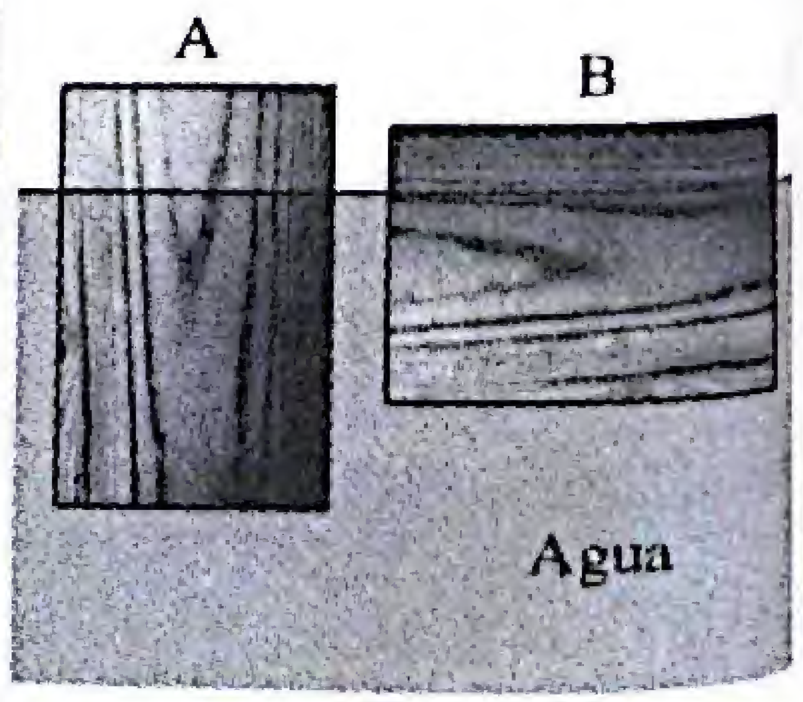
La masa total de los niños mas el perro es M = 60 kg. ¿Cuál debe ser el área de la tabla para que flote al ras del nivel del agua sin que ni los niños y ni el perro se mojen los pies?

a) $A = 0{,}25$ m^2
b) $A = 0{,}50$ m^2
c) $A = 1{,}0$ m^2
d) $A = 1{,}50$ m^2
e) $A = 2{,}0$ m^2

PE-1.06. *Un bloque con dos maneras distintas de flotar*

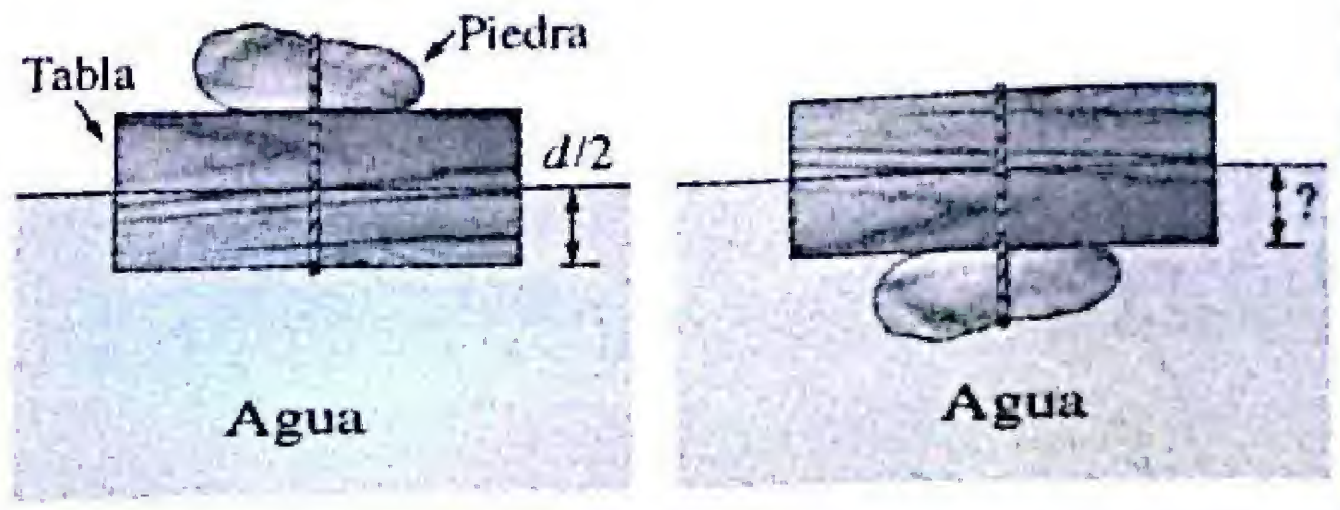
Un bloque de madera se coloca flotando en el agua de las dos maneras mostradas, A y B. El bloque desplazará mayor volumen de agua...

a) Cuando está en la posición A.
b) Cuando está en la posición B.
c) En las dos posiciones desplaza igual volumen de agua.



PE-1.07. *¿Qué sucede si volteamos la tabla?*

Sobre una tabla se amarra una piedra de forma tal que cuando ésta queda encima de la tabla, ambos pueden flotar en el agua quedando sumergida justamente la mitad de la tabla.

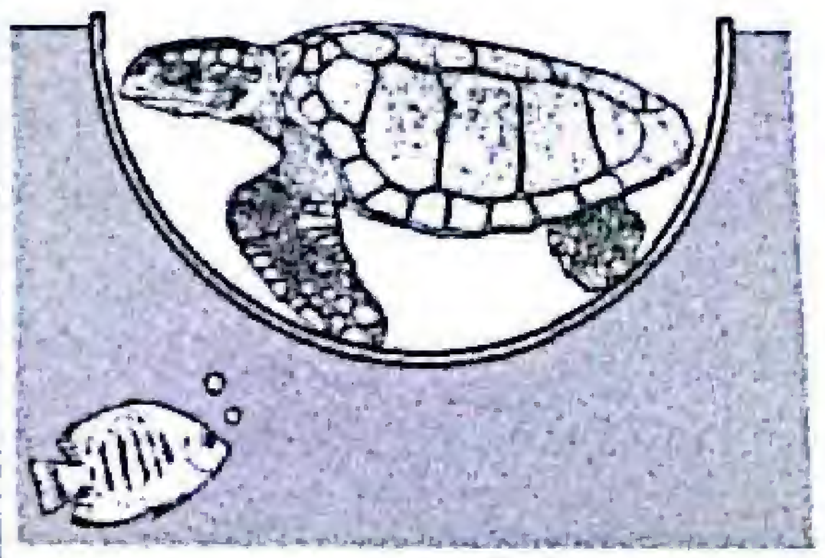


Si volteamos la tabla para que la piedra quede debajo de ella, la porción de la tabla sumergida en el agua será:

a) menor de la mitad
b) la mitad
c) mayor de la mitad

PE-1.08. *Una tortuga que flota dentro de un tazón*

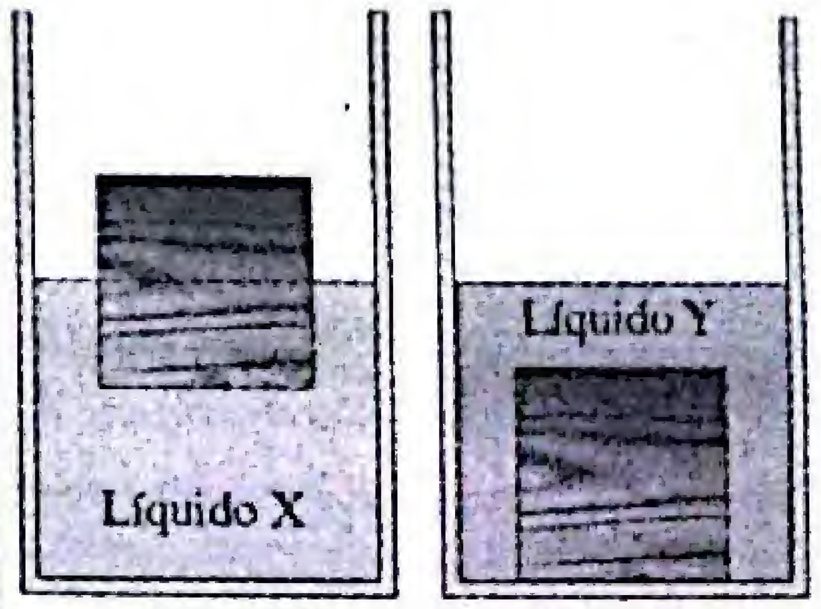
Dentro de un tazón hemisférico de 50 cm de radio y una masa de 200 kg, se encuentra una tortuga flotando en agua de mar (densidad ρ = 1146 kg/m^3). Si el nivel del agua llega justo al ras del borde del tazón, entonces la masa de la tortuga es....



a) 50 kg b) 100 kg c) 150 kg d) 200 kg e) 300 kg

PE-1.09. *Un cubo de madera entre dos líquidos*

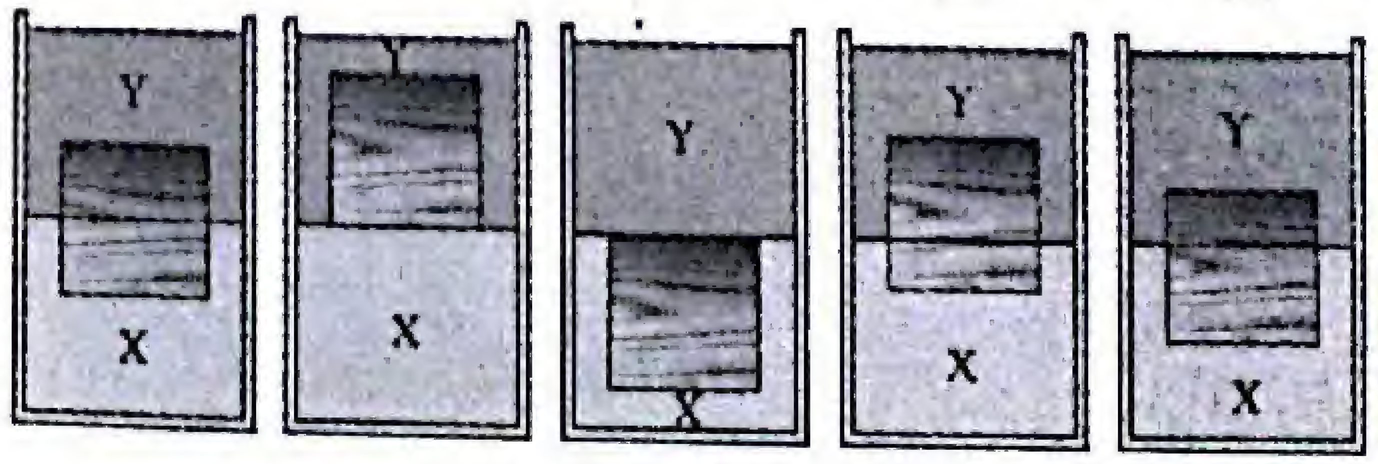
Un cubo de madera flota hasta la mitad cuando se coloca en un cierto líquido, X (Fig. 1). Cuando se coloca en otro líquido Y, el cubo se hunde completamente (Fig. 2). Suponga ahora que vertimos un líquido sobre el otro sin que se mezclen y luego introducimos el cubo de madera.



(Fig. 1) (Fig. 2)

¿Cuál de las posiciones de abajo adoptará el cubo?

(a) (b) (c) (d) (e)



PE-1.10. *Trozo de hielo en una copa de agua rebosada*

Un pedazo de hielo flota en agua a 0°C de forma tal que el nivel de agua está justo en el borde de la copa. ¿Qué le sucederá al nivel del agua después que todo el hielo se derrita?

a) El nivel queda igual y no hay derrame

b) El nivel sube y se derrama el agua

c) El nivel desciende

d) Lo que suceda dependerá de la forma del hielo

PE-1.11. *Una burbuja de aire en el cubo de hielo*

Un pedazo de hielo flota en agua a 0°C de forma tal que el nivel de agua está justo en el borde de la copa. Dentro del pedazo de hielo hay una gran *burbuja de aire*. ¿Qué le sucederá al nivel del agua cuando todo el hielo se derrita?

a) El nivel queda igual y no hay derrame

b) El nivel sube y se derrama el agua

c) El nivel desciende

d) Lo que suceda dependerá de la forma del hielo

e) Lo que suceda dependerá del tamaño de la burbuja.

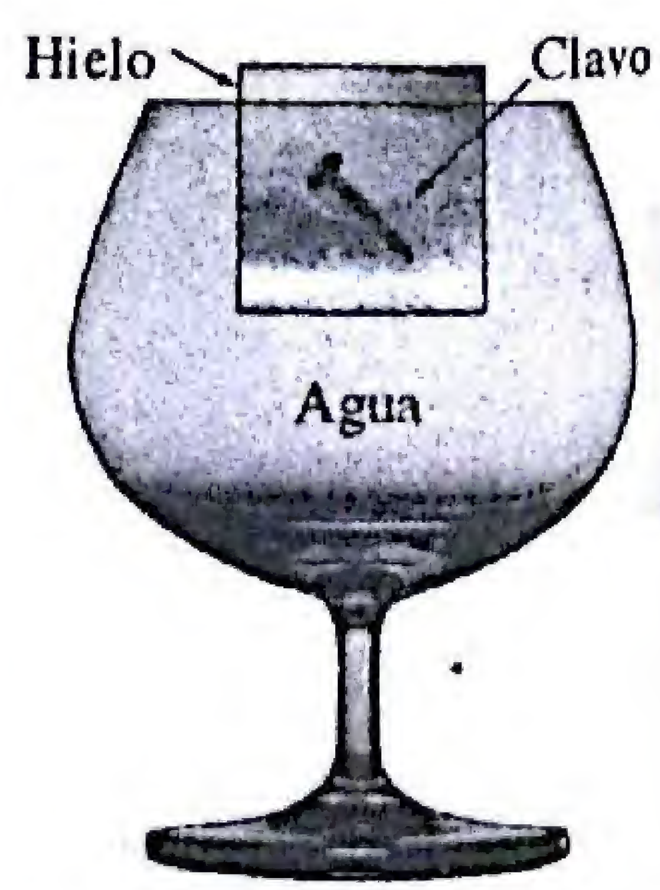
PE-1.12. *¡Hay un clavo dentro del hielo!*

Un pedazo de hielo flota en agua de forma tal que el nivel del agua queda justo en el borde de la copa. El hielo tiene incrustado en su interior *un clavo de hierro*. ¿Qué le sucederá al nivel del agua después que todo el hielo se derrita?

a) El nivel sube y hay derrame del agua.

b) El nivel queda al mismo nivel y no hay derrame.

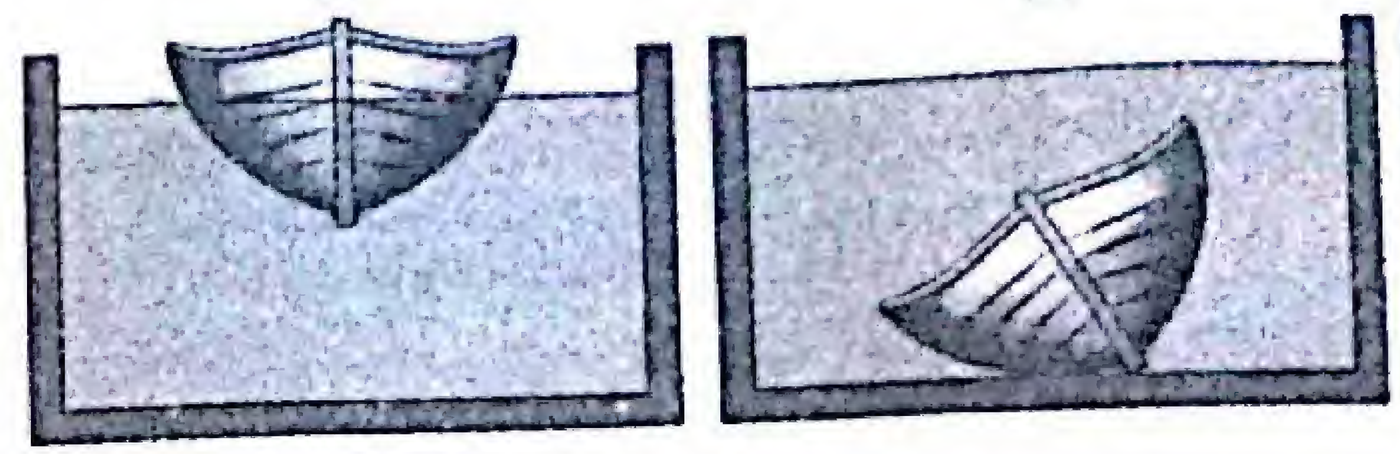
c) El nivel desciende.



PE-1.13. *Si el bote se hunde: Subirá o bajará el nivel*

Una barco hecho de una carcasa de hierro flota en un estanque de modo que el nivel del agua tiene una cierta altura (Fig. a).

(a) (b)



El barco tiene un tapón en el fondo y cuando éste es removido, el agua entra por el agujero y el barco se hunde (Fig. b). ¿Qué sucederá al nivel del agua del estanque?

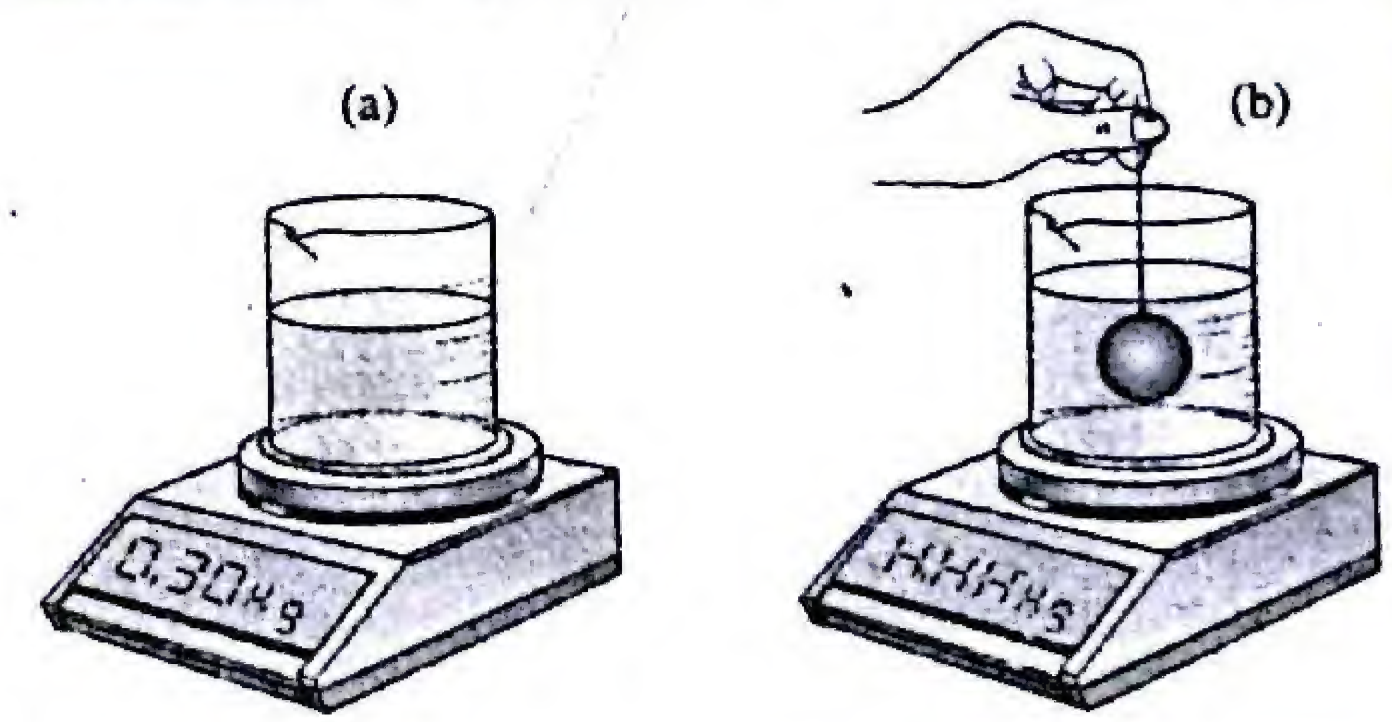
a) el nivel del agua sube

b) el nivel del agua baja

c) el nivel del agua queda igual

PE-1.14. *Pesando esfera metálica en frasco con agua*

Cuando un recipiente que contiene agua se coloca sobre una báscula, ésta registra una lectura de 0,30 kg (Fig. a).



Si ahora una esfera metálica de 0,50 kg y densidad $\rho = 2500$ kg/m^3, suspendida de un hilo se sumerge en el agua sin tocar el fondo (Fig. b), la nueva lectura de la báscula será....

a) 0.20 kg

b) 0.30 kg

c) 0.40 kg

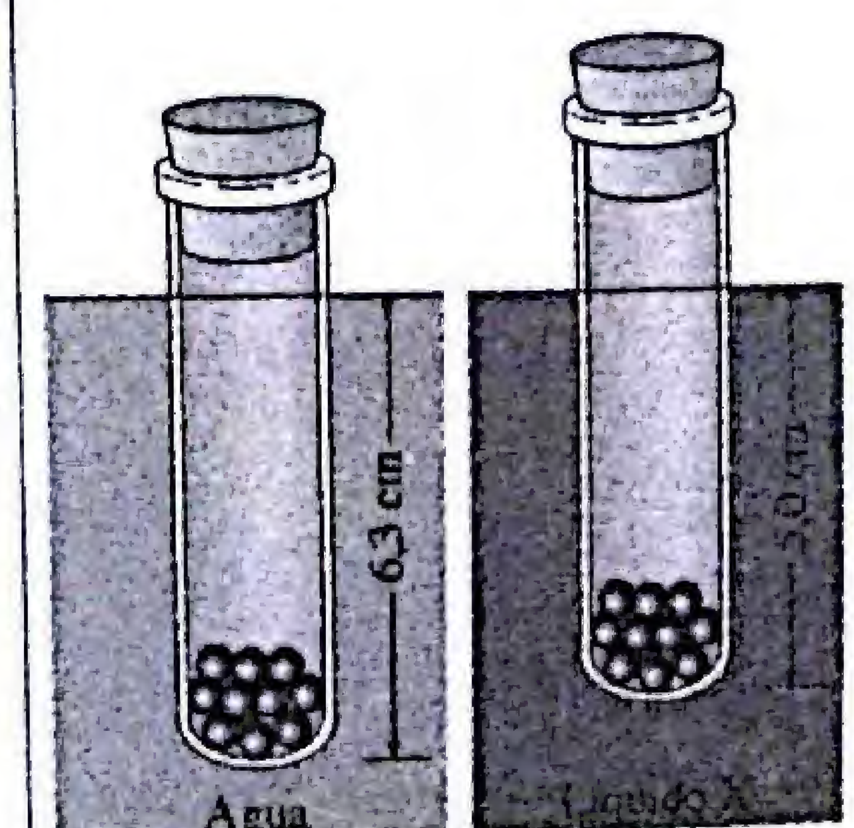
d) 0.50 kg

e) 0.80 kg

PE-1.15. *¿Cuál será ese líquido desconocido?*

Un tubito de vidrio que está cargado con perdigones se coloca en el agua (densidad: 1000 (kg/m^3), y se observa que se hunde 6.3 cm . Cuando se introduce en un líquido desconocido, se observa que el tubito se hunde 5 cm. Considerando la siguiente tabla de densidades, ¿cuál podría ser el líquido desconocido?

a) *alcohol etílico*	794 (kg/m^3)
b) *benceno*	879 (kg/m^3)
c) *sangre*	1050 (kg/m^3)
d) *mercurio*	13600 (kg/m^3)
e) *glicerina*	1260 (kg/m^3)



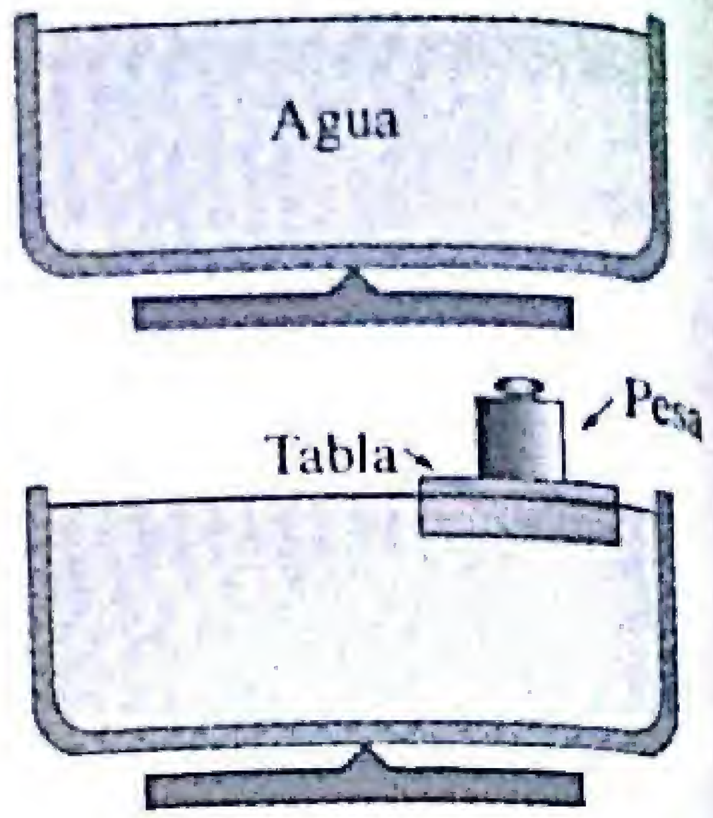
PE-1.16. *¿Se romperá el equilibrio?*

Una bandeja con agua fue colocada sobre una cuña de forma tal que queda en equilibrio. Si ahora se coloca cuidadosamente una tabla y sobre ésta una pesa, de modo que queden flotando en la superficie a cierta distancia fuera del centro, podemos decir que el sistema:

a) Se inclinará hacia la derecha

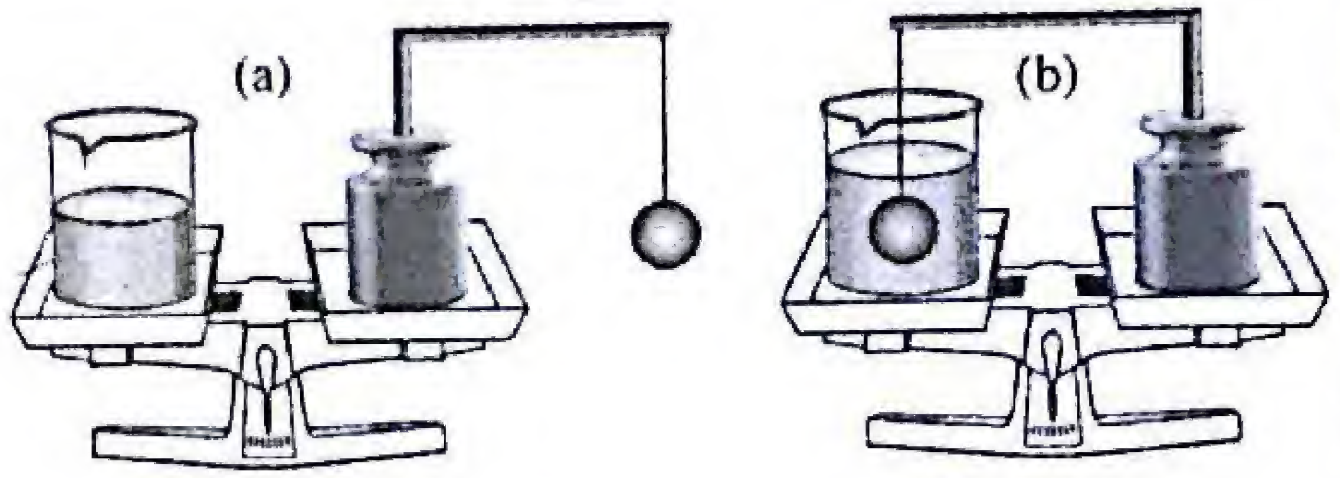
b) Se inclinará hacia la izquierda

c) Se mantendrá el equilibrio



PE-1.17. *¿Cuál lado pesará más?*

Una balanza se encuentra inicialmente equilibrada cuando en uno de sus platillos hay un recipiente con agua y en el otro hay una pesa y una bola. La bola está suspendida de un soporte que está acoplado a la pesa y puede girar alrededor de ésta, (Fig. a). A continuación se gira el soporte en 180° de forma tal que la esfera queda sumergida completamente en el agua y desplaza un volumen de un litro (Fig. b).



En esta nueva situación si comparamos los pesos sobre los dos platillos, podemos decir que:

a) Los pesos sobre los dos platillos permanecen iguales.

b) El de la izquierda pesa 9.8 N menos que el de la derecha.

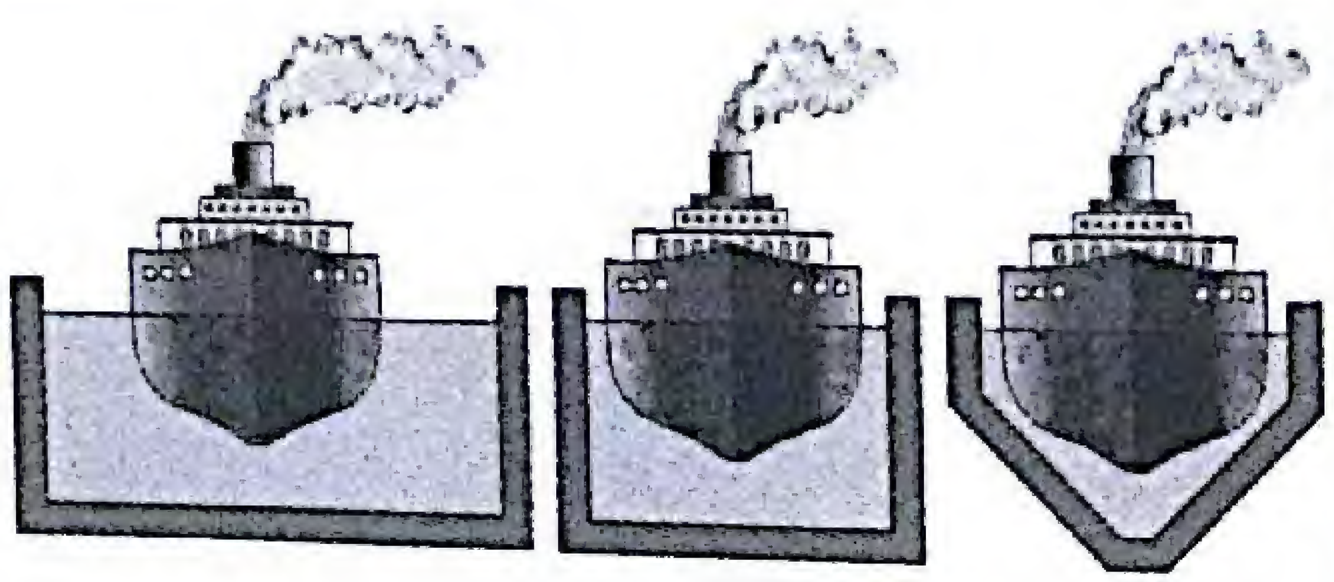
c) El de la izquierda pesa 9.8 N más que el de la derecha.

d) El de la izquierda pesa 19.6 N menos que el de la derecha.

e) El de la izquierda pesa 19.6 N más que el de la derecha.

PE-1.18. *¿En cual caso el barco presiona más?*

Una barco se pone a flotar en diferentes diques de agua, como se ilustra en la figura.



(a) (b) (c)

¿En cuál caso será mayor la presión hidrostática que ejerce el barco sobre las paredes del dique a las distintas profundidades?

a) es igual en los tres casos

b) es mayor en A

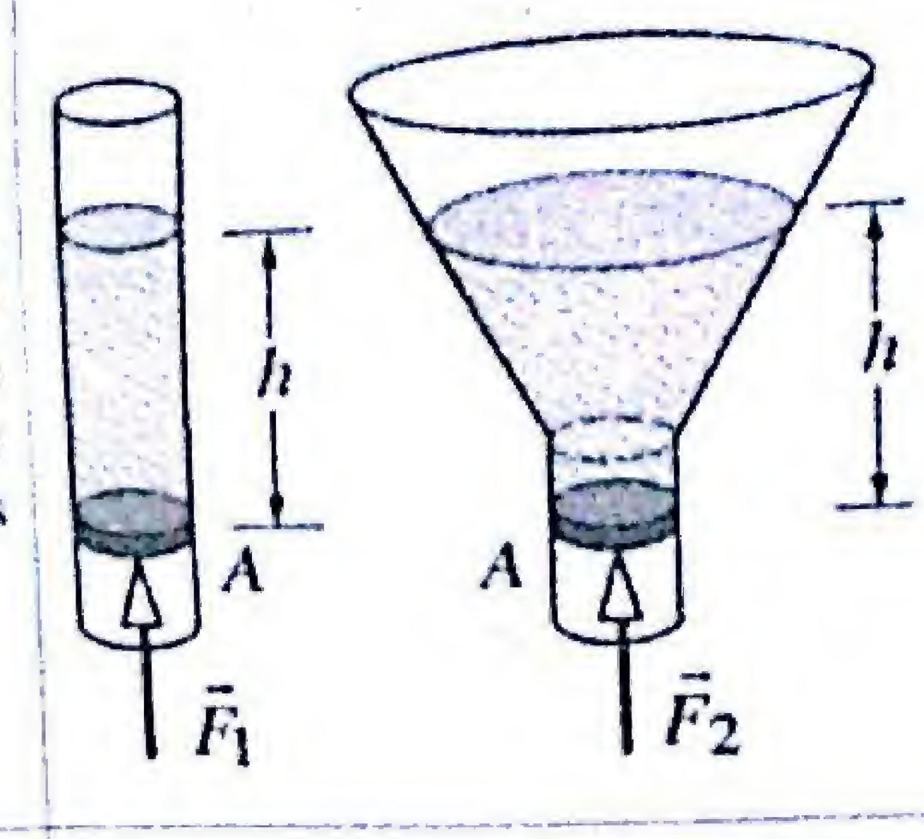
c) es mayor en B

d) es mayor en C

PE-1.19. *Fuerza para equilibrar los pistones*

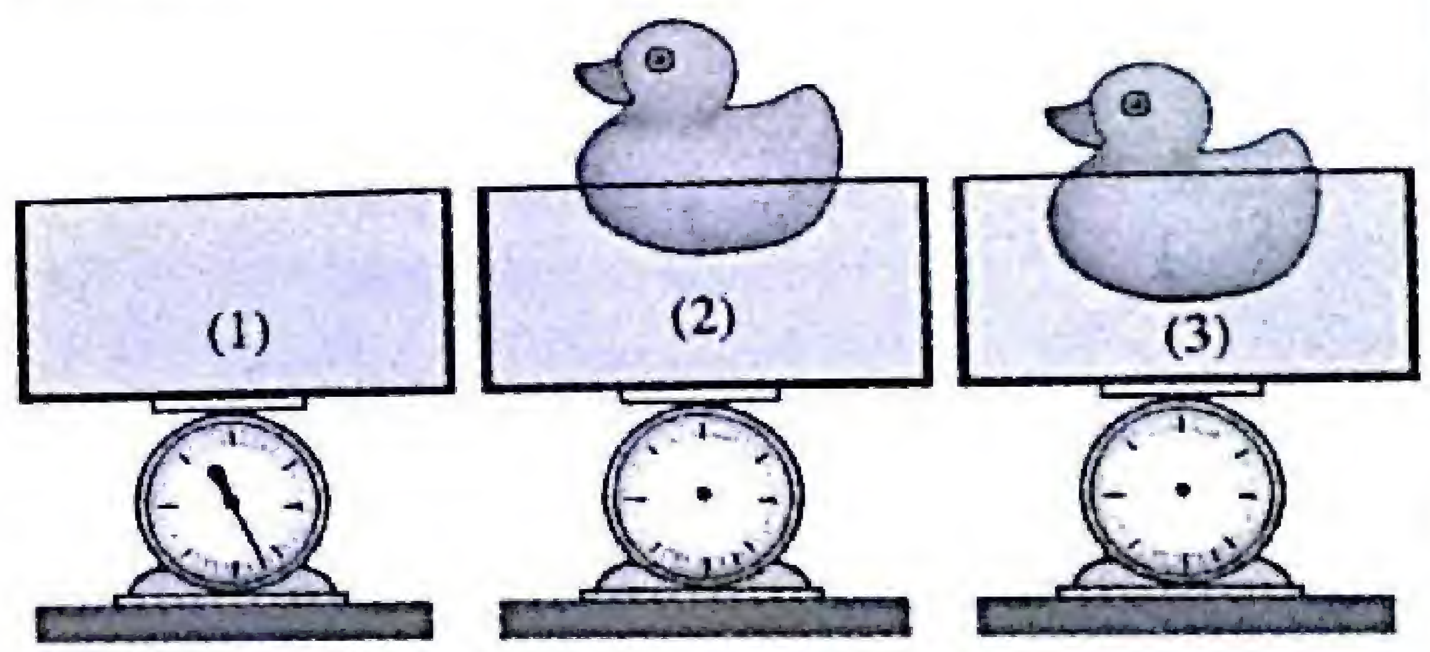
Sean dos recipientes, uno es un cilindro de área A y el otro, es un embudo con su parte superior de forma cónica y su parte inferior de forma cilíndrica de área A. Los dos recipientes tienen agua hasta igual altura, h, que reposa sobre pistones móviles de igual área, A. ¿Cómo están relacionadas las fuerzas que hay que aplicar a los pistones para mantener el agua en equilibrio?

a) $F_1 > F_2$ b) $F_1 = F_2$ c) $F_1 < F_2$



PE-1.20. *¿Cuál pesa más, cuál pesa menos?*

Sean tres recipientes idénticos que contienen agua hasta el borde. En el recipiente (1) hay solamente agua, en el (2) y en el (3) hay dos patos de goma, que flotan de manera distinta como se muestra en la figura.



Si colocamos los recipientes sobre una báscula y comparamos las lecturas de las básculas en los tres casos, podemos afirmar que:

a) Es mayor en el caso (1) y menor en el caso (2)

b) Es mayor en el caso (2) y menor en el caso (1)

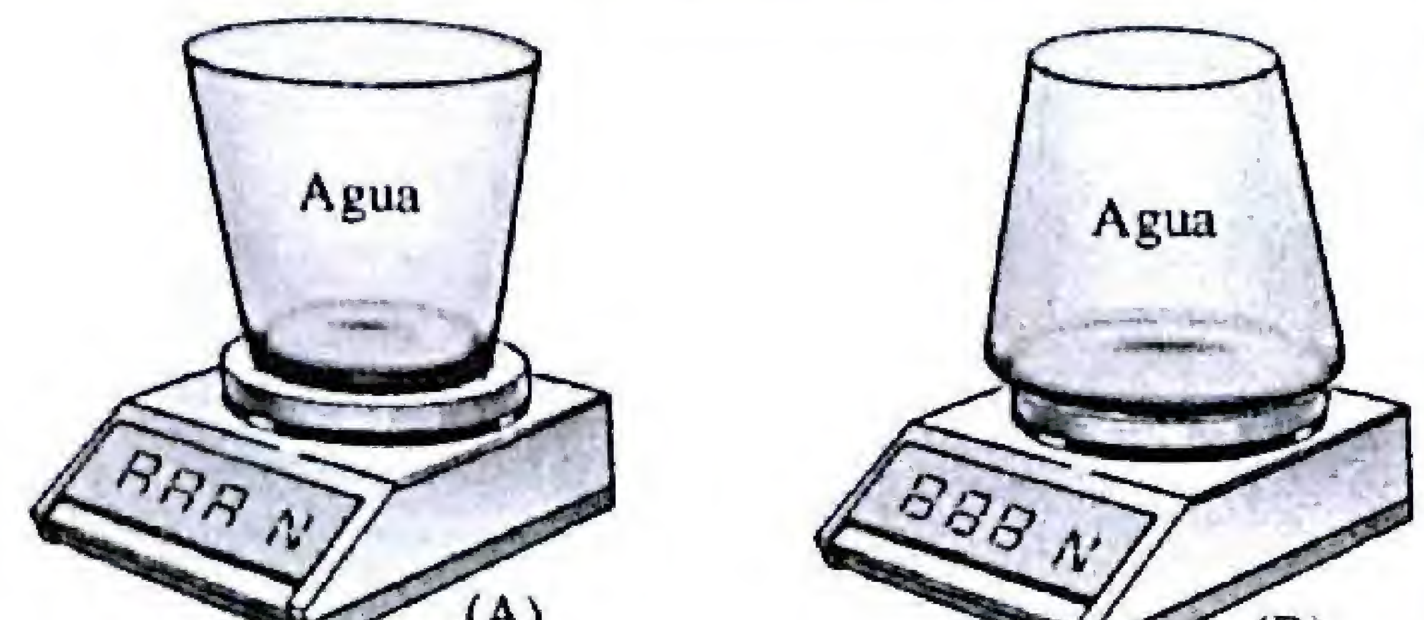
c) Es mayor en el caso (3) y menor en el caso (1)

d) Es mayor en el caso (1) y menor en el caso (3)

e) Es idéntica en los tres casos.

PE-1.21. *Paradoja hidrostática con vasos cónicos*

Sean dos vasos en forma de cono truncado. En el vaso A el fondo tiene la base menor y en el vaso B el fondo tiene la base mayor. Los vasos son de igual altura y contienen la misma cantidad de agua hasta el borde superior.



(A) (B)

La presión en el fondo de ambos vasos será la misma pero la fuerza será mayor en el vaso que tiene el fondo con área mayor. Si colocamos los vasos sobre una báscula, podemos concluir que:

a) La lectura de la báscula es mayor en el vaso A.

b) La lectura de la báscula es mayor en el vaso B.

c) La lectura de la báscula es idéntica en ambos vasos.

PE-1.22. *Introduciendo un dedo en el agua*

Un vaso conteniendo agua es colocado sobre una báscula electrónica y se registra la lectura inicial. Si introducimos suavemente un dedo en el agua podemos decir que:

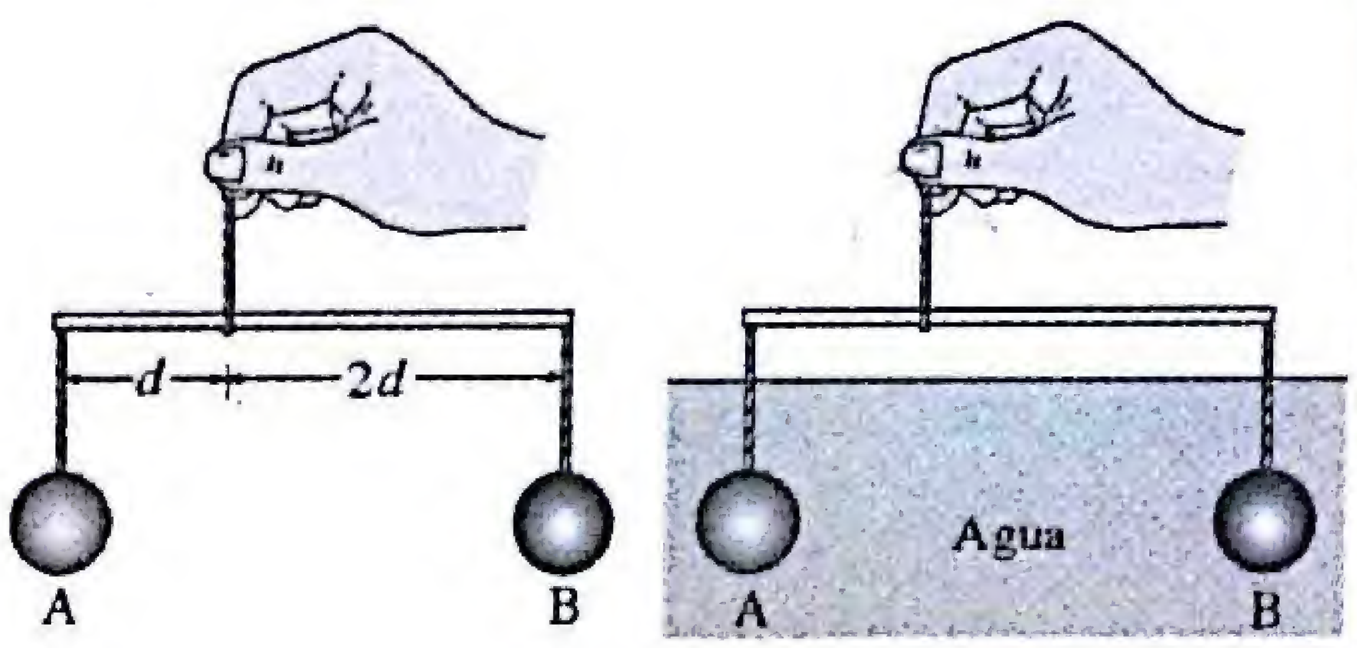
a) La lectura de la báscula no cambia.

b) La lectura de la báscula aumenta.

c) La lectura de la báscula disminuye.

PE-1.23. *¿Hacia dónde se inclinará el palo?*

Dos objetos A y B de igual volumen están suspendidos de un palo de modo que el palo queda en equilibrio horizontal cuando el brazo de B es d mientras que el brazo de B es $2d$.



Si se sumergen los dos objetos agua, ¿hacia cuál lado se inclina palo?

a) Hacia el lado de A.

b) Hacia el lado de B.

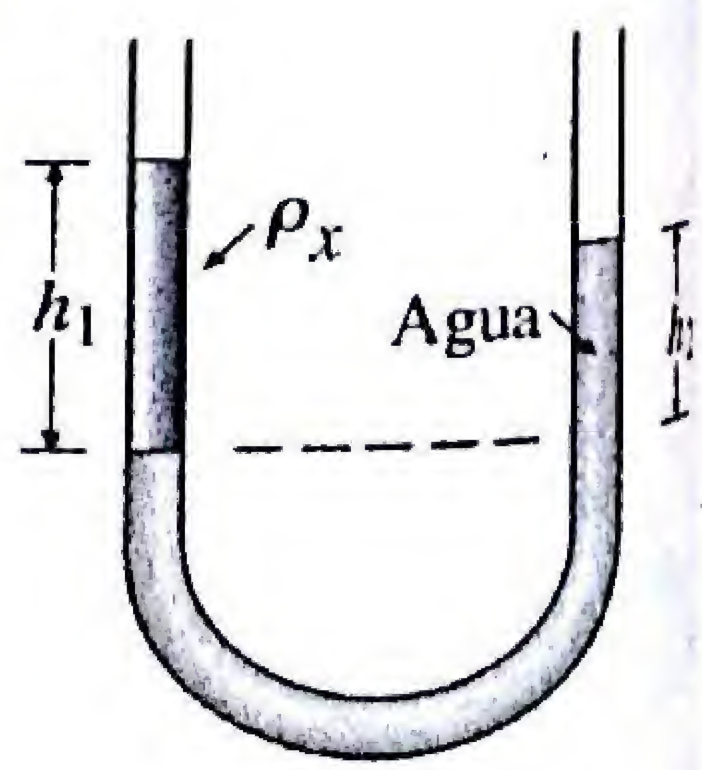
c) Permanece en equilibrio.

PE-1.24. *Densidad de un líquido desconocido*

Uno de los lados del tubo en U mostrado en la figura contiene agua (densidad: 1000 kg/m^3), en tanto que el otro lado contiene un líquido de densidad desconocida. Los dos líquidos no se mezclan. Si las alturas de las columnas son $h_1 = 4$ cm y $h_2 = 3$ cm respectivamente, la densidad del líquido desconocido es:

a) 250 (kg/m^3)   b) 333 (kg/m^3)   c) 500 (kg/m^3)

d) 750 (kg/m^3)   e) 1333 (kg/m^3)



PE-1.25. *No es fácil separar dos chupones de goma*

En una demostración de clase, el profesor coloca borde con borde dos chupones de los que se usan para destapar cañerías. Luego los aprieta hasta sacar parte del aire interior y se los entrega unidos a dos estudiantes voluntarios para que traten de despegarlos, jalando por los palos a cada lado. Los espectadores disfrutan al ver que sus compañeros no pueden lograrlo, por muy fuerte que traten de jalar.

Suponga que los hemisferios así formados tienen 5,5 cm de radio y que la presión del aire interno es el 1% de la presión atmosférica exterior. La fuerza que se debe aplicar a cada lado para separarlos debe ser aproximadamente...

a) 4800 N

b) 1900 N

c) 96 N

d) 950 N

e) 9,8 N

PE-1.26. *Dos latas de refresco: Una clásica y otra ligera*

En una demostración de clase, colocamos en una pecera llena de agua, dos latas de refresco de igual tamaño y de la misma marca: una clásica y la otra ligera. Se observa que la clásica siempre se hunde, en cambio la ligera flota. La explicación a este resultado es que....

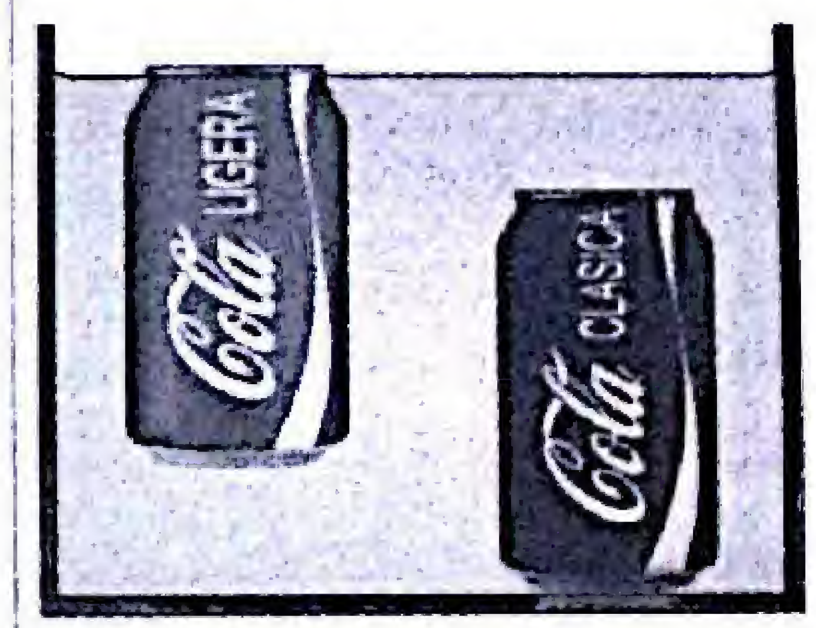
a) La clásica contiene mayor volumen de líquido.

b) Las dos latas son hechas de metales de diferentes densidades.

c) La clásica tiene mayor presión de gas que la ligera.

d) El contenido de azúcar de la clásica hace que su densidad sea mayor.

e) La clásica estaba congelada y la ligera no.



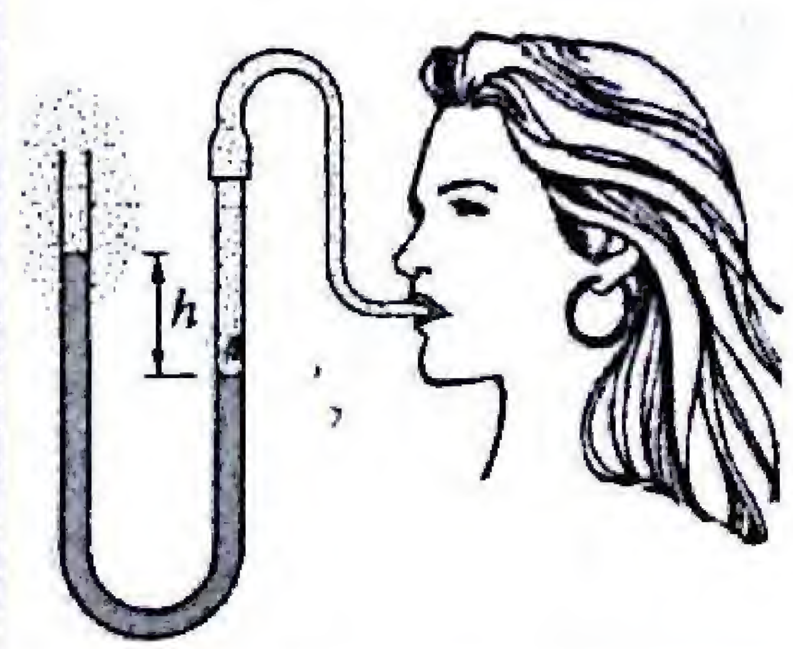
La ligera flota, la clásica se hunde

PE-1.27. *¿Cuál es la presión del aire en tus pulmones?*

Una alumna sopla por una manguera conectada a un tubo en forma de U que contiene agua. Antes de soplar, el agua a ambos lados del tubo queda al mismo nivel. Al soplar, el agua es forzada a tener un desnivel h = 20,4 cm. La presión en sus pulmones por encima de la atmosférica es...

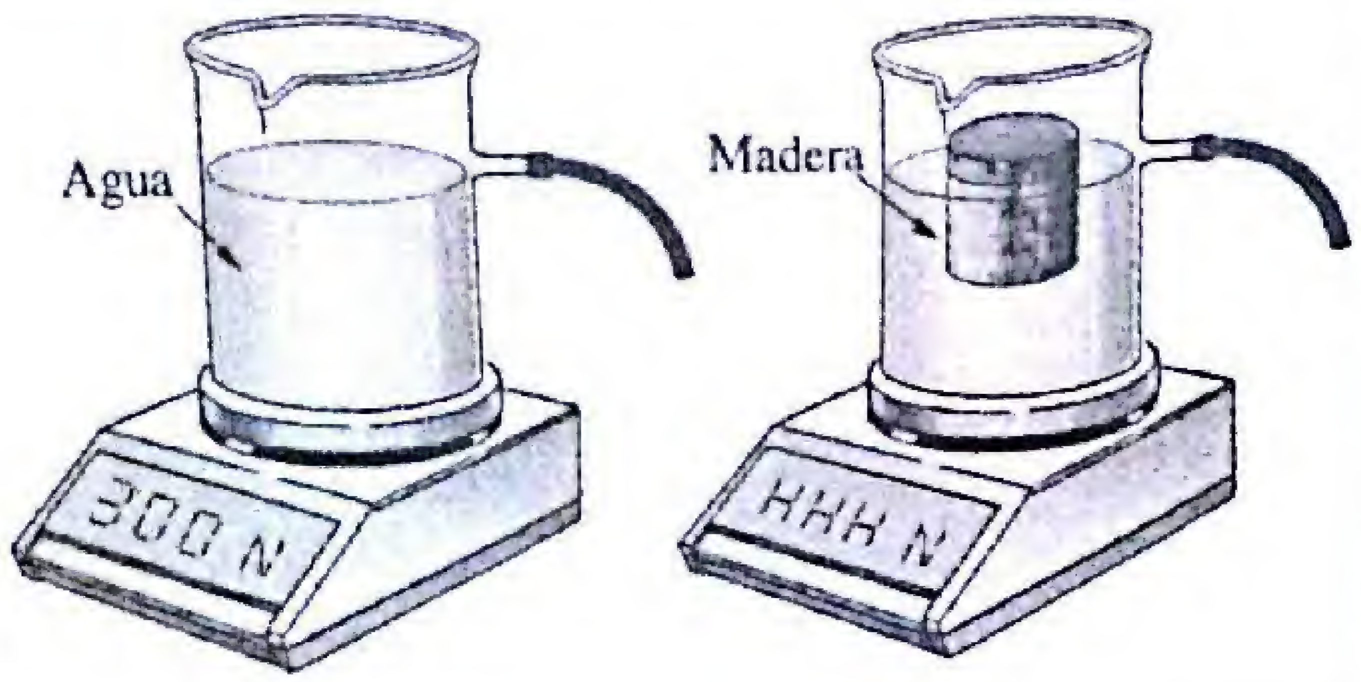
a) 50 N/m^2,   b) 100 N/m^2,   c) 500 N/m^2,

d) 1000 N/m^2,   e) 2000 N/m^2



PE-1.28. *¿Cuánto pesa al colocar el bloque de madera?*

Se echa agua en el recipiente mostrado, hasta el nivel del tubo de desagüe y se coloca sobre una báscula, la cual registra un peso de 300 N (Fig. a).



Luego se coloca un bloque de madera de 50 N que flota parcialmente y el agua desplazada sale por el tubo de desagüe (Fig. b). ¿Cuál será la nueva lectura de la báscula?

a) 250 N
b) 350 N
c) 300 N
d) 50 N
e) 25 N

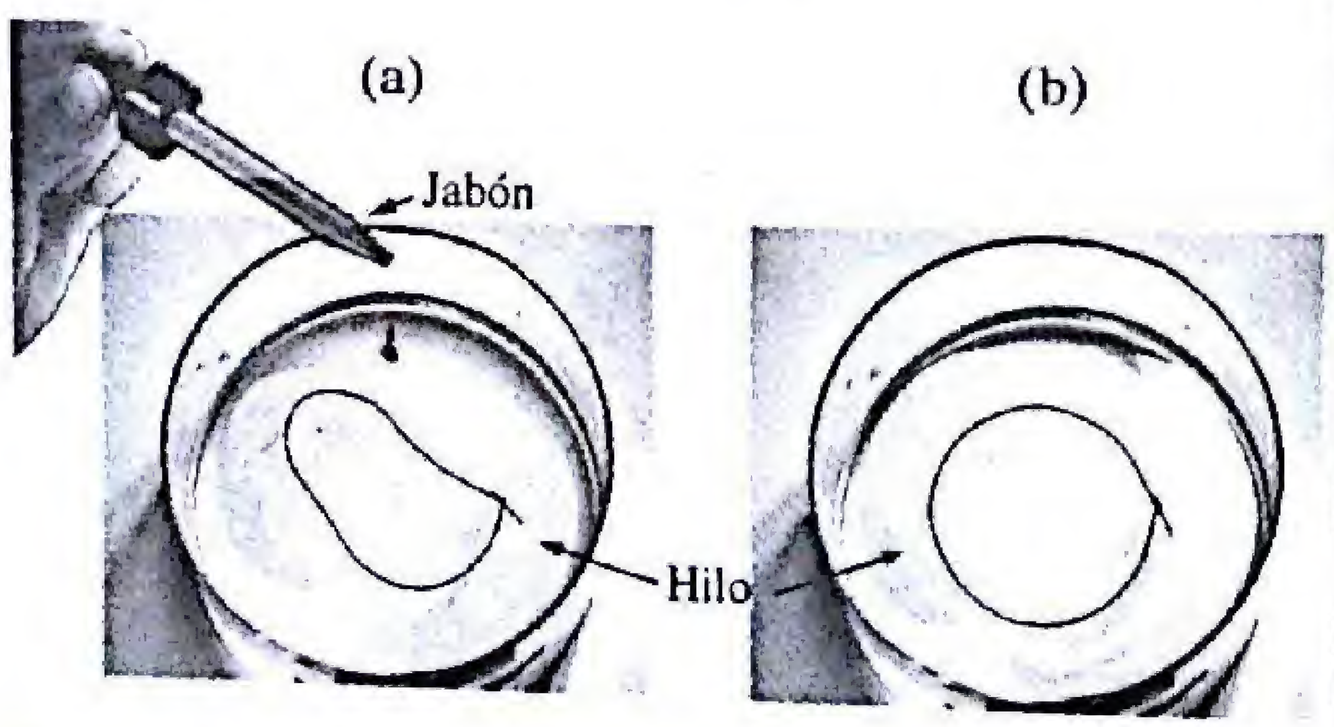
PE-1.29. *¿A qué se debe la acción capilar?*

La elevación de un líquido en un tubo por la acción capilar es un fenómeno que depende …

a) Sólo de la tensión superficial
b) Sólo de las fuerzas cohesivas
c) Sólo de las fuerzas adhesivas
d) De todas las anteriores

PE-1.30. *El jabón hace que se estire un lazo de hilo*

En una clase de demostraciones se coloca sobre la superficie de agua un lazo de hilo de forma irregular (Figura a). Cuando se deja caer una gota de detergente dentro del lazo, se observa que el lazo tiende a estirarse hasta formar una circunferencia (Figura b).



La explicación mas razonable de esta observación es que….

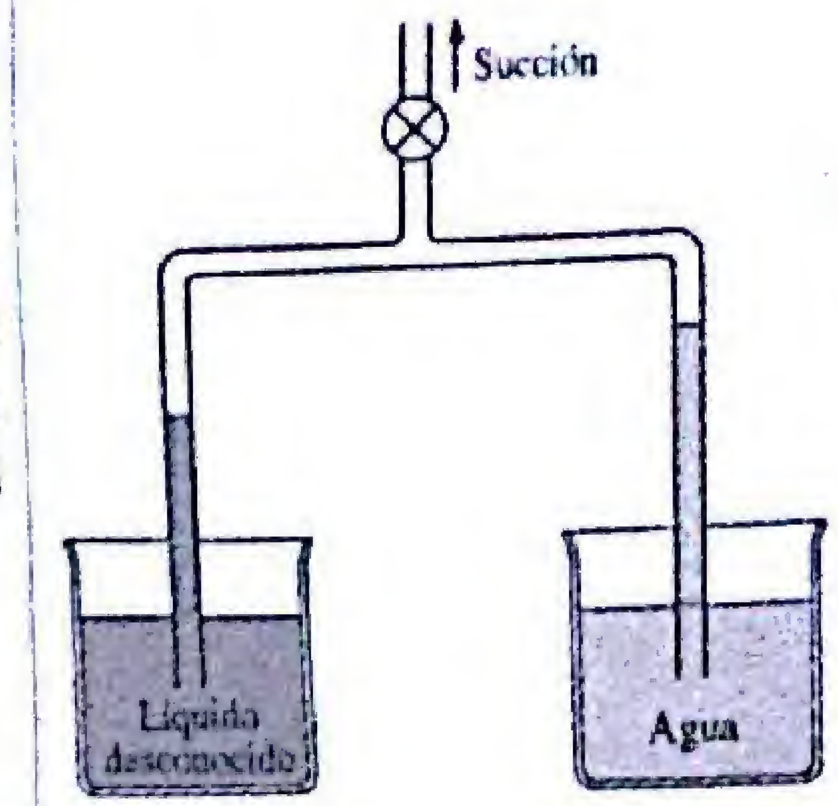
a) El volumen adicional de detergente es lo que empuja el hilo hacia afuera.

b) El detergente aumenta la densidad del liquido dentro del lazo.

c) El detergente reduce la tensión superficial dentro del lazo y la mayor tensión que hay en la parte de afuera jala el hilo radialmente.

PR-1.31. *Aparato de Hare para medir densidades*

La figura muestra un dispositivo sencillo conocido como aparato de Hare, utilizado para medir densidades relativas de los fluidos. Suponga que al succionar por el tubo común, causa que en el tubo de la derecha el agua se eleve hasta 12,6 cm mientras que el tubo de la izquierda el líquido desconocido se eleve hasta 10,5 cm. Si la densidad del agua es 1000 kg/m^3, entonces la densidad del líquido desconocido será:



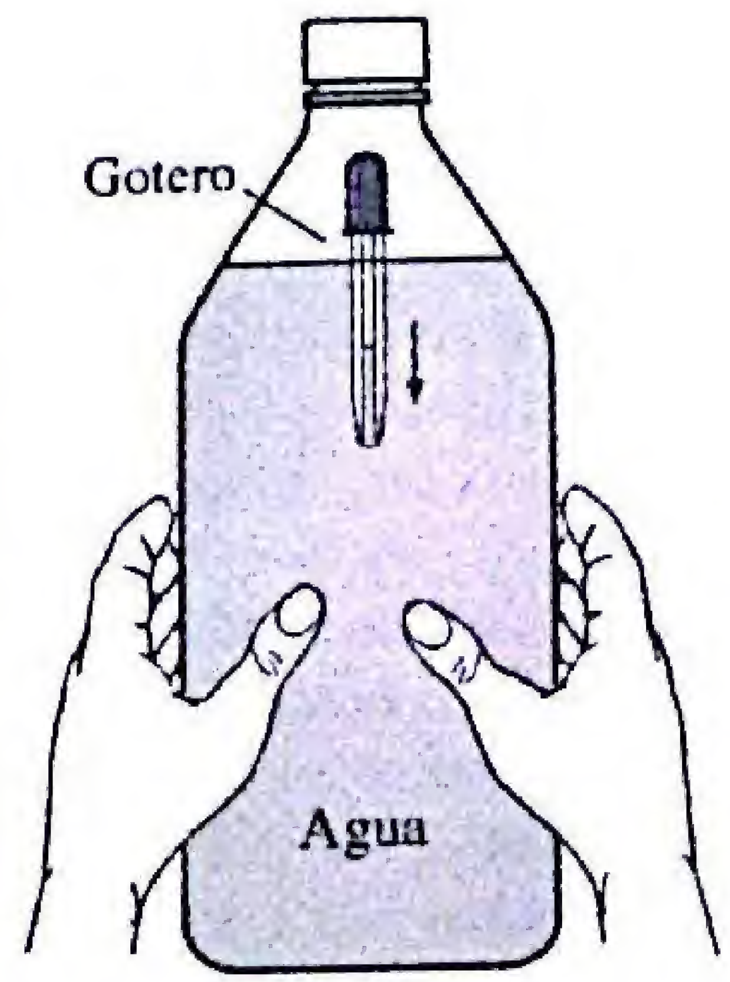
a) 1500 kg/m^3 b) 1300 kg/m^3 c) 1200 kg/m^3

d) 950 kg/m^3 e) 875 kg/m^3

PR-1.32. *El gotero buzo*

En el siglo XVII René Descartes inventó el llamado *buzo cartesiano* para ilustrar la transmisión de la presión en los fluidos. En la versión que usamos en las demostraciones de clase, este lo hacemos con una botella plástica de refresco llena de agua y un gotero de vidrio con su perilla de goma. Primero llenamos el gotero con agua hasta que justamente flote, quedando algo de aire en su interior, y luego cerramos la botella con su tapa. Si ahora apretamos la botella con las manos, el gotero se hundirá. Si dejamos de presionar, el gotero ascenderá. De este modo podemos hacer ascender o descender el gotero a voluntad.

La razón por la que el gotero se hunde al apretar la botella es que…



Una botella de plástico con un gotero flotando en el agua

a) El gotero es presionado en su tapa de goma por el aire que le rodea por encima.

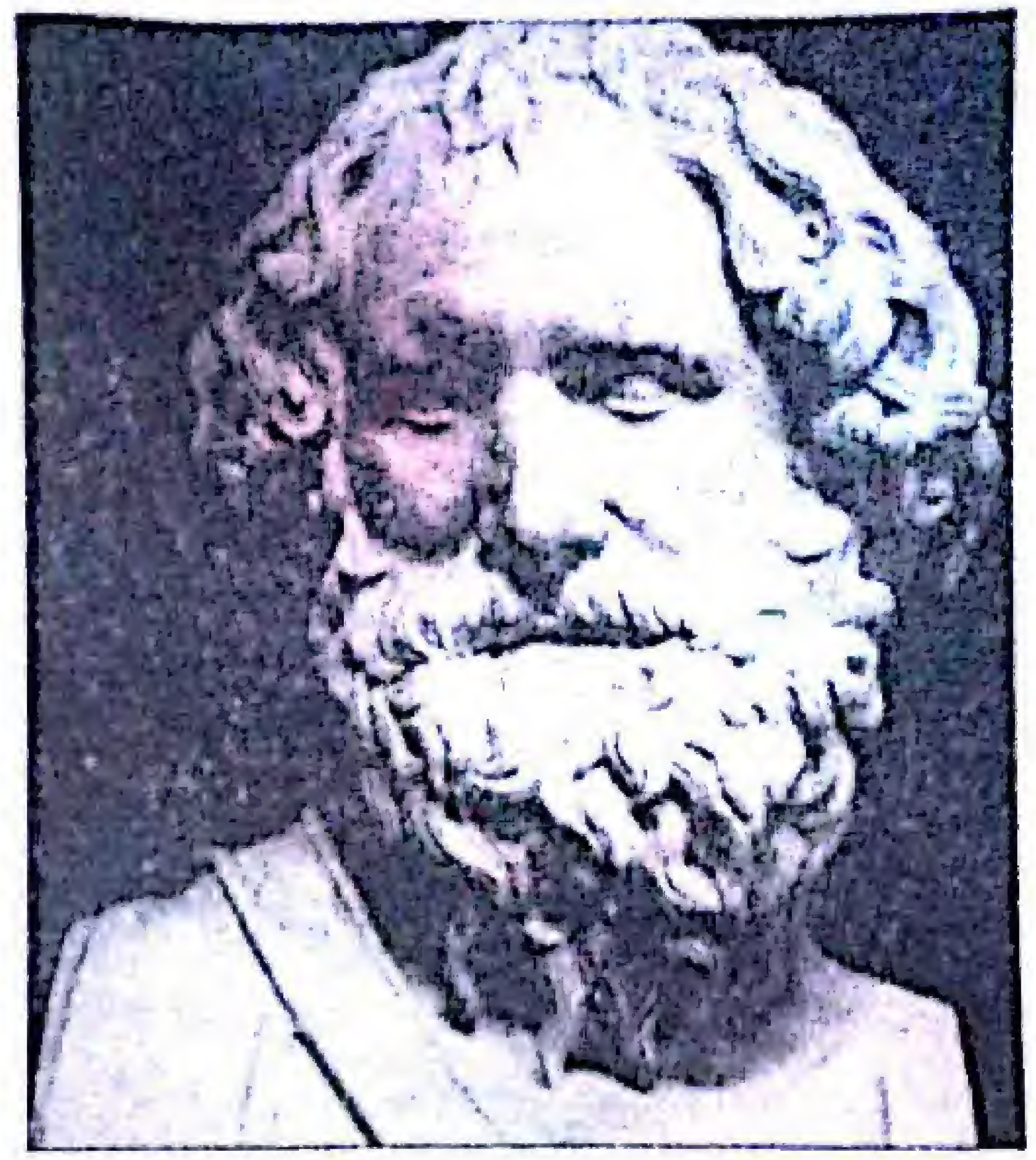
b) Al apretar la botella aumenta la presión en todo el líquido, el cual es forzado a entrar en el gotero, aumentando su densidad.

	a	b	c	d	e
1.01				✓	
1.03		✓			
1.05			✓		
1.07	✓				
1.09				✓	
1.11	✓				
1.13		✓			
1.15					✓
1.17					✓
1.19		✓			
1.21			✓		
1.23	✓				
1.25				✓	
1.27					✓
1.29				✓	
1.31			✓		

	a	b	c	d	e
1.02					✓
1.04			✓		
1.06			✓		
1.08		✓			
1.10	✓				
1.12			✓		
1.14				✓	
1.16			✓		
1.18	✓				
1.20					✓
1.22		✓			
1.24				✓	
1.26				✓	
1.28			✓		
1.30			✓		
1.32		✓			

ARQUÍMEDES

287 - 212 AC



Físico y matemático nacido en Siracusa, capital de la antigua colonia griega de Sicilia; es considerado el científico más valioso de la antigüedad. Como hijo de un astrónomo se interesó desde muy joven por la matemática, a la cual hizo importantes contribuciones. El descubrimiento en física mas conocido de Arquímedes constituye uno de los más fecundos principios de la hidrostática que hoy lleva su nombre: *todo cuerpo sumergido en un líquido sufre un empuje igual al peso del líquido que desaloja*. Se cuenta que Arquímedes dio con este principio cuando el rey Hieron, quien era su pariente y amigo, sospechaba que la corona que había encargado a un orfebre, no era realmente de oro puro. El rey pidió a Arquímedes si era posible descubrir si la corona estaba adulterada con plata; pero conservándola intacta. Arquímedes estaba un dia en los baños públicos cuando al meterse en la bañera notó una pérdida parcial de su peso después de sumergir sus brazos y piernas en el agua. Al darse cuenta que podía resolver el problema que le preocupaba, fue tanto el entusiasmo y emoción que salió corriendo completamente desnudo por las calles de Siracusa, mientras gritaba, *¡Eureka! ¡Eureka!* (en griego, lo encontré). Arquímedes está considerado como el padre de la ciencia mecánica. Se le atribuye una gran cantidad de inventos entre los cuales destaca la rueda dentada y el tornillo de Arquímedes, un tornillo sinfín, para elevar el agua que consiste de una tubería helicoidal inclinada que gira mediante una manivela. Construyó sistemas de palancas y poleas para desplazar grandes barcos sobre la arena, sin realizar un gran esfuerzo. Se le atribuye la frase: *Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo*. Cuando los romanos sitiaron Siracusa, Arquímedes ideó una serie de artefactos de guerra, como catapultas que arrojaban lluvias de proyectiles, sembrando el pánico en el ejército invasor del general Marcelo. Por medio de enormes espejos cóncavos concentraba los rayos del sol para incendiar a distancia los barcos de la escuadra romana. Así lograron defender la ciudad por mas de tres años, hasta que finalmente sucumbió por hambre y fue capturada por las legiones romanas que se dedicaron al pillaje. Un destacamento de soldados irrumpió en la casa de Arquímedes que estaba absorto en el patio trasero resolviendo un problema de geometría mediante el trazado de ciertas figuras en la arena. *!Noli tangere circulos meos!* (No toques mis círculos), gritó Arquímedes a uno de lo soldados que pisó las figuras. Pero en respuesta, el soldado indignado traspasó con su lanza el cuerpo del anciano sabio. Había quitado la vida sin saberlo a Arquímedes, el ingeniero militar responsable de haber mantenido a raya al poderoso ejército invasor.

2

DINÁMICA DE FLUIDOS

El estudio del movimiento de los fluidos o hidrodinámica, es uno de los temas más complejos de la mecánica, debido a la gran diversidad de fenómenos que pueden presentarse y que resultan difíciles de analizar. Sin embargo, es posible comprender una variedad de fenómenos cotidianos y llegar a describir cualitativamente muchos aspectos interesantes si restringimos nuestro estudio a los fluidos ideales. Un fluido ideal es aquel que es no viscoso e incompresible y que fluye de manera uniforme, sin turbulencia. En este capítulo se aplicarán las ideas básicas de la mecánica para obtener dos resultados importantes en relación al flujo de fluidos, estos son: la ecuación de continuidad y la ecuación de Bernoulli. La *ecuación de continuidad* se deriva de la conservación de la masa y expresa que en estado estacionario el flujo de volumen es el mismo en todo el fluido. La *ecuación de Bernoulli* se aplica a un fluido no viscoso en que se conserva la energía mecánica y expresa que la suma de la presión, la energía cinética por unidad de volumen y la energía potencial gravitacional por unidad de volumen, tiene el mismo valor en todos los puntos. Los fluidos reales, debido a la fricción entre sus moléculas presentan una cierta resistencia al flujo, la cual se describe mediante un coeficiente de viscosidad. A causa del arrastre friccional con las paredes del tubo la velocidad del fluido resulta menor cerca de las paredes. De acuerdo a la ecuación de *Poiseuille* la caída de presión de un fluido incomprensible en el interior de un tubo cilíndrico en régimen laminar resulta proporcional a la viscosidad y a la longitud del tubo e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo. Una aplicación de esta espectacular dependencia con el radio es la importante consecuencia que tiene en la circulación de la sangre en el cuerpo humano.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Fluido ideal en movimiento
- Líneas de corriente
- Gasto y ecuación de continuidad
- Ecuación de Bernoulli
- Viscosidad
- Ecuación de Poiseuille
- Flujo laminar y flujo turbulento
- Fluidos no newtonianos
- Turbulencia y número de Reynolds

FLUIDO IDEAL EN MOVIMIENTO

Para el estudio de un fluido en movimiento, en lugar de intentar seguir la historia de lo que suceda a cada partícula individual según se mueva de un punto a otro, lo que hacemos es enfocar nuestra atención en un punto fijo del espacio. Las partículas del fluido pasan por ese punto, dejando paso a nuevas partículas y se describe el movimiento del fluido especificando la densidad $\rho(r,t)$ y la velocidad $v(r,t)$ en el punto particular y en ese instante determinado.

Como el comportamiento de un fluido real puede ser muy complejo, para simplificar su descripción, ignoramos cualquier complicación existente y consideraremos un fluido ideal el cual presenta cuatro características:

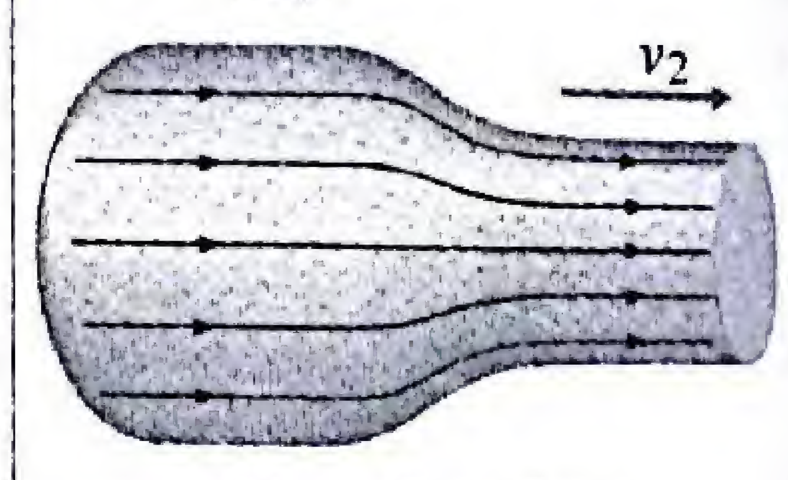
Incompresible, estacionario, irrotacional y no viscoso.

Un fluido ideal es:

1. *Incompresible*: Su densidad ρ es constante en todo punto.
2. *Estacionario*: La velocidad en un punto permanece constante en el transcurso del tiempo.
3. *Irrotacional*: Sin torbellinos, es decir, sin momento angular respecto a cualquier punto.
4. *No viscoso*: Sin fricción interna entre sus distintas partes.

LÍNEAS DE CORRIENTE

Una partícula de un fluido en movimiento sigue una determinada trayectoria llamada *línea de corriente*. En general, la velocidad de una partícula puede cambiar a lo largo de su línea de corriente. El vector velocidad de una partícula en un punto, $\vec{v}(r,t)$, es tangente a la línea de corriente en ese punto.

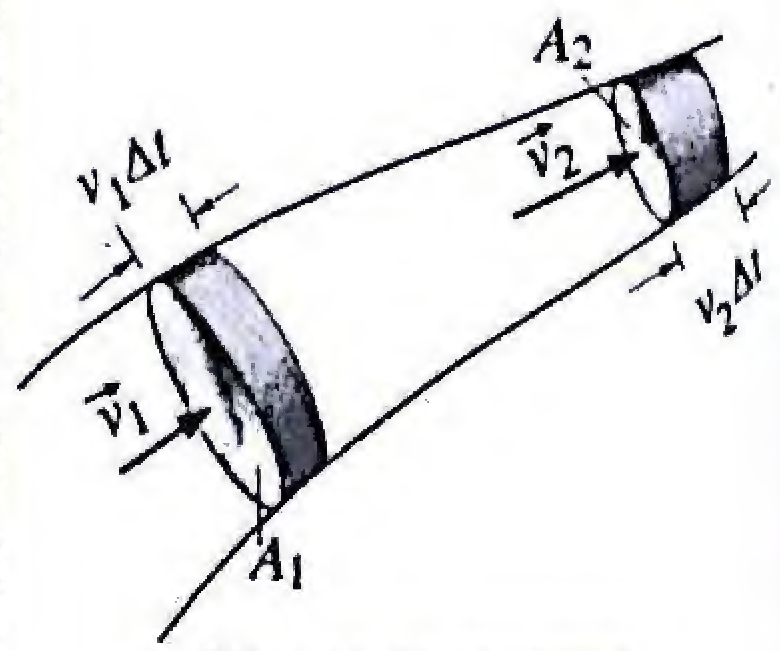


Líneas de corriente

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Cuando un haz de líneas de corriente pasa a través de un elemento de área perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, define lo que se denomina un *tubo de corriente*.

En un pequeño intervalo de tiempo Δt, por una sección de área A_1, se desplazará una porción de fluido en una distancia $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$. La masa desplazada es:



Un tubo de corriente

$$\Delta m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

Siendo ρ la densidad (que se supone constante). Durante el mismo intervalo de tiempo, el fluido que se mueve en el otro extremo de área A_2 tiene una masa:

$$\Delta m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

Como la masa se conserva y en virtud de que el flujo es estacionario, la masa que cruza A_2 debe ser igual a la que cruza A_1. Por tanto $\Delta m_2 = \Delta m_1$ y se tiene:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = constante$$

Ecuación de continuidad:

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

El producto del área por la rapidez del fluido en cualquier punto es una constante.

FLUJO DE VOLUMEN O GASTO

El producto $Q = Av$, que tiene dimensiones de volumen dividido por el tiempo (por ejemplo, litros por minuto), representa el volumen del fluido por la unidad de tiempo que atraviesa una determinada sección y se denomina *flujo de volumen* o *gasto*.

Que el gasto sea constante equivale a suponer que no hay fugas y por lo tanto, la cantidad de fluido que entra por un extremo del tubo en un intervalo de tiempo es igual a la cantidad que sale en el mismo intervalo.

Flujo de volumen o gasto (m^3/s)

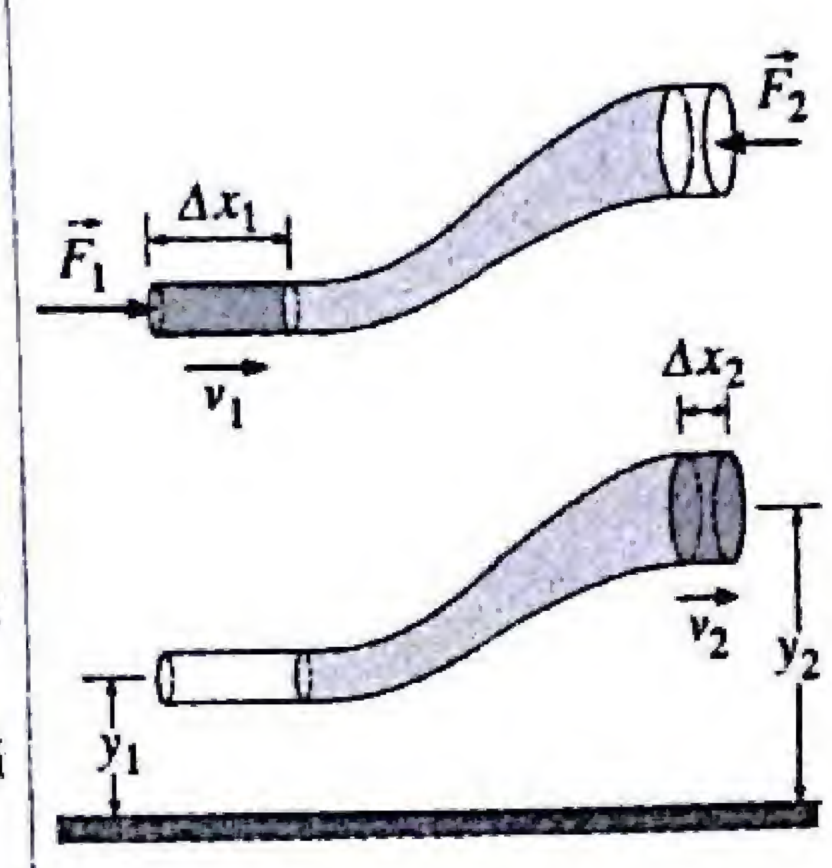
$$\boxed{Q = Av}$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Consideremos el tubo con fluido que varía tanto en altura como en sección transversal. El elemento de longitud Δx_1 y área A_1 está a una altura y_1 y se mueve a rapidez v_1. Al cabo de un tiempo el perfil del fluido en la parte de arriba llena la región de longitud Δx_2, área A_2 y altura y_2 y se moverá a rapidez v_2.

El fluido a la izquierda (no mostrado) ejercerá una fuerza $\vec{F}_1$ que presiona el sistema hacia la derecha y sobre la parte superior el fluido adyacente (no mostrado) ejercerá una fuerza opuesta, $\vec{F}_2$. El trabajo neto hecho sobre el sistema por las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es:

$$W = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$$



Un tubo con fluido de sección transversal variable

$$W = P_1A_1\Delta x_1 - P_2A_2\Delta x_2 = (P_1 - P_2)\Delta V$$

El volumen del elemento de fluido es:

$$\Delta V = A_1\Delta x_1 = A_2\Delta x_2$$

Los cambios correspondientes en energía cinética y potencial de la porción de fluido de masa Δm son:

$$\Delta U = \Delta m(y_2 - y_1)g \qquad \Delta K = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2)$$

Estos cambios ocurren a causa del trabajo neto hecho sobre el sistema:

$$W = \Delta U + \Delta K$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para W, ΔU y ΔK:

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \Delta m(y_2 - y_1)g + \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2)$$

Como la densidad (constante) es $\rho = \Delta m/\Delta V$, sustituimos en esta expresión: $\Delta m = \rho\Delta V$, y simplificando, se obtiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Ecuación de Bernoulli

$$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}}$$

Esta es la famosa *ecuación de Bernoulli*: "La suma de la presión P, la energía cinética por unidad de volumen ($\rho v^2/2$), y la energía potencial gravitacional por unidad de volumen ($\rho g y$), tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente"

Cuando el fluido se encuentra en reposo: $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación toma la forma:

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g h$$

Caso particular:
Fluido estático

$$\boxed{P_1 - P_2 = \Delta P = \rho g h}$$

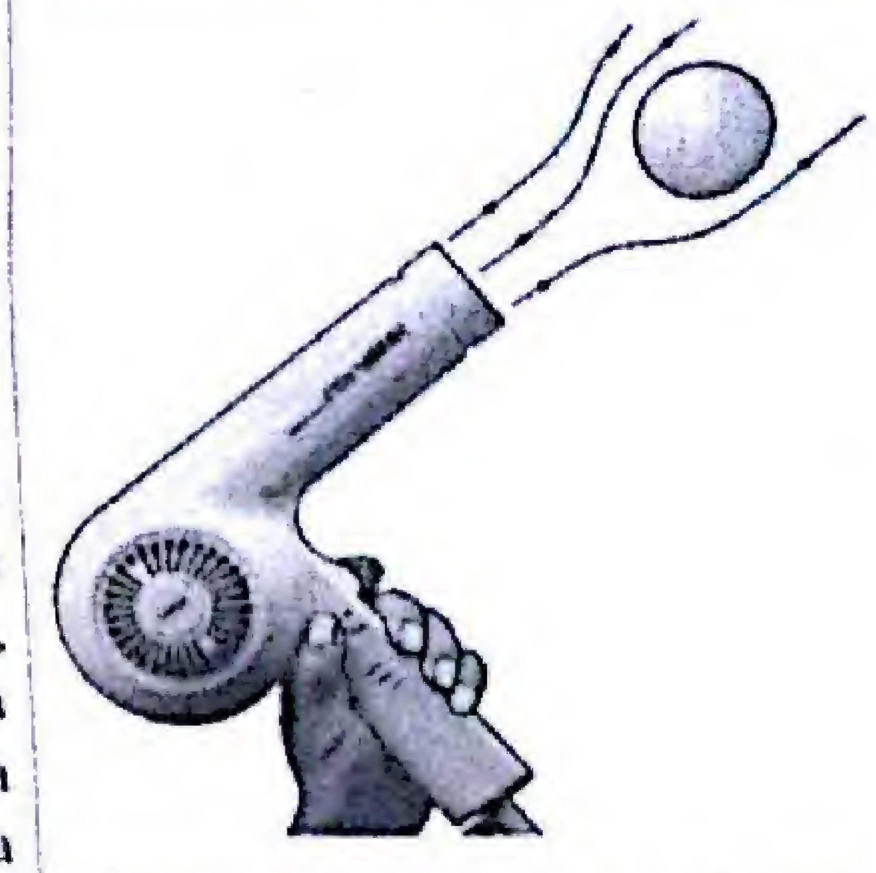
Que es justamente la expresión que hemos utilizado para la estática de fluidos.

APLICACIONES DEL EFECTO BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli es estrictamente válida para un fluido ideal. Sin embargo, permite explicar de manera cualitativa una gran variedad de fenómenos cotidianos.

Por ejemplo, en una demostración de aula, mostramos como podemos mantener suspendida una pelota ligera por la acción de un chorro de aire. La pelota se mueve un poco pero siempre regresa al centro del chorro, aunque éste no esté vertical. ¿Por qué sucede esto?

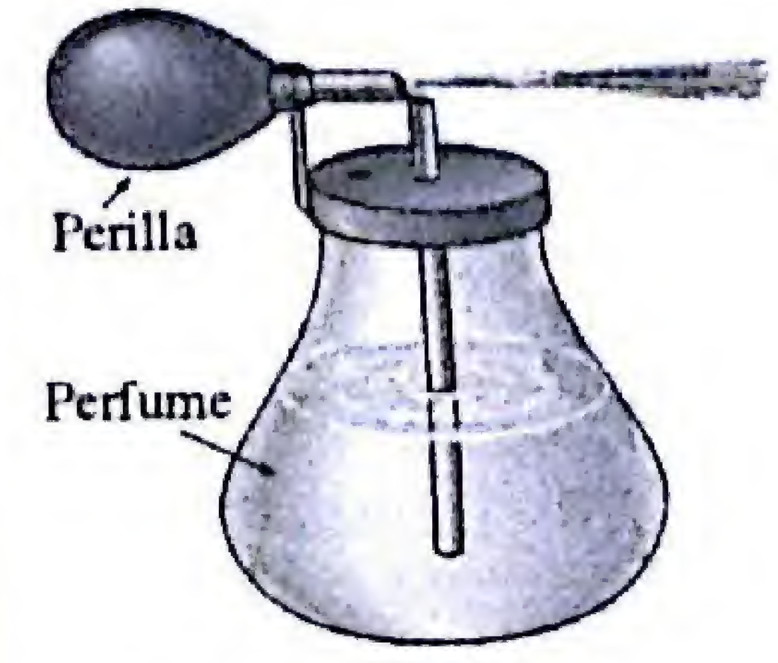
La explicación es simple. Supongamos que la pelota trata de alejarse del chorro de aire, es decir, se mueve hacia donde el aire esta quieto. Según la ecuación de Bernoulli, allí la presión será mayor, y por lo tanto la pelota experimenta siempre una fuerza neta que tiende a regresarla de nuevo hacia el chorro de aire donde la presión es menor.



Pelota que flota en un chorro de aire

Otro ejemplo familiar donde se aplica la ecuación de Bernoulli es el pulverizador que se utiliza en las pistolas para pintar y en las botellas de perfume.

Cuando se aprieta la perilla de goma en la botella de perfume, una corriente de aire pasa sobre la boca de un tubo vertical que reduce la presión encima del tubo. Como la presión allí es menor que la presión atmosférica, el líquido contenido en el depósito se eleva y se ve forzado a introducirse en la corriente de aire para ser arrastrado, dando como resultado un fino rocío de diminutas gotas.

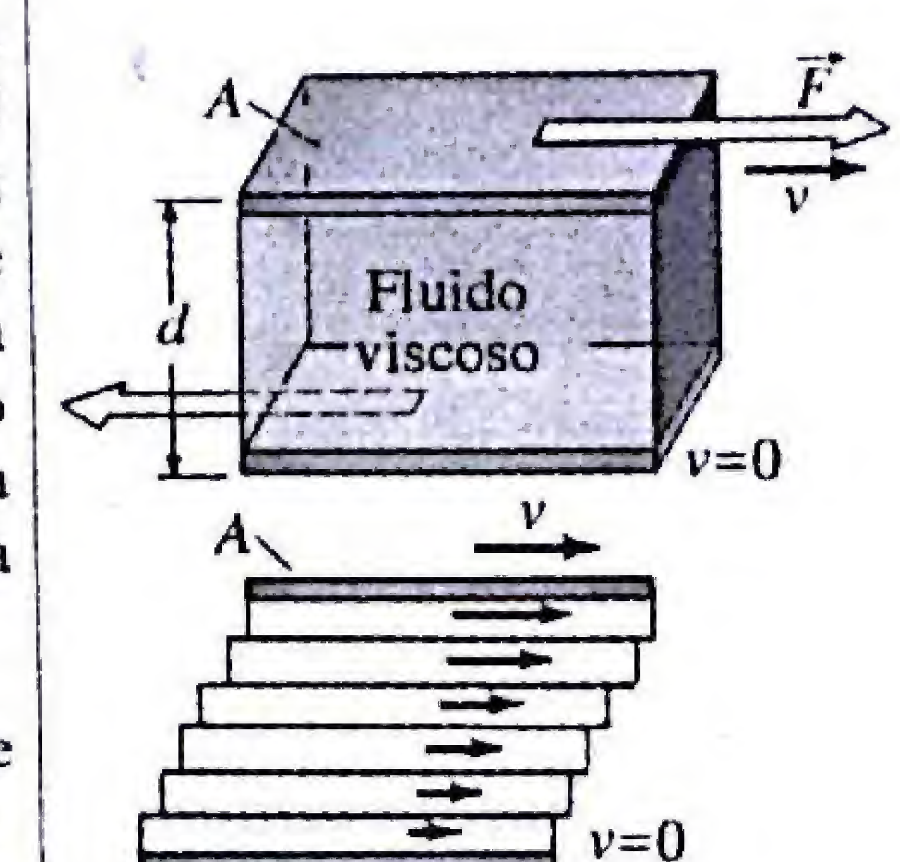


Pulverizador de perfume

FLUIDOS REALES Y VISCOSIDAD

Según la ecuación de Bernoulli, en un fluido que fluye de manera estacionaria a lo largo de una tubería horizontal de sección constante, la presión debe ser constante. Sin embargo, en los fluidos reales esto no es cierto, ya que siempre hay una caída de presión ocasionada por la viscosidad del fluido. La viscosidad es el rozamiento interno entre las capas de un fluido. A causa de la viscosidad, es necesario ejercer una fuerza para obligar a una capa de fluido a deslizar sobre otra.

El grado de viscosidad se expresa mediante un coeficiente η que se define de la siguiente manera: Supongamos una capa del fluido que se coloca entre dos láminas planas, la lámina inferior está fija y la superior es móvil. Cuando se le imprime un movimiento a la lámina superior, cada capa de fluido ejercerá una fuerza de arrastre que se transmite sobre las capas adyacentes.



Fluido viscoso situado entre dos láminas iguales de área A

La capa de fluido que está en contacto con la lámina móvil tendrá la misma velocidad que ella, mientras que la capa de fluido adyacente a la pared fija estará en reposo. La velocidad de las distintas capas intermedias aumenta uniformemente entre ambas láminas, como lo sugieren las flechas que se muestran en el dibujo. Un flujo de este tipo se denomina *laminar*.

Para mover la placa superior a una velocidad v se requiere aplicar una fuerza tangencial, F. Para un fluido dado, se encuentra que esta fuerza resulta proporcional al área A de las láminas, a la velocidad v e inversamente proporcional a la separación d entre las láminas. El coeficiente de viscosidad η se define por la constante de proporcionalidad en la relación:

$$F = \eta A \frac{v}{d}$$

La unidad de viscosidad en el SI es el pascal-segundo:

$$[\eta] = \mathrm{N.s/m^2} = \mathrm{Pa{\cdot}s}$$

Coeficiente de viscosidad

$$\boxed{\eta = \frac{F/A}{v/d}}$$

Coeficientes de viscosidad típicos a 20°C, η (Pa.s)

Aire:	$1{,}8\times10^{-5}$
Agua:	$1{,}0\times10^{-3}$
Sangre:	4×10^{-3}
Glicerina:	0.83

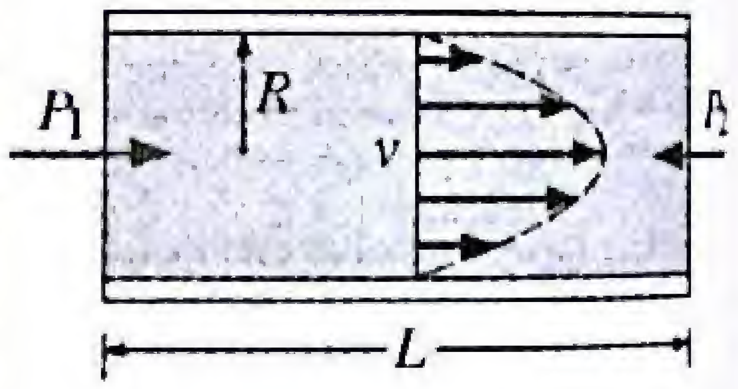
LA LEY DE POISEUILLE

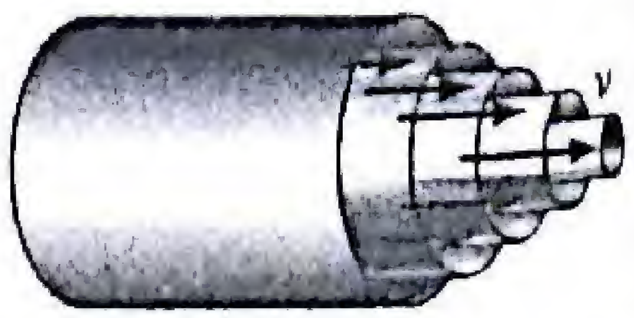
Según la ecuación de Bernoulli, un fluido no viscoso podría fluir por un tubo horizontal sin necesidad de aplicarle presión. Sin embargo, cuando el fluido es viscoso, para establecer un flujo estacionario se necesita aplicar una diferencia de presión en los extremos del tubo. Esta situación fue investigada por el médico francés J. L. Poisouille (1799-1869) en los estudios que llevó a cabo sobre la circulación de la sangre.

Poisouille determinó que en un fluido sometido a un flujo laminar estacionario, a través de un tubo cilíndrico de radio interior R y de longitud L, el volumen de fluido que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo o *gasto*, está dado por la expresión (Problema PR-2.39):

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{L} \quad (\mathrm{m^3/s})$$

Donde $(P_1 - P_2)$ es la diferencia de presión entre los extremos del tubo y η la viscosidad del fluido.





Variación de la velocidad de un fluido desde las paredes hasta el centro de un tubo de radio R

Ecuación de Poisouille

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{L}}$$

La predicción mas significativa de la ley de Poiseuille es la espectacular dependencia del gasto con respecto a la cuarta potencia del radio R del tubo.

LA LEY DE POISEUILLE Y LA LEY DE OHM

Recordemos que en electricidad la ley de Ohm expresa la proporcionalidad entre la corriente eléctrica $I = dq/dt$ y la diferencia de potencial aplicada $(V_1 - V_2)$ en una resistencia R:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

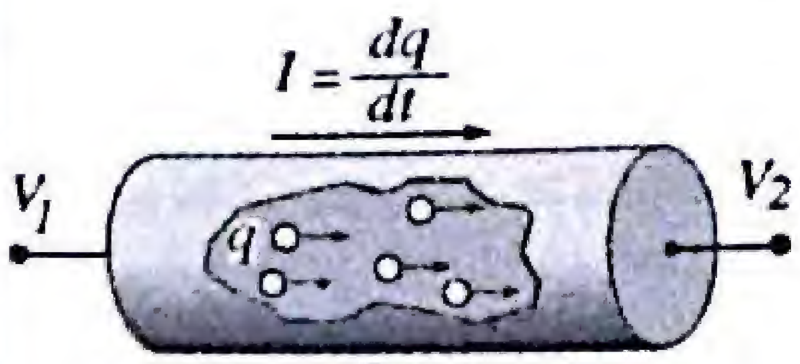
En *analogía*, podemos expresar la ley de Poiseuille como una proporcionalidad entre la tasa de flujo de volumen $Q = dV/dt$ y la diferencia de presión aplicada en los extremos de una tubería, $(P_1 - P_2)$:

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

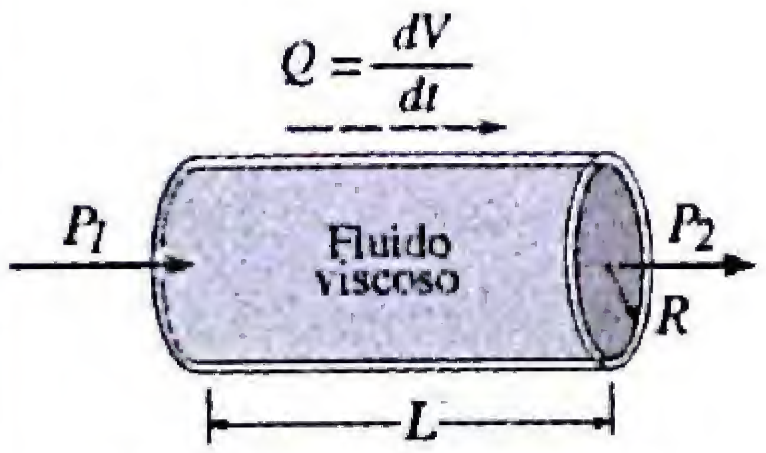
En esta analogía podemos decir que la cantidad:

$$R = \frac{8}{\pi}\frac{\eta L}{R^4}$$

que depende de la naturaleza del fluido y de la geometría del tubo, juega el papel de la resistencia eléctrica.



Corriente eléctrica en una resistencia



Fluido viscoso en un tubo

FLUIDOS NO NEWTONIANOS

En un fluido newtoniano existe una relación lineal entre la presión aplicada y la deformación que ésta produce en el fluido, es decir, la viscosidad es constante. Por el contrario, en los fluidos no-newtonianos, la viscosidad no es constante y varía según la presión aplicada.

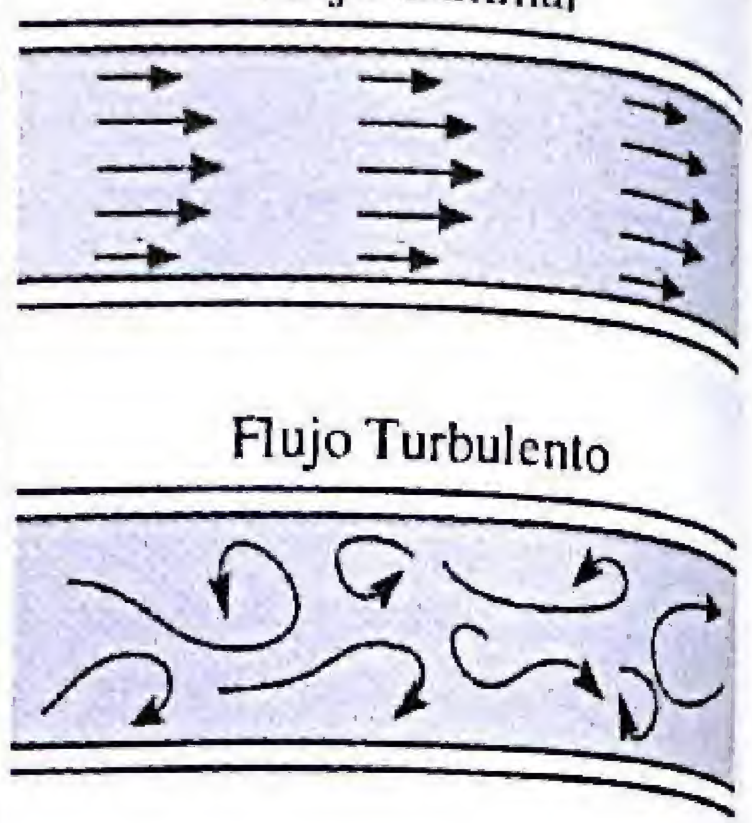
Como ejemplo, la salsa de tomate ketchup se comporta como un fluido no-newtoniano; cuando está en reposo resulta difícil sacarla de la botella, pero si la sacudimos fuertemente, podemos hacerla fluir. Otro ejemplo de fluido no newtoniano es la mezcla de maizena y agua, pero su comportamiento es opuesto al de la salsa ketchup. Cuando está en reposo es parecido a un líquido pero cuando la agitamos o golpeamos se vuelve muy viscosa y es mas parecida a un sólido.

Fluidos no-newtonianos: la viscosidad no es constante

En un fluido no-newtoniano no se cumple la ley de Poisouille

TURBULENCIA Y NÚMERO DE REYNOLDS

La ley de Poiseuille se aplica sólo al flujo laminar, es decir, cuando el movimiento ocurre como si un conjunto de láminas fluyera una sobre otra. Cuando la velocidad v del fluido rebasa cierta valor crítico, la resistencia al flujo es mayor, el flujo deja de ser laminar y se transforma en turbulento. El flujo es altamente irregular y se producen remolinos. La distinción entre los dos tipos de flujos fue establecida por Reynolds en 1883, quien encontró que para un fluido de densidad ρ y viscosidad η en un tubo de radio R y de paredes lisas, se observará turbulencia para valores dados aproximadamente por:



$$N_R = \frac{\rho v R}{\eta} > 2000$$

Siendo N_R el número de Reynolds.

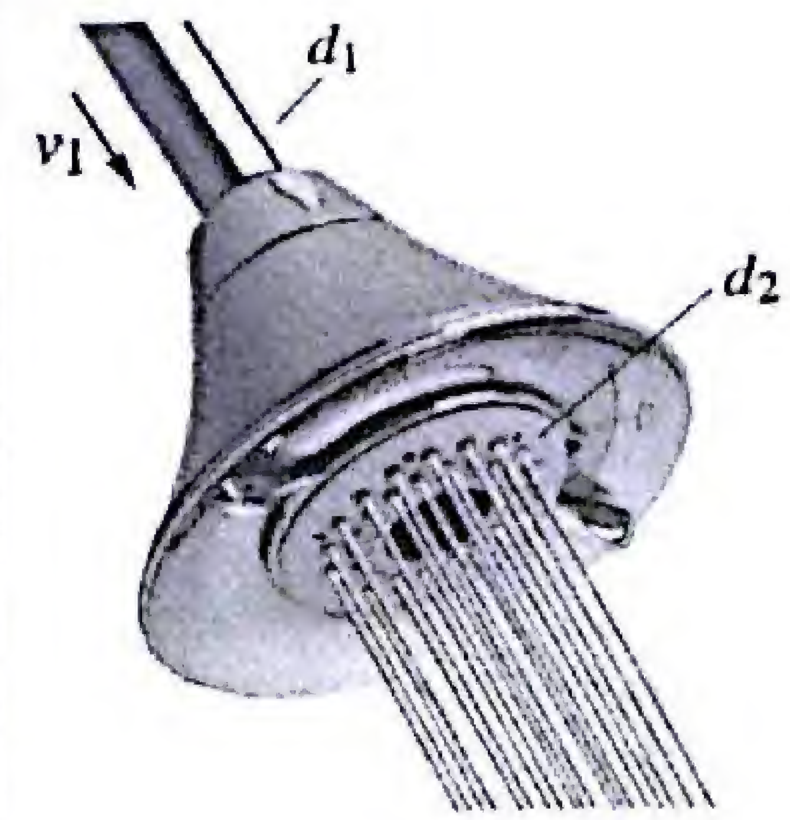
Se observa que para fluidos muy viscosos (como los aceites) la velocidad crítica necesaria para alcanzar el régimen turbulento es tan elevada que este, siempre fluye en régimen laminar

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-2.01. ***Velocidad del agua en los orificios de la ducha***

Una ducha de agua que tiene 36 orificios, cada uno de 0,05 pulgadas de diámetro, está conectada a una tubería cuyo diámetro interno es 3/4 pulgada. Si el agua de la tubería corre a una velocidad de 10 m/s, ¿a qué velocidad sale el agua por los orificios?

Solución: Las áreas de la tubería y de cada agujero son, respectivamente:



$$A_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 \qquad A_2 = \frac{1}{4}\pi d_2^2$$

Si aplicamos la ecuación de continuidad, se tiene:

$$A_1 v_1 = 36 A_2 v_2$$

Despejando, se obtiene la velocidad con que sale el agua por cada agujero:

$$v_2 = \frac{1}{36}\frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{1}{36}\frac{\pi d_1^2/4}{\pi d_2^2/4}v_1 = \frac{1}{36}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1$$

$$v_2 = \frac{1}{36}\left(\frac{0{,}75\text{pulg}}{0{,}05\text{pulg}}\right)^2(10\text{m/s}) = 62{,}5\text{m/s}$$

Respuesta:

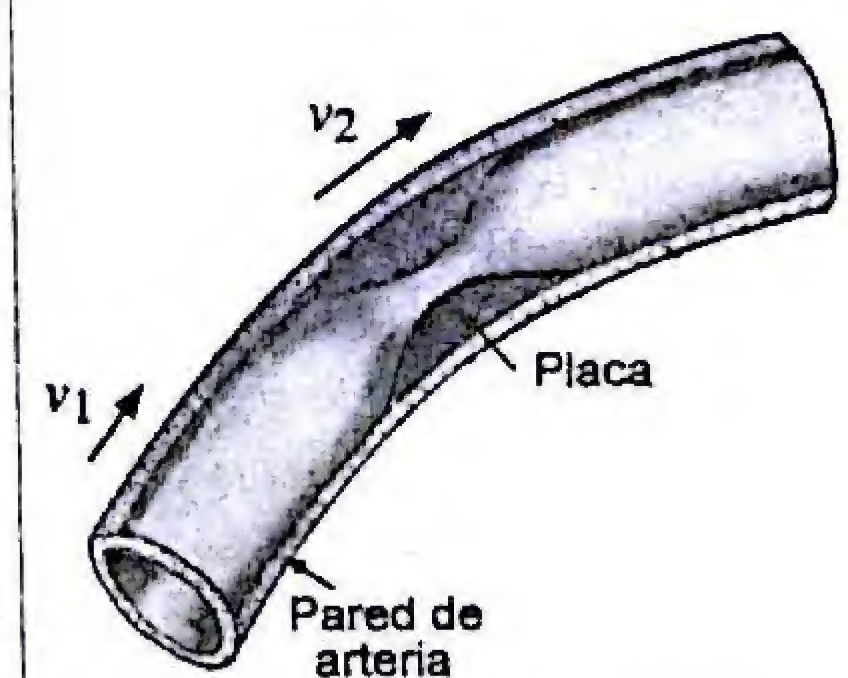
$\boxed{v_2 = 62{,}5\text{m/s}}$

PR-2.02. ***Arterioesclerosis: Estrechamiento de arterias***

La arterioesclerosis es una enfermedad degenerativa debida a la acumulación interna de placas en la arteria, produciendo un engrosamiento en sus paredes y el estrechamiento del conducto. Supongamos una arteria de radio $r_1 = 0{,}6$ cm por la que circula la sangre a velocidad $v_1 = 10$ cm/s y en cierta porción se le ha formado una placa que reduce su radio efectivo a $r_2 = 0{,}4$ cm.

a) ¿Cuántos litros por minuto está bombeando el corazón por esta arteria?

b) ¿Cuál es la velocidad de la sangre en la zona afectada?



Estrechamiento de una arteria

Solución: a) El flujo de volumen de la sangre es:

$$Q = v_1 A_1 = (0{,}1\,m/s)\pi(0{,}006m)^2 = 1{,}13x10^{-5}m^3/s$$

Como un litro es equivalente a 10^{-3} metros cúbicos y un minuto son 60 segundos, se obtiene:

$$Q = (1{,}13X10^{-5}\frac{m^3}{s})(\frac{1litro}{10^{-3}m^3})(\frac{60s}{min}) = 0{,}678\frac{litros}{min}$$

b) Aplicando la ecuación de continuidad:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

se obtiene:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(0{,}006m)^2}{\pi(0{,}004m)^2}(0{,}1\frac{m}{s}) = 0{,}225\frac{m}{s}$$

En la zona obstruida, la sangre debe viajar mas rápido y para mantener una tasa de flujo constante la presión impulsora debe aumentar, con lo cual la arteria podría colapsarse, causando una interrupción momentánea del flujo sanguíneo. La detección de estas alteraciones del flujo sanguíneo con un estetoscopio es un síntoma típico de una persona con arteriosclerosis avanzada.

Respuesta:

a) $Q = 0{,}678$ litros/min
b) $v_2 = 0{,}225$ m/s

PR-2.03. *Las jirafas tienen un gran corazón*

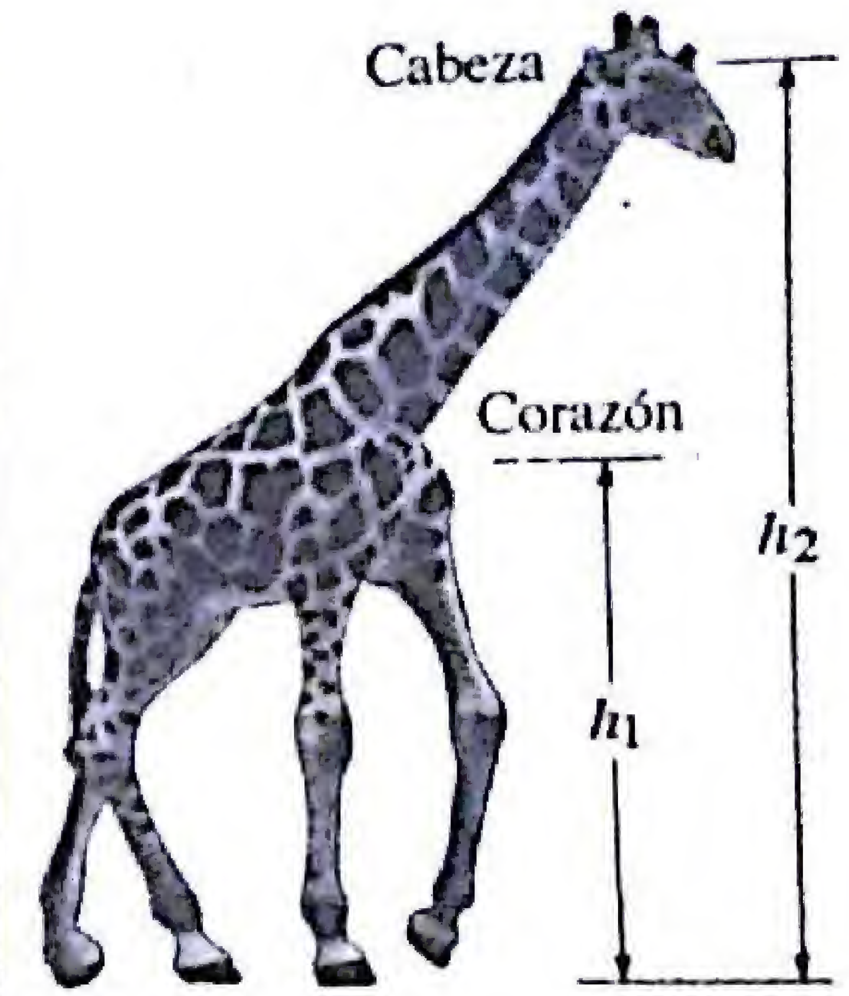
Entre los mamíferos, la jirafa es el animal que soporta la mayor presión arterial. Esto se debe a que tienen un cuello muy largo que hace que su cabeza esté a unos 3 metros por encima del nivel del corazón y para que la sangre fluya satisfactoriamente a través del cerebro, hace falta una presión allí de cerca de 60 mm de Hg. Si la densidad de la sangre es: $\rho = 1050$ kg/m^3, ¿cuál debe ser la presión sanguínea a la salida del corazón de la jirafa?

Solución: Supongamos que la arteria que va del corazón a la cabeza tiene una sección transversal constante. Como la sangre es un fluido incompresible, escribimos la ecuación de continuidad:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Esto implica que su velocidad es igual en el corazón que en la cabeza ($v_1 = v_2$). La ecuación de Bernoulli queda:

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$



La diferencia de presión de la sangre entre el corazón y la cabeza será:

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

$$p_1 - p_2 = (1050\ kg/m^3)(9{,}8\ m/s^2)(3\ m) = 30870\ Pa$$

Tomando en cuenta que $1{,}013x10^5$ Pa equivale a una presión de 760 mm de mercurio, esta diferencia de presión será, en mm de Hg:

$$p_1 - p_2 = (30870Pa)(\frac{760\ mm}{1{,}013x10^5Pa}) = 232mm\ de\ Hg$$

La presión del corazón será:

$$p_1 = p_2 + 232mm = 60mm + 232mm = 292\ mm\ de\ Hg$$

Este valor de la presión casi triplica el valor normal de la presión arterial humana.

Respuesta:

$p_1 = 292$ mm de Hg

PR-2.04. *El agua que cae del grifo se estrecha al caer*

Desde una llave sale verticalmente un chorro de agua, el cual se va estrechando a medida que va cayendo. Se observa que para dos secciones del chorro que están separadas por una distancia vertical h = 3 cm, los diámetros respectivos son: d_1 = 1 cm y d_2 = 0.5 cm.

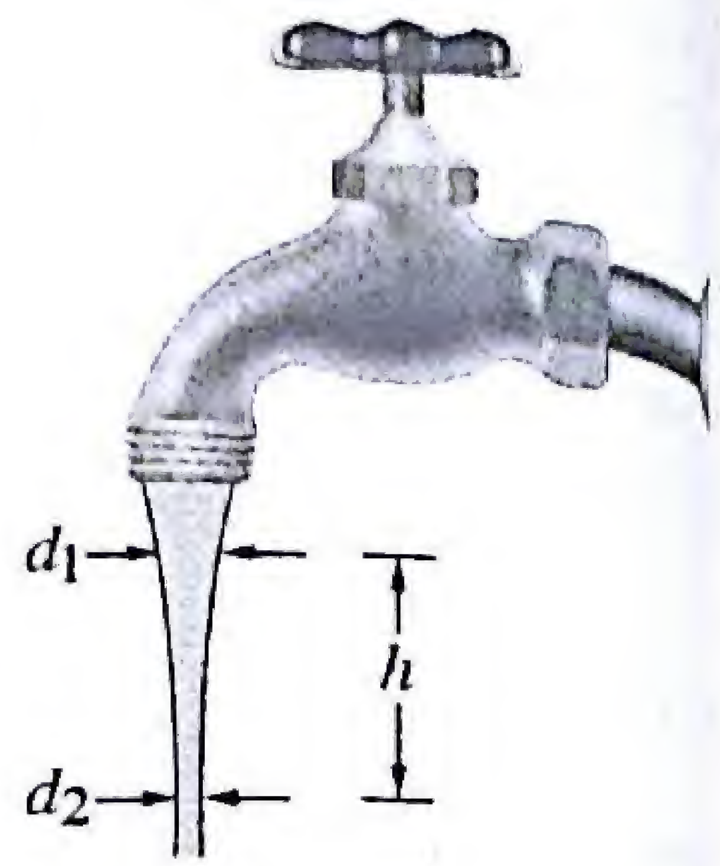
a) ¿Por qué el diámetro del chorro se va reduciendo a medida que va cayendo?

b) ¿Cuántos litros de agua por segundo están saliendo?

Solución: a) Por cada sección transversal del chorro pasa la misma cantidad de litros de agua por segundo. Como el agua está acelerada por la gravedad, a medida que cae, su rapidez va aumentando y por consiguiente, el área transversal debe ir disminuyendo, según la ecuación de continuidad. Además, el agua no se desparrama ya que se mantiene unida por la tensión superficial.

b) Considerando un flujo laminar estacionario, las velocidades de las dos secciones transversales mostradas están relacionadas por la *ecuación de continuidad*:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1 (A_1 / A_2)$$



Además, como cada elemento del agua cae libremente bajo la gravedad, se tiene:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

Igualando v_2 de estas dos ecuaciones y despejando v_1, obtenemos la siguiente relación:

$$\sqrt{v_1^2 + 2gh} = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Despejando v_1 se obtiene:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1 / A_2)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2gh}{(d_1 / d_2)^4 - 1}}$$

Donde hemos tomado en cuenta la relación entre área y diámetro de un círculo: $A = \pi d^2 / 4$. Sustituyendo los valores numéricos, encontramos:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(9{,}8\mathrm{m/s^2})(0{,}03\mathrm{m})}{(0{,}01/0{,}005)^4 - 1}} = 0{,}198\mathrm{m/s}$$

El flujo volumétrico o *gasto* de agua está dado por:

$$Q = A_1 v_1 = \pi r_1^2 v_1$$

$Q = \pi(0.005 \text{ m})^2(0.198 \text{ m/s}) = 1.56\text{x}10^{-5} \text{ m}^3\text{/s} = 15.6 \text{ mL/s}$

Respuesta:

$$\boxed{Q = 15.6 \text{ mL/s}}$$

PR-2.05. *Bombeo de agua en una casa*

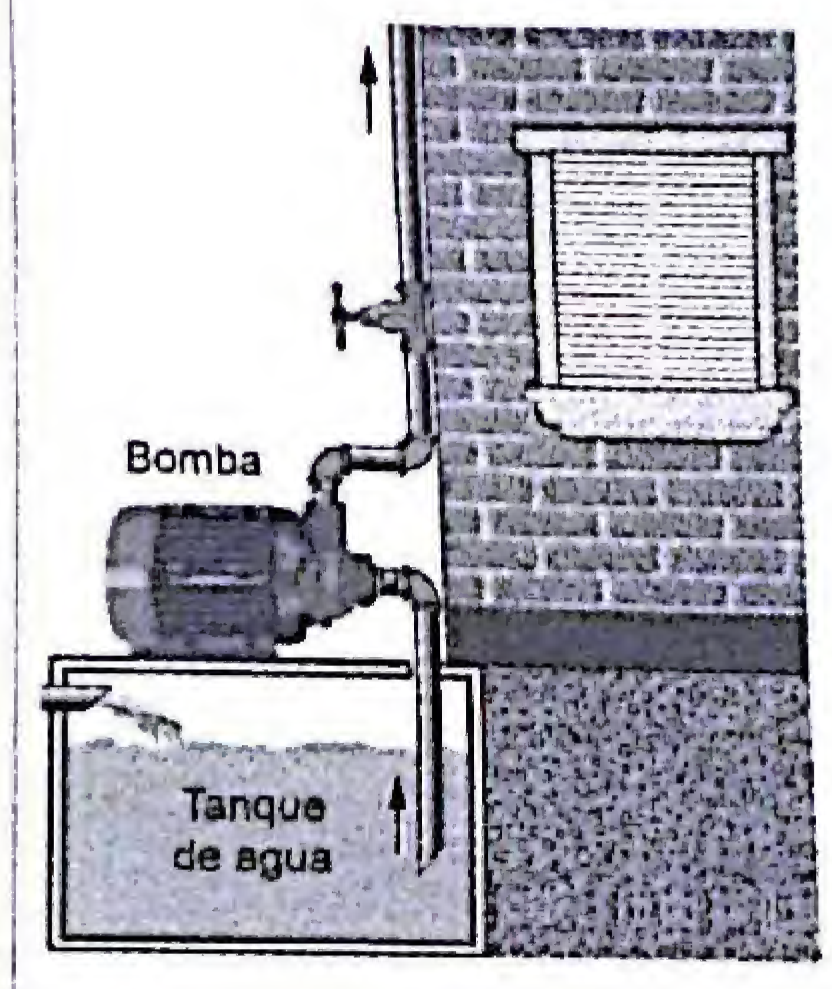
Se desea bombear agua continuamente desde un tanque subterráneo hasta la planta alta de una casa situada a una altura de 5,80 m por encima del nivel del agua en el tanque. La tubería que se usa tiene 2 cm de radio. ¿Cuál debe ser la potencia de la bomba para que el agua llegue con una velocidad $v = 7{,}5$ m/s?

Solución: Para elevar una porción de agua de masa m hasta una altura H con velocidad final v, la bomba debe realizar un trabajo:

$$W = mgH + \frac{1}{2}mv^2$$

De modo que la potencia suministrada por la bomba es:

$$P = \frac{dW}{dt} = (gH + \frac{1}{2}v^2)\frac{dm}{dt}$$



Ahora bien, el fluido que pasa por un área A a velocidad v en el intervalo dt ocupa un volumen $Adx = Avdt$. Si su densidad es ρ, entonces la masa del fluido que cruza por el área A es: $dm = \rho A v dt$ y la masa de fluido por unidad de tiempo es:

$$dm / dt = \rho A v$$

Por lo tanto la potencia requerida de la bomba es:

$$P = (gH + \frac{1}{2}v^2)\rho A v$$

Después de sustituir los valores numéricos suministrados, encontramos el valor de la potencia de bombeo:

$$P = [(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(5{,}8\mathrm{m}) + \frac{1}{2}(7{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})^2](10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3})\pi(0{,}02\mathrm{m})^2(7{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$$

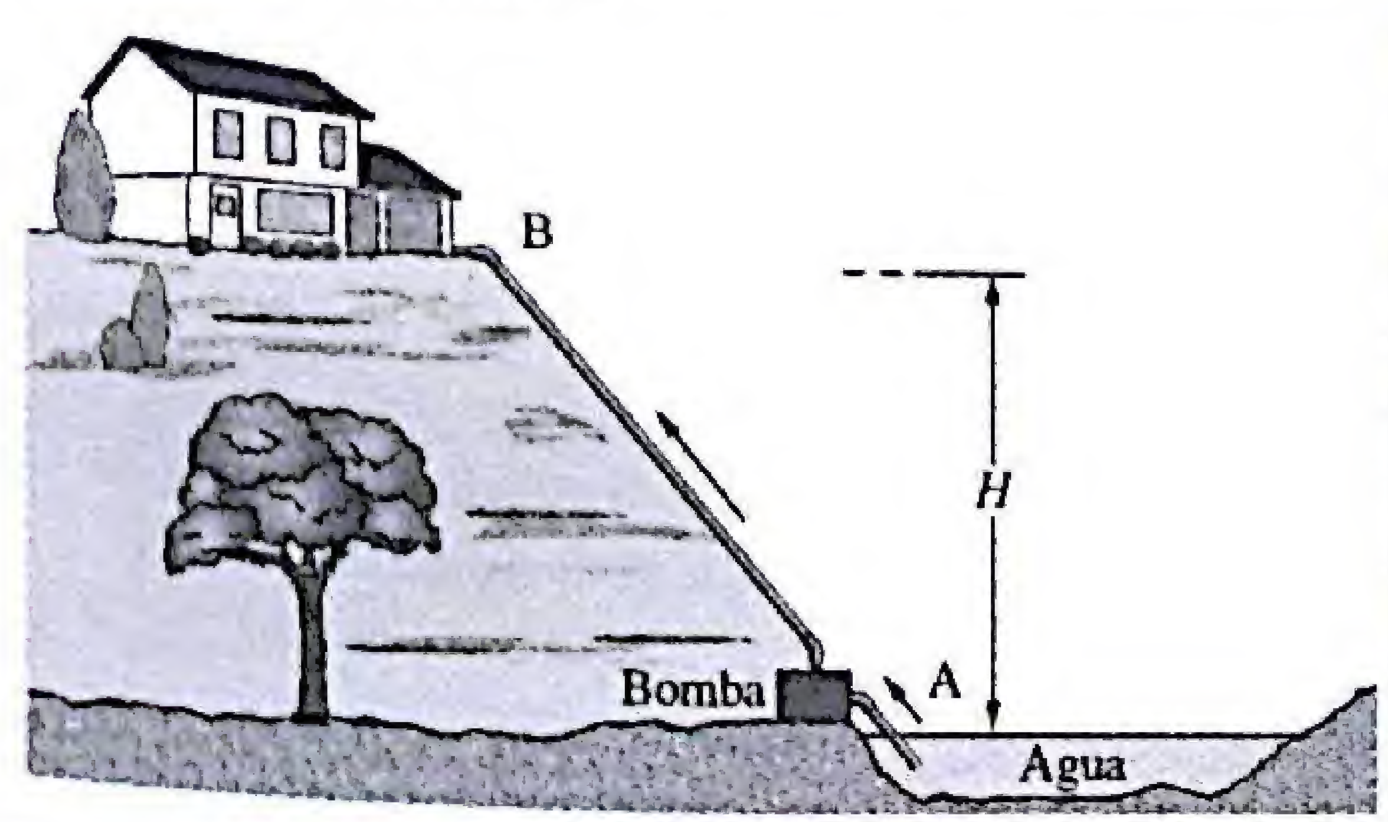
$$P = 801 \text{ W}$$

Respuesta:

$$\boxed{P = 801 \text{ W}}$$

PR-2.06. *Bombeo de agua hasta lo alto de una colina*

Se bombea agua desde un lago hasta una colina que queda a una altura $H = 1500$ m.



Si la tubería tiene un diámetro d = 16 cm:

a) ¿Cuál es la presión mínima con que debe bombearse el agua para elevarla hasta esa altura?

b) Si se bombean 50 litros por segundo, ¿cuál es la velocidad del agua en la tubería?

c) ¿Cuál es la presión adicional necesaria para bombear este flujo?

Solución: a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los niveles A y B y tomando en cuenta que: $v_A = v_B = 0$ y que $P_B = P_{atm}$, escribimos:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g(0) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho gH$$

Simplificando, encontramos la presión mínima con que debe bombearse el agua:

$$P_A = P_{atm} + \rho gH$$

$$P_A = 1{,}01x10^5\text{Pa} + (1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(1500\text{m})$$

$$P_A = 14{,}8x10^6 \text{ Pa}$$

b) Como no hay fugas, la cantidad de fluido que entra por el tubo en un intervalo de tiempo es igual a la cantidad que sale en el mismo intervalo de tiempo. El flujo de volumen es constante, $Q = Av$:

$$v = \frac{Q}{\pi d^2/4} = \left(\frac{50\text{litros/s}}{1000\text{litros/m}^3}\right)\left(\frac{4}{\pi(0{,}16\text{m})^2}\right) = 2{,}49\text{m/s}$$

c) Suponemos que la presión es aplicada al agua estacionaria en la boca del tubo ($v_A = 0$):

$$[P_A' + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g(0)]_{abajo} = [P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gH]_{arriba}$$

$$P_A' = P_{atm} + \rho gH + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Por lo tanto, con respecto a la situación anterior se requiere una presión adicional:

$$\Delta P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \frac{1}{2}(1000\text{kg/m}^3)(2{,}49\text{m/s})^2 = 3{,}1x10^3\text{Pa}$$

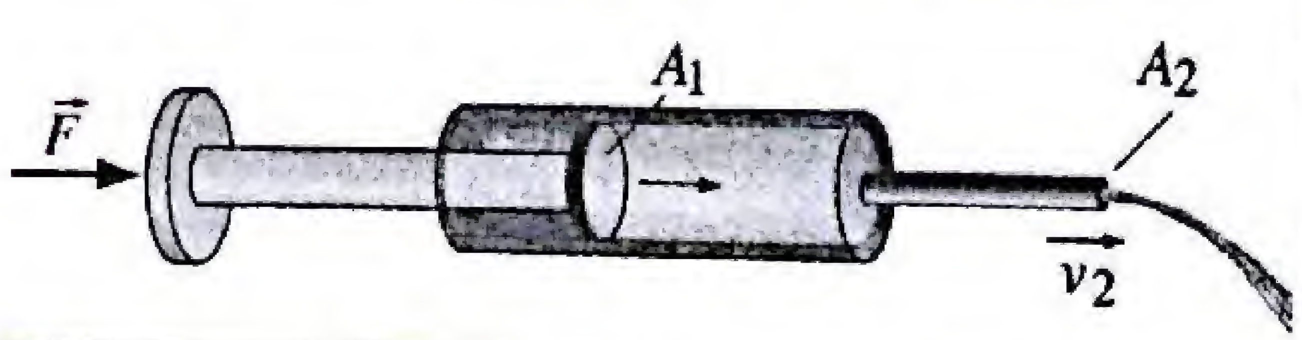
Respuesta:

a) $P_A = 14{,}8x10^6$ Pa
b) $v = 2{,}49$m/s
c) $\Delta P_A = 3{,}1x10^3$Pa

PR-2.07. *Velocidad de vaciado de la jeringa*

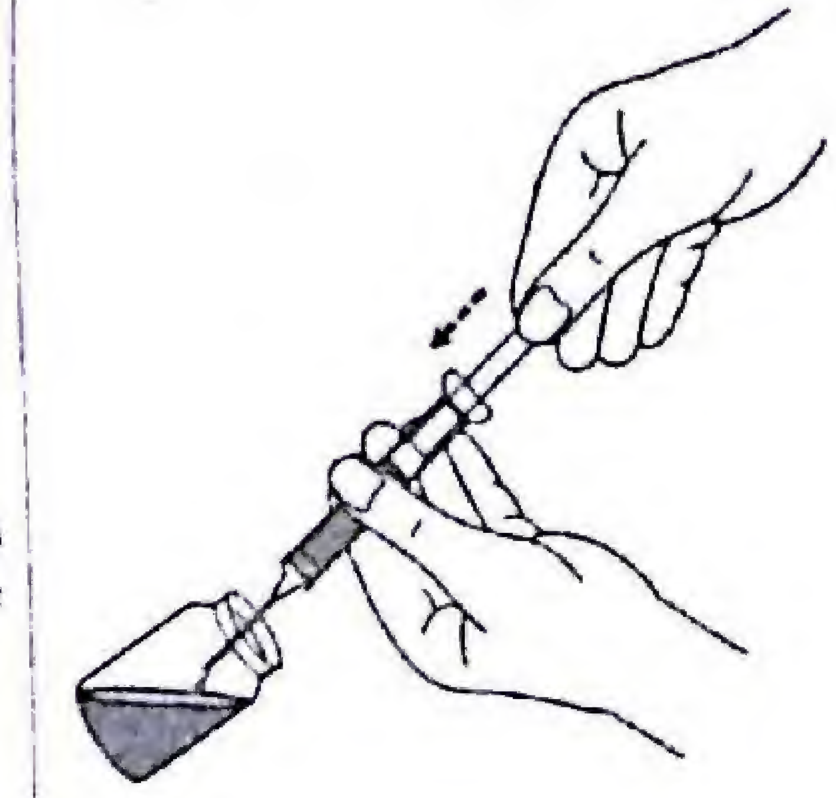
Una jeringa que contiene un fluido de densidad ρ y consiste de un cilindro con un pistón de área A_1 y un orificio de salida con una aguja de área transversal A_2.

Si se aplica una fuerza, F, para que el pistón se desplace con una velocidad constante, determine la velocidad de salida del chorro.



Solución: Si la velocidad del pistón es v_1, en un intervalo de tiempo T se desplaza una distancia v_1T y el trabajo realizado es $W = Fv_1T$. La masa del líquido desplazado es: $M = \rho V = \rho v_1 A_1 T$ y su variación de energía cinética:

$$\Delta K = \frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_1 A_1 T(v_2^2 - v_1^2)$$



De acuerdo al teorema del trabajo y energía, esta variación de energía cinética debe ser igual al trabajo de la fuerza F:

$$\frac{1}{2}\rho v_1 A_1 T(v_2^2 - v_1^2) = Fv_1T$$

Simplificando y aplicando la ecuación de continuidad:

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

, se obtiene la velocidad de salida del líquido por la aguja:

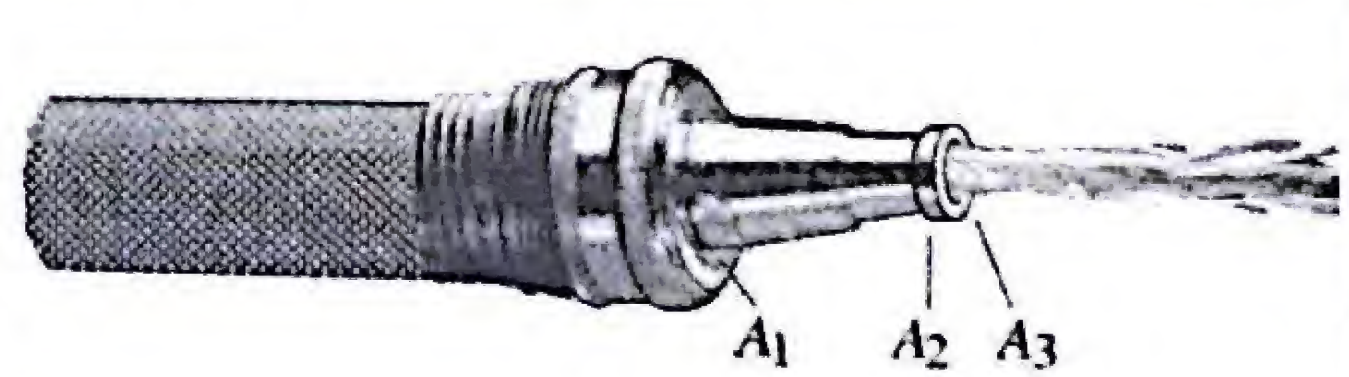
$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho A_1}\frac{1}{1-(A_2/A_1)^2}}$$

Respuesta:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho A_1[1-(A_2/A_1)^2]}}$$

PR-2.08. *Una manguera con boquilla cónica*

A una manguera de bomberos se le coloca una boquilla de forma cónica que reduce su área transversal desde un valor $A_1 = 20$ cm ^{2} hasta un valor $A_2 = 5$ cm ^{2}. El agua entra con una sobrepresión de $3x10^5$ Pa (presión por encima de la atmosférica) y con una velocidad de 4 m/s.



a) Determine la velocidad y la presión del chorro al final de la boquilla.

b) ¿Cuál será la velocidad del chorro justo después de abandonar la boquilla?

c) ¿Cuál es el área transversal A_3, del chorro justo después de abandonar la boquilla?

Solución: a) La velocidad del chorro al final de la boquilla se obtiene aplicando la ecuación de continuidad:

$$v_1A_1 = v_2A_2$$

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = \frac{20\text{cm}^2}{5\text{cm}^2}(3\text{m/s}) = 12\text{m/s}$$

La presión del chorro al final de la boquilla se obtiene aplicando la ecuación de Bernoulli, con $y_2 = y_1 = 0$:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(0) = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

Substrayendo P_{atm} de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$(P_1 - P_{atm}) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = (P_2 - P_{atm}) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejando, encontramos la presión en la boquilla por encima de la atmosférica:

$$(P_2 - P_{atm}) = (P_1 - P_{atm}) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

$$(P_2 - P_{atm}) = 3x10^5\,\mathrm{Pa} + \frac{1}{2}(1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3})[(3\mathrm{m/s})^2 - (12\mathrm{m/s})^2]$$

Por lo tanto, la presión por encima de la atmosférica es:

$$P_2 - P_{atm} = 2{,}33x10^5\,\mathrm{Pa}$$

b) Aplicamos de nuevo la ecuación de Bernoulli poniendo: $y_1 = y_3 = 0$ y $P_3 = P_{atm}$, se obtiene

$$(P_1 - P_{atm}) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = (P_3 - P_{atm}) + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

$$v_3^2 = v_1^2 + \frac{2}{\rho}(P_1 - P_{atm})$$

$$v_3^2 = (4\mathrm{m/s})^2 + \frac{2(3x10^5\,\mathrm{Pa})}{1000\mathrm{kg/m^3}} \quad \Rightarrow \quad v_3 = 24{,}8\mathrm{m/s}$$

Al reducir el área de la boquilla, el agua sale con mayor velocidad y por lo tanto, alcanza una mayor distancia.

c) Si aplicamos de nuevo la ecuación de continuidad: $v_2 A_2 = v_3 A_3$, se obtiene el área del chorro justo después de abandonar la boquilla:

$$A_3 = \frac{v_2}{v_3}A_2 = \frac{12\mathrm{m/s}}{24{,}8\mathrm{m/s}}(5\mathrm{cm}^2) = 2{,}42\mathrm{cm}^2$$

¡ Al abandonar la boquilla el chorro se contrae!

Respuesta:

a) $v_2 = 12\mathrm{m/s}$

$P_2 - P_{atm} = 2{,}33x10^5\mathrm{Pa}$

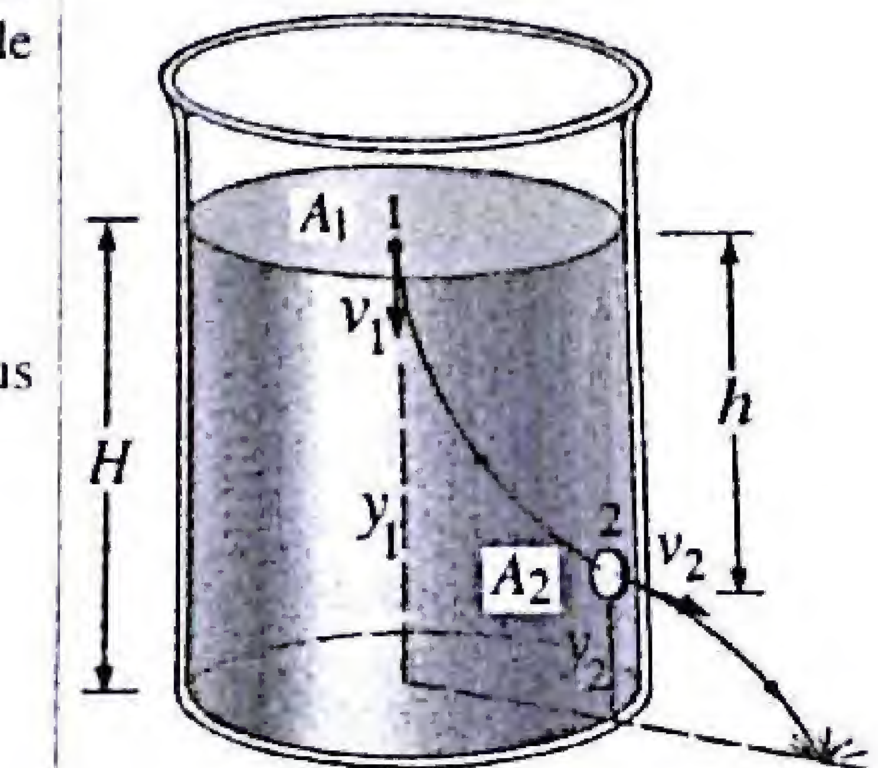
b) $v_3 = 24{,}8\mathrm{m/s}$

c) $A_3 = 2{,}42\mathrm{cm}^2$

PR-2.09. *Velocidad de salida del fluido por un orificio*

Un tanque de sección transversal A_1 contiene un líquido hasta una altura H. A una profundidad h por debajo de la superficie del líquido se le practica un orificio de sección transversal A_2. Calcule la velocidad con la que sale el chorro del líquido por la abertura.

Solución: Consideremos un fluido incomprensible cuya densidad mantiene el mismo valor en todos sus puntos y apliquemos la ecuación de Bernoulli en los puntos, 1 (en la superficie superior) y 2 (en el agujero de salida):



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Como ambos puntos están abiertos a la atmósfera, sus presiones son iguales a la atmosférica: $P_1 = P_2 = P_{atm}$:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$2g(y_1 - y_2) = v_2^2 - v_1^2$$

Si aplicamos la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ y sustituyendo la velocidad v_1, tomando en cuenta que $(y_1 - y_2) = h$, se obtiene:

$$2gh = v_2^2(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}) = v_2^2(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2})$$

Despejando, se obtiene la velocidad de salida:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

Respuesta:

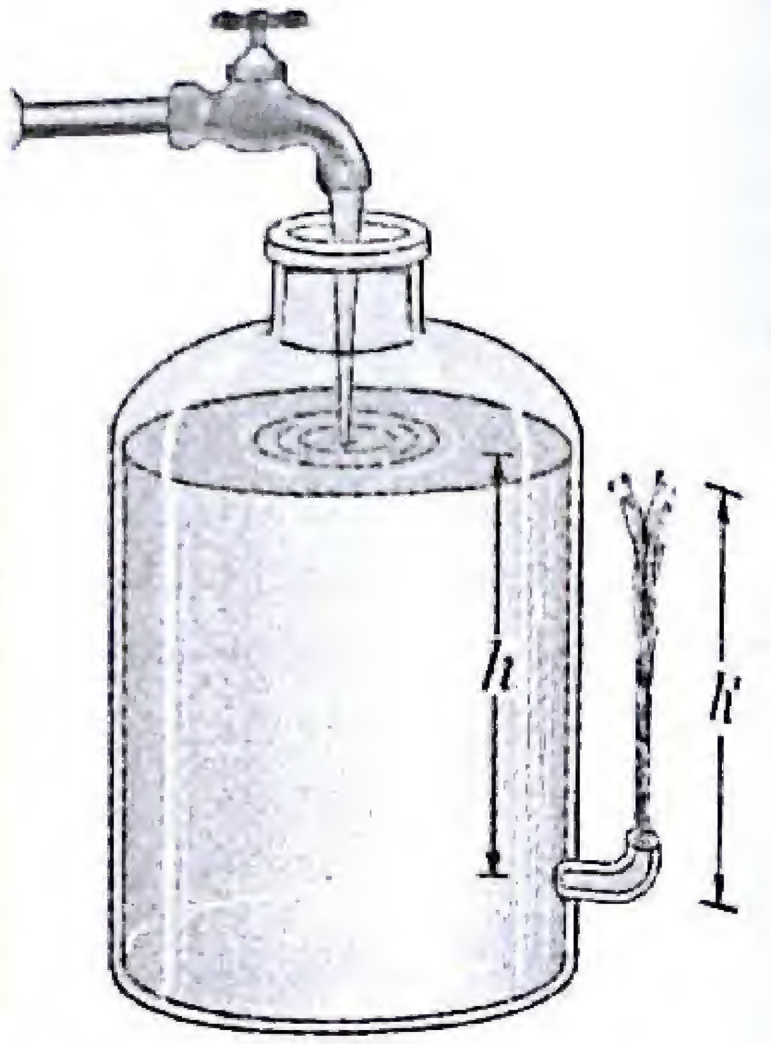
$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

PR-2.10. *El teorema de Torricelli*

a) Un tanque que está abierto a la atmósfera contiene un líquido de densidad ρ y se le practica un pequeño orificio a una profundidad h. Si el área del orificio es despreciable en comparación con el área de la superficie superior del líquido, ¿Cuál será la rapidez de salida del líquido?

b) ¿Qué altura alcanzaría el chorro del líquido si se conecta en el orificio un tubo encorvado apuntando en sentido vertical hacia arriba?

Solución: Si el tanque tiene una sección transversal grande en comparación con la del orificio ($A_1 >> A_2$), el fluido permanecerá esencialmente en reposo en su parte superior ($v_1 \approx 0$) y usando la expresión obtenida en el problema anterior, encontramos



$$v_2 = \lim_{A_2/A_1 \to 0} \left(\sqrt{\frac{2gh}{[1-(A_2/A_1)^2]}} \right) = \sqrt{2gh}$$

Esta expresión se conoce como el *Teorema de Torricelli: La velocidad de derrame por un agujero pequeño es la misma que adquiriría un cuerpo que cayera bajo la gravedad desde una altura h.*

b) Una consecuencia del teorema de Torricelli es que, si el tubo de salida estuviese encorvado en sentido vertical hacia arriba, como muestra la figura, aplicando la conservación de la energía, el chorro que por él salga alcanzará aproximadamente la altura de la superficie libre en el tanque. En la realidad ocurren pérdidas de energía por viscosidad que alteran este resultado.

Respuesta:

a) $v_2 = \sqrt{2gh}$
b) $h' = h$

PR-2.11. *¿Hasta dónde se eleva el chorro de agua?*

Un frasco está lleno de agua y en el fondo tiene conectado un tubo de longitud L = 1 m, inclinado a un ángulo θ = 30° respecto a la horizontal. Si se mantiene el nivel del agua a una altura constante, H = 5 m, ¿cuál será la máxima altura que alcanza el chorro de agua?

Solución: Aplicamos la ecuación de Bernoulli a los puntos, 1 en la superficie del agua y 2 en la boca del tubo:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

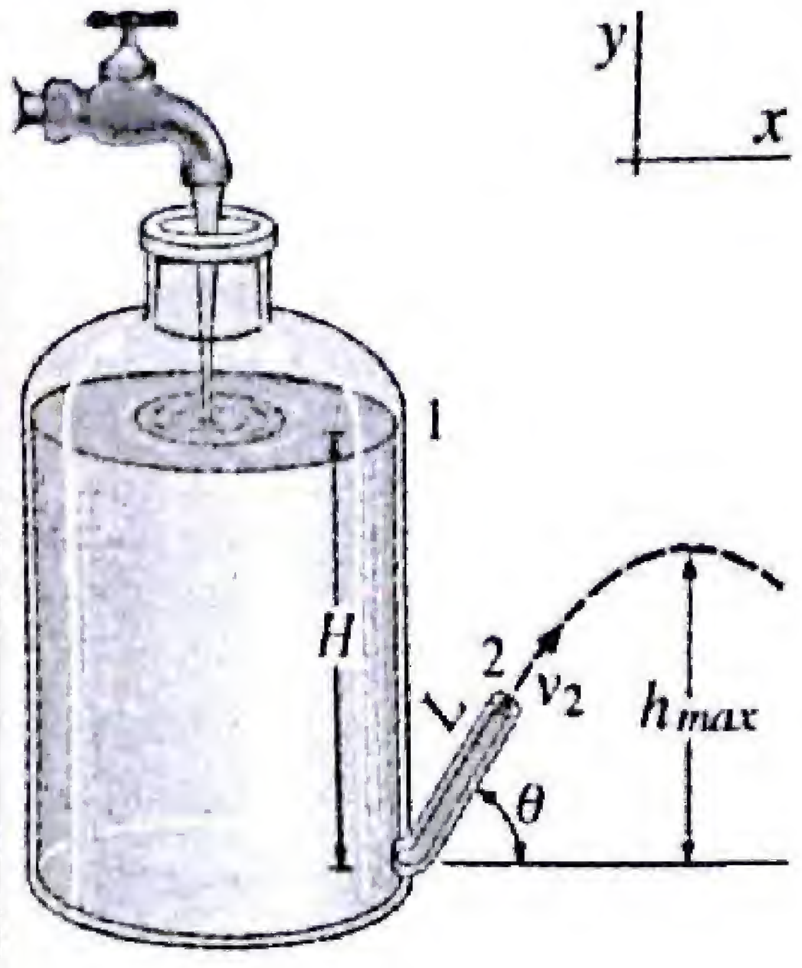
Tomando en cuenta que $v_1 \approx 0$, y que ambos puntos están abiertos a la atmósfera $P_1 = P_2 = P_{atm}$, tenemos:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g L sen\theta$$

Obtenemos así la velocidad de salida del chorro:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g(H - L sen\theta) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(H - L sen\theta)}$$

$$v_2 = \sqrt{2(9{,}8\text{m/s}^2)(5 - 1\text{sen}30°)\text{m}} = 9{,}39\text{m/s}$$



Para hallar la altura máxima del movimiento parabólico del chorro, escribimos la ecuación para la componente vertical, tomando en cuenta que la velocidad final es cero en el tope de la trayectoria:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2ay \quad \Rightarrow \quad 0 = (v_2 sen\theta)^2 - 2gy$$

$$y_{max} = \frac{(v_2 sen\theta)^2}{2g} = \frac{(9{,}39\text{m/s}^2\text{sen}30°)^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)} = 1{,}12\text{m}$$

Esta es la altura máxima que alcanza el chorro por encima de la boca del tubo. Por lo tanto, la altura máxima con respecto al inicio del tubo en el fondo del frasco es:

$$h_{max} = y_{max} + L sen\theta = 1{,}12\text{m} + 1\text{msen}30° = 1{,}62\text{m}$$

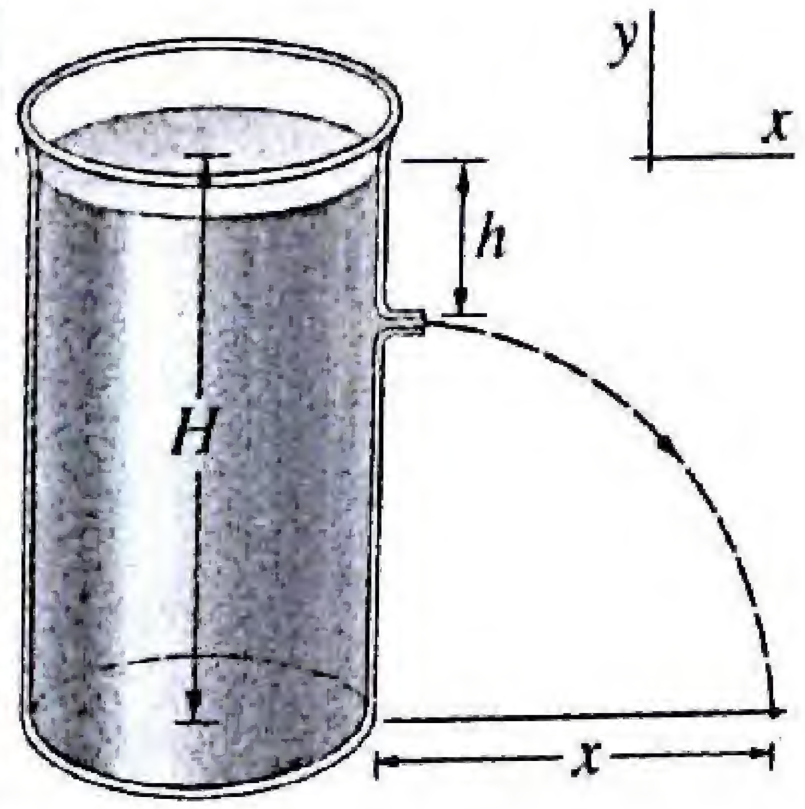
Respuesta:

$h_{max} = 1{,}62$m

PR-2.12. *¿Cuál será el alcance máximo del chorro?*

Un recipiente está lleno de agua hasta una altura H y se coloca sobre una mesa. Si se le hace un agujero a una distancia h por debajo de la superficie del agua.

a) ¿A qué distancia x de la base del recipiente, golpea el chorro de agua la mesa?
b) ¿Podría hacerse un agujero a otra profundidad tal que el segundo chorro tenga el mismo alcance que el primero? Si es así, ¿a qué profundidad?
c) Si quisiéramos que el chorro tenga un alcance máximo ¿a qué profundidad tendríamos que perforar el agujero?



Solución: a) Usando el teorema de Torricelli (problema anterior) podemos escribir la rapidez con la cual cada elemento del chorro es lanzado horizontalmente:

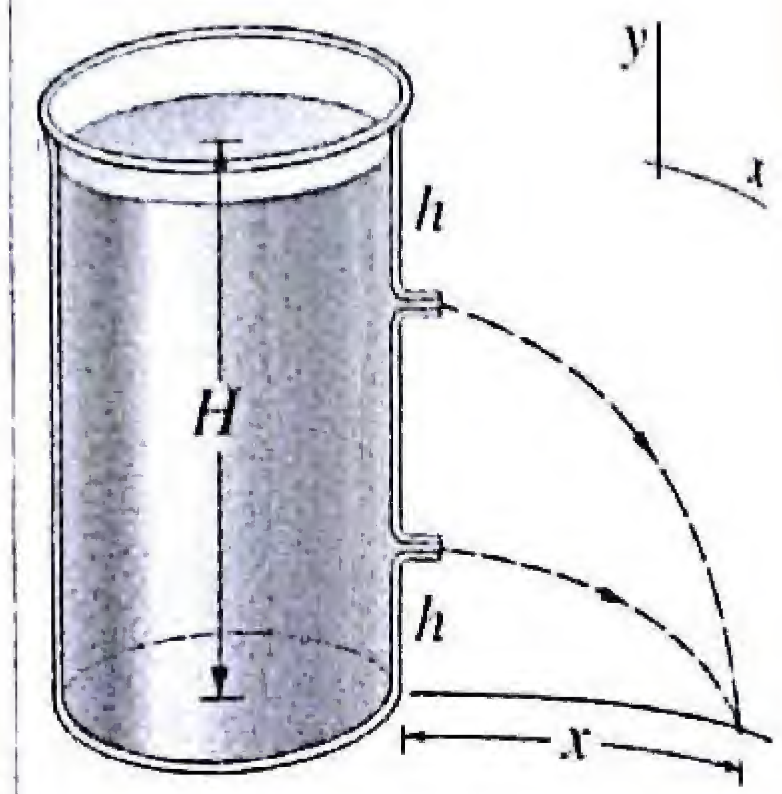
$$v = \sqrt{2gh}$$

El tiempo t de caída satisface la ecuación:

$$y = H - h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

Por lo tanto, la distancia horizontal que viaja el agua durante la caída es:

$$x = vt = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$



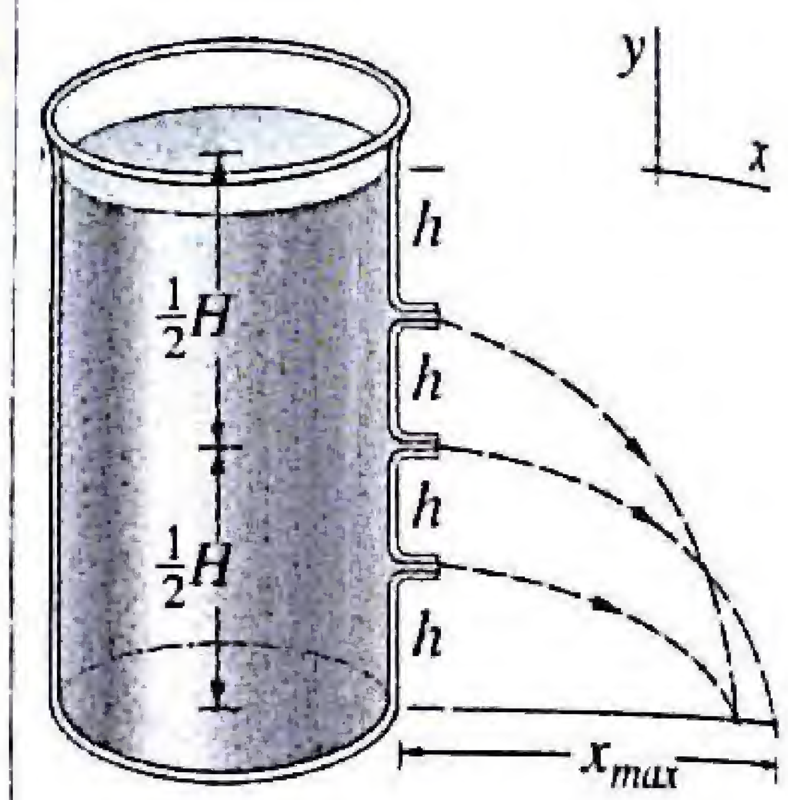
b) Si se perfora un segundo agujero a una profundidad h' debajo de la superficie del agua, el nuevo chorro tendrá un alcance:

$$x' = 2\sqrt{h'(H-h')}$$

Para que los alcances sean iguales ($x' = x$), se debe cumplir: o bien $h' = h$ (solución trivial) o la otra solución:

$$h' = H - h$$

Es decir, para que los dos chorros tengan el mismo alcance, si un agujero está a una profundidad h debajo de la superficie del agua, el otro debe estar a una profundidad $(H - h)$ por debajo de la misma superficie, o sea a una distancia h por encima del fondo del recipiente.



c) El valor de h que proporciona el máximo alcance está determinado por la condición $dx/dh = 0$:

$$\frac{dx}{dh} = \frac{d}{dh}[2\sqrt{h(H-h)}] = 2\frac{1}{2\sqrt{h(H-h)}}(H-2h) = 0$$

La derivada se anula para $h = H/2$. Este valor de h corresponde a un máximo de x (este es el único valor extremo de la función):

$$x_{max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H-\frac{H}{2}\right)} = H$$

Respuesta:

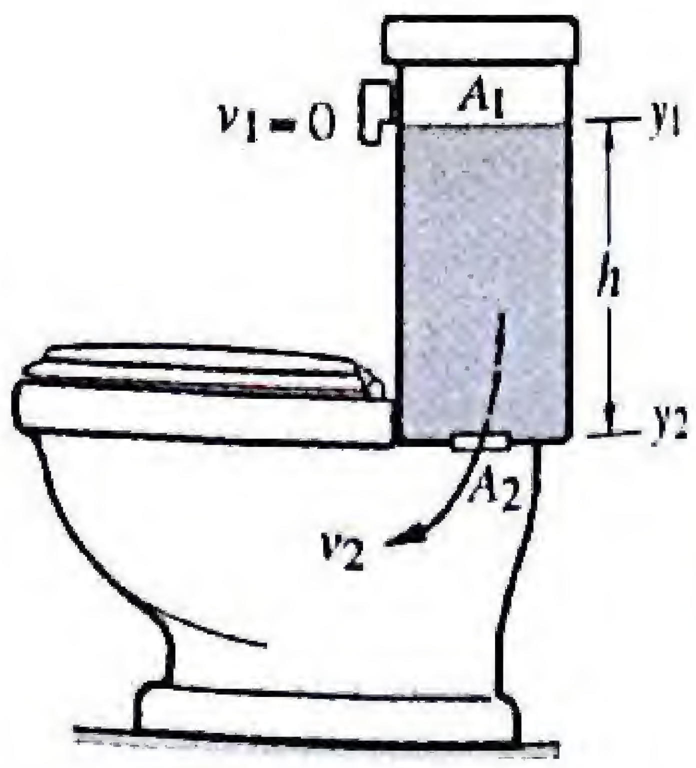
a) $x = 2\sqrt{h(H-h)}$
b) h por encima del fondo.
c) $x_{max} = H$

PR-2.13. *Dale a la palanca de la poceta y espera...*

El tanque de una poceta tiene una sección rectangular de dimensiones 20cm x 40cm y el nivel del agua está inicialmente a una altura h = 20 cm por encima de la válvula de desagüe, la cual tiene un diámetro d_2 = 5 cm. Al bajar la palanca, se abre la válvula,

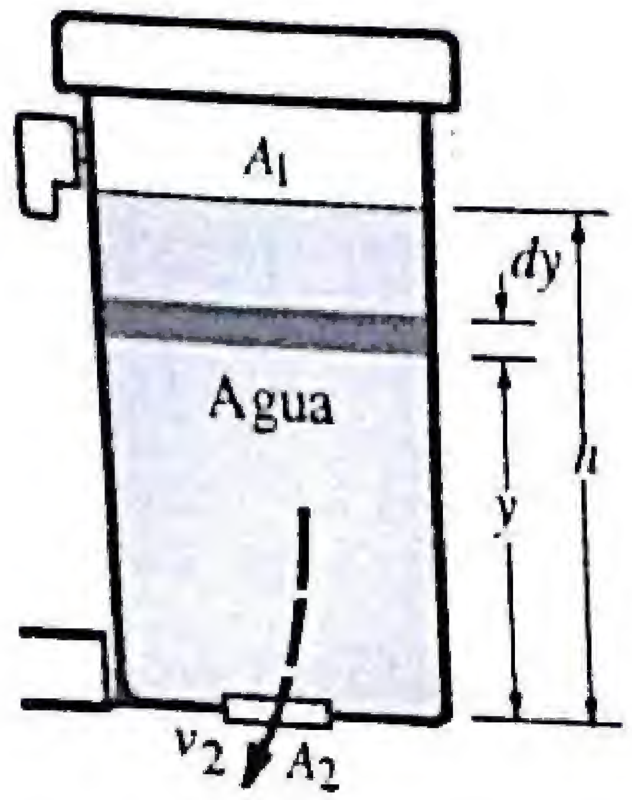
a) ¿Cuál será la rapidez de desagüe por esa válvula en función de la altura de agua remanente en el tanque?

b) ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque?



Solución: a) Aplicando la ecuación de Bernoulli en los punto y_1 de la superficie libre del líquido en el tanque e y_2 en la abertura de salida, podemos escribir:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$



Tomando en cuenta que $P_1 = P_2 = P_{atm}$, se tiene:

$$\rho g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad \Rightarrow \quad v_2^2 - v_1^2 = 2gy$$

Siendo y la profundidad instantánea del agujero de desagüe respecto a la superficie libre del líquido. Por otro lado las velocidades están relacionadas por la *ecuación de continuidad*: $v_1 = v_2\ (A_2/A_1)$. Reemplazando v_1 en la ecuación anterior:

$$v_2^2 - [v_2(A_2/A_1)]^2 = 2gy$$

Despejando, obtenemos la expresión para la rapidez de desagüe

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gy}{1-(A_2/A_1)^2}}$$

Los valores de las áreas A_1 y A_2, son, respectivamente:

$$A_1 = (0.20\ \text{m})(0.40\text{m}) = 8\text{x}10^{-2}\ \text{m}^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi\,(0.025\text{m})^2 = 1.96\text{x}10^{-3}\ \text{m}^2$$

Como $A_1 >> A_2$, la velocidad instantánea de salida del fluido es aproximadamente:

$$v_2 = \sqrt{2gy}$$

Por conservación de la masa, la cantidad de fluido que "gana" la superficie A_2 por unidad de tiempo es igual a la que "pierde" la superficie A_1 en el mismo tiempo. Por lo tanto:

$$\rho A_2 v_2 = -\rho A_1\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando v_2 y despejando dt se tiene:

$$dt = -(\frac{A_1}{A_2})\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Ahora integramos desde el instante $t = 0$ en que partimos de una altura inicial $y = h$, hasta el instante $t = T$ cuando el tanque se ha vaciado completamente ($y = 0$):

$$\int_0^T dt = -(\frac{A_1}{A_2})\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$T = (\frac{A_1}{A_2})\frac{1}{\sqrt{2g}}(2\sqrt{y})\Big|_0^h = (\frac{A_1}{A_2})\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Si se sustituyen los valores numéricos, resulta un tiempo de vaciado:

$$T = \frac{8\text{x}10^{-2}\text{m}^2}{1{,}96\text{x}10^{-3}\text{m}^2}\sqrt{\frac{2\text{x}0{,}2\text{m}}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 8{,}24\text{s}$$

Indudablemente que en la práctica el tiempo de vaciado resulta mayor, debido a varios factores que no son tomados en cuenta en este modelo simple. Por ejemplo, ocurre retardo debido a la existencia de fuerzas viscosas y por la formación de remolinos (flujo turbulento).

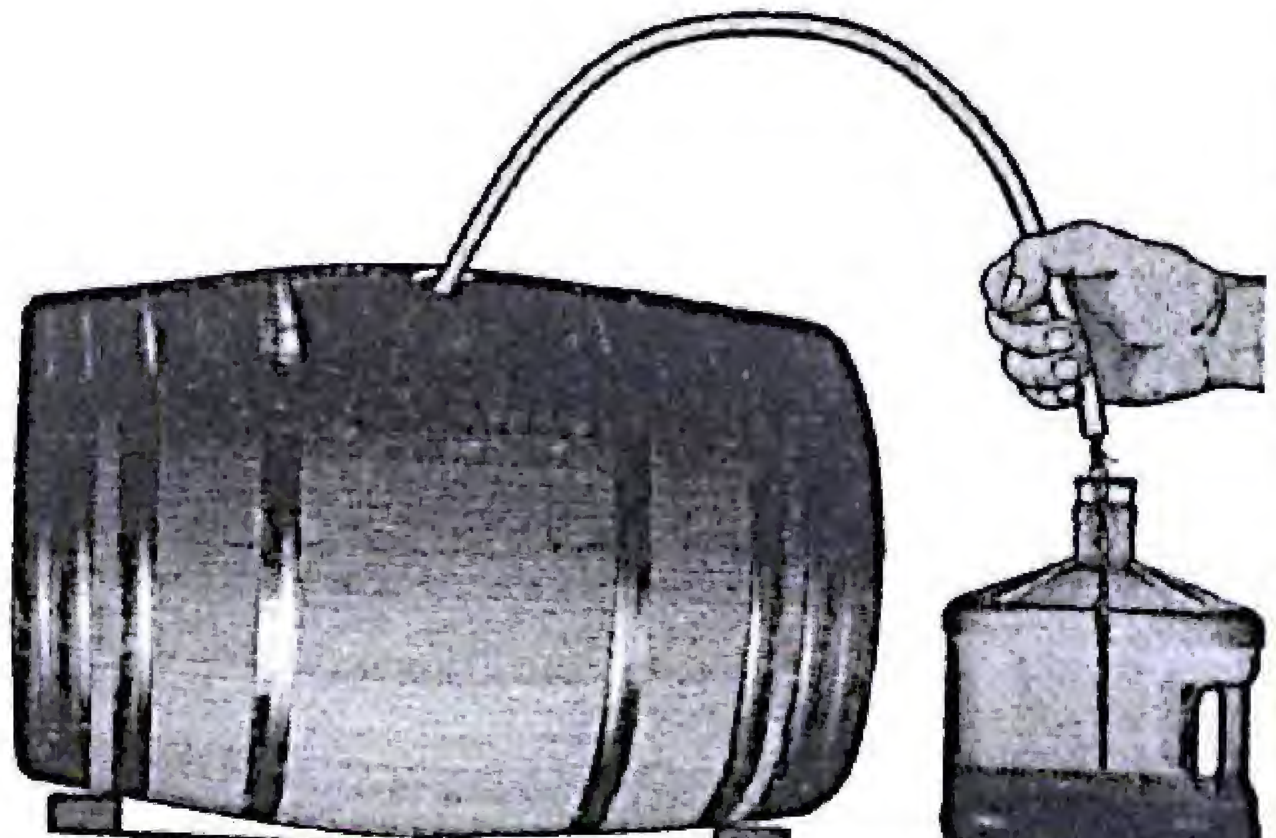
Respuesta:

a) $v_2 = \sqrt{\frac{2gy}{1-(A_2/A_1)^2}}$

b) $T = \frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 8{,}24\text{s}$

PR-2.14. *¿Cómo funciona un sifón?*

El sifón es un artilugio que se utiliza para transvasar un líquido de un recipiente a otro. Consiste de un tubo doblado, con su lado corto sumergido en el líquido y el otro extremo por debajo del nivel del líquido.



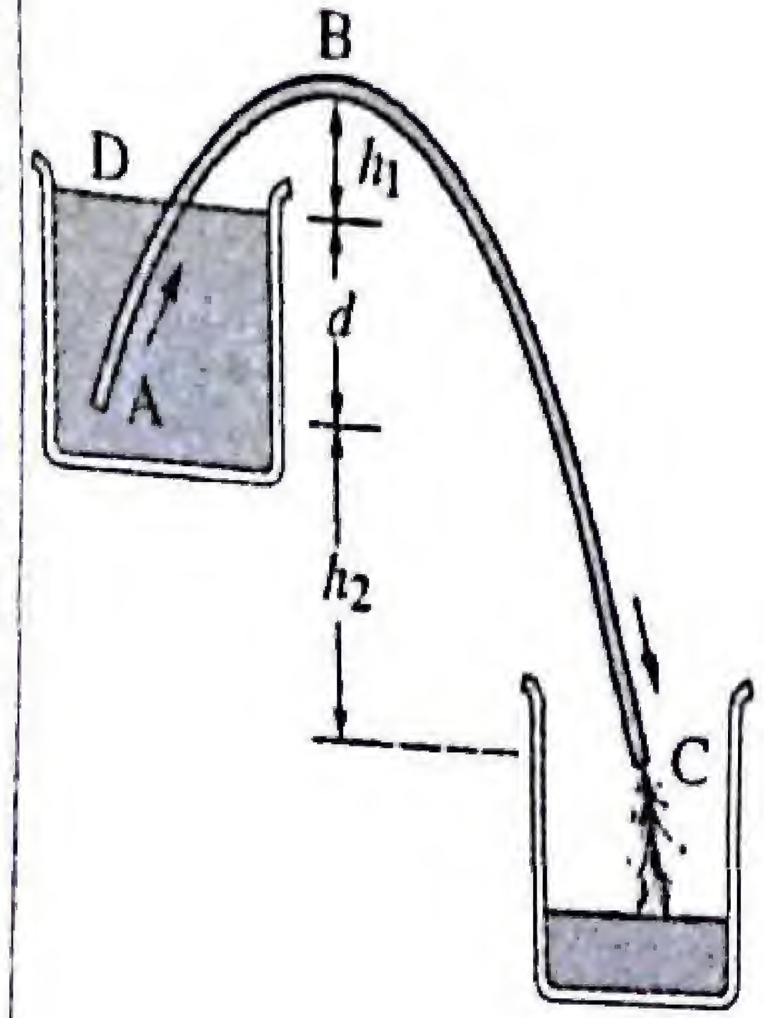
a) ¿Cómo funciona el sifón?

b) Suponga que el extremo libre del tubo está a una altura h_2 por debajo del extremo sumergido y este a su vez está a una altura d debajo del nivel del líquido, ¿con qué rapidez fluye el líquido hacia el exterior?

c) ¿Cuál es la presión del líquido en la parte más alta?

d) ¿Cuál será la máxima altura teóricamente posible a la cual se podría elevar agua con un sifón?

Solución: El tubo debe estar inicialmente lleno de líquido, evitando que dentro queden burbujas de aire. En la figura mostrada, la parte a la derecha del "hilo" de líquido es más larga y el desbalance de peso causa que el líquido sea arrastrado hacia el extremo largo, haciendo que suba por A desde el tanque y luego baje hacia C. El líquido se comporta como una "cadena" que desliza sobre una polea, manteniéndose enlazado por las fuerzas de cohesión intermoleculares.



b) Por ser el área del tanque muy grande en comparación con la del tubo, la velocidad en su superficie libre es despreciable, $v_D \approx 0$. Además el líquido tanto en su superficie D como en la salida C está expuesto a la atmósfera:

$$P_D = P_C = P_{atm}$$

Aplicando la *ecuación de Bernoulli*: en los puntos C y D:

$$P_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C = P_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g y_D$$

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + 0 = P_{atm} + 0 + \rho g(h_2 + d)$$

Despejando, obtenemos la rapidez de salida del líquido:

$$v_C = \sqrt{2g(h_2 + d)}$$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos D y B, escribimos:

$$P_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g y_D = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B$$

Si el tubo tiene sección transversal constante, de la ecuación de continuidad: $v_B A_B = v_C A_C$, se deduce que las velocidades en B y en C son iguales:

$$v_B = v_C = \sqrt{2g(h_2 + d)}$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$P_{atm} + \rho g(h_2 + d) = P_B + \frac{1}{2}\rho 2g(h_2 + d) + \rho g(h_2 + d + h_1)$$

La presión del líquido en la parte mas alta será:

$$P_B = P_{atm} - \rho g(h_2 + d + h_1)$$

d) De acuerdo al resultado anterior, a medida que elevamos el tope B del sifón por encima del nivel del líquido, irá disminuyendo la presión en ese punto. La mínima presión ($P_B = 0$) correspondería a una altura total:

$$h_2 + d + h_1 = \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

En el caso extremo, si tomamos ($h_2 + d = 0$), obtenemos la altura máxima posible para elevar agua con un sifón:

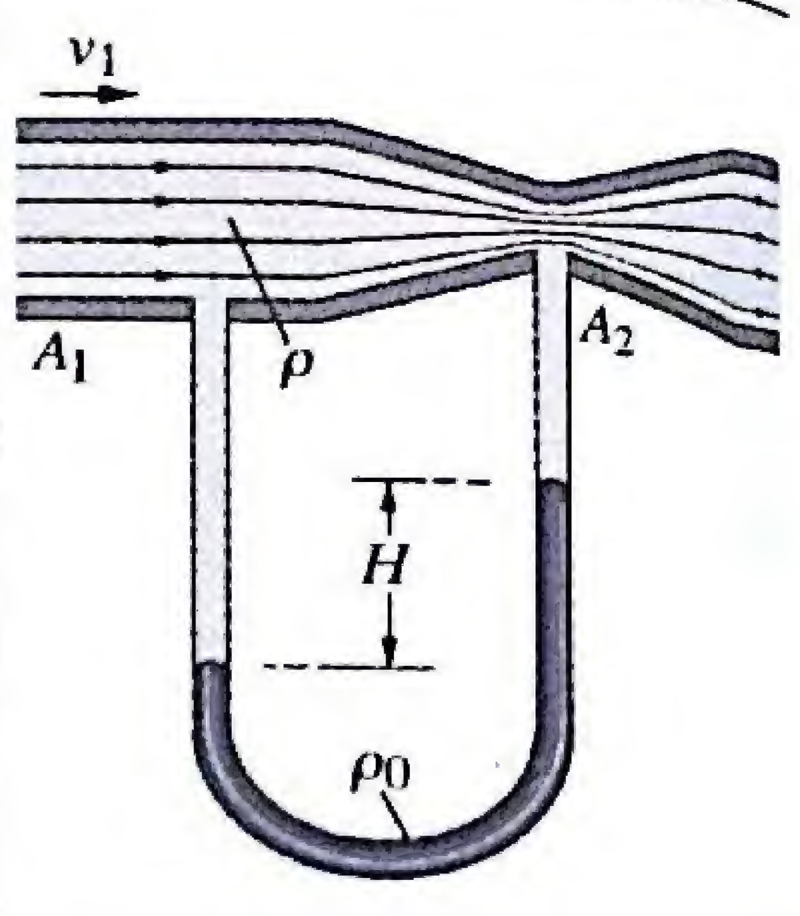
$$h_1^{max} = \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{1{,}01\mathrm{x}10^5\mathrm{Pa}}{(1000\mathrm{kg/m^3})(9{,}8\mathrm{m/s^2})} = 10{,}3\mathrm{m}$$

Respuesta:

b) $v_C = \sqrt{2g(h_2 + d)}$
c) $P_B = P_{atm} - \rho g(h_2 + d + h_1)$
d) $h_1\,(máx) = 10{,}3$ m.

PR-2.15. *El medidor de velocidad de Venturi*

El dispositivo mostrado es un medidor de velocidad de un fluido en una tubería. El fluido de densidad ρ pasa por una tubería de área de sección transversal A_1. En el cuello el área se reduce a A_2 y allí se acopla un tubo manométrico que contiene mercurio (densidad ρ_0). Halle la expresión para la velocidad del flujo en la entrada, v_1, en términos de la diferencia de alturas, H, de las columnas de mercurio.

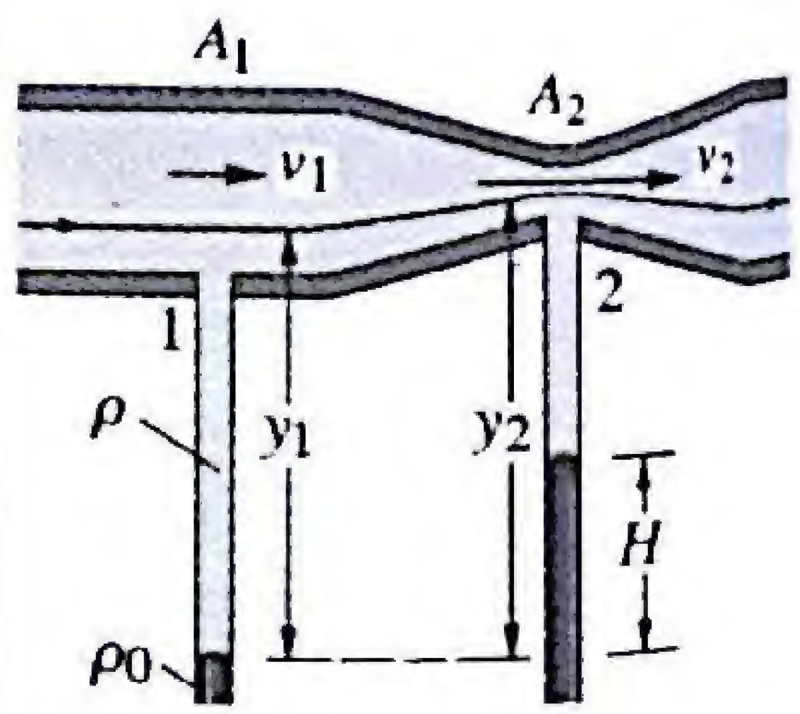


Solución: Aplicamos la ecuación de Bernoulli para relacionar las presiones, velocidades y alturas en los puntos 1 y 2 a lo largo de una línea de flujo:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Las velocidades del fluido en estos dos puntos también están relacionadas con las áreas mediante la ecuación de continuidad:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$



Sustituyendo v_2 en la ecuación de Bernoulli, escribimos:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2 + \rho g y_2 \qquad (1)$$

Podemos igualar las presiones al nivel $y = 0$ en las dos columnas a cada lado:

$$P_1 + \rho g y_1 = P_2 + \rho g(y_2 - H) + \rho_0 g H$$

De esta última ecuación se deduce que:

$$P_1 - P_2 + \rho g(y_1 - y_2) = (\rho_0 - \rho)gH \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$(\rho_0 - \rho)gH + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2$$

Despejando, obtenemos la velocidad del fluido:

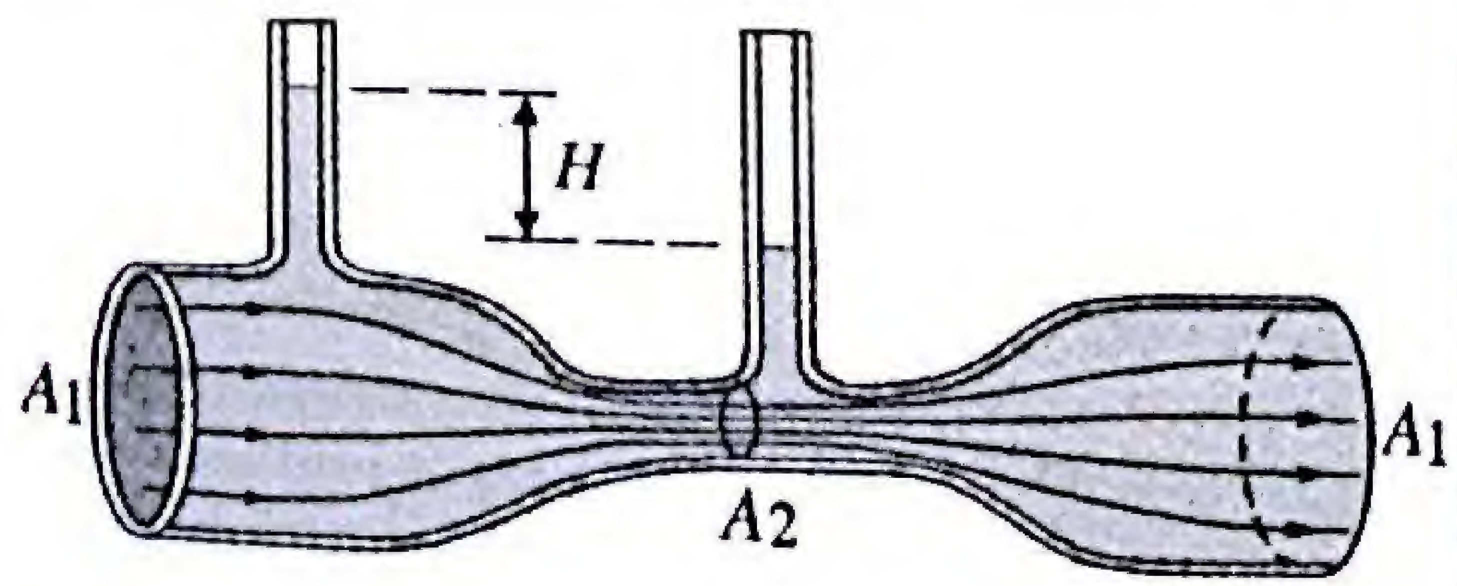
$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)gH}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Respuesta:

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)gH}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

PR-2.16. *Medidor de flujo de Venturi*

El dispositivo mostrado permite medir el flujo o caudal de agua a partir de la diferencia H de los niveles del líquido entre dos tubos verticales conectados en diferentes puntos.



Si las áreas respectivas de las secciones transversales de los tubos son A_1 y A_2, demuestre la siguiente expresión para el volumen de agua que pasa por unidad de tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = A_1 A_2\sqrt{\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Solución: La presión P_1 en la sección gruesa del tubo excede a la presión P_2 en la sección delgada del tubo por una cantidad $\rho g H$:

$$P_1 = P_2 + \rho g H \qquad (1)$$

Como las bases de los dos tubos están a igual nivel $y_1 = y_2$, aplicando el teorema de Bernoulli, escribimos:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gH \qquad (3)$$

Como por ambas regiones pasa el mismo volumen de agua por unidad de tiempo (ecuación de continuidad):

$$\frac{dV}{dt} = A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (4)$$

Combinando las ecuaciones (3) y (4), se obtiene v_2:

$$v_2^2 = 2gH + \frac{A_2^2 v_2^2}{A_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = A_1\sqrt{\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Sustituyendo v_2 en la ecuación (4), llegamos a la relación buscada:

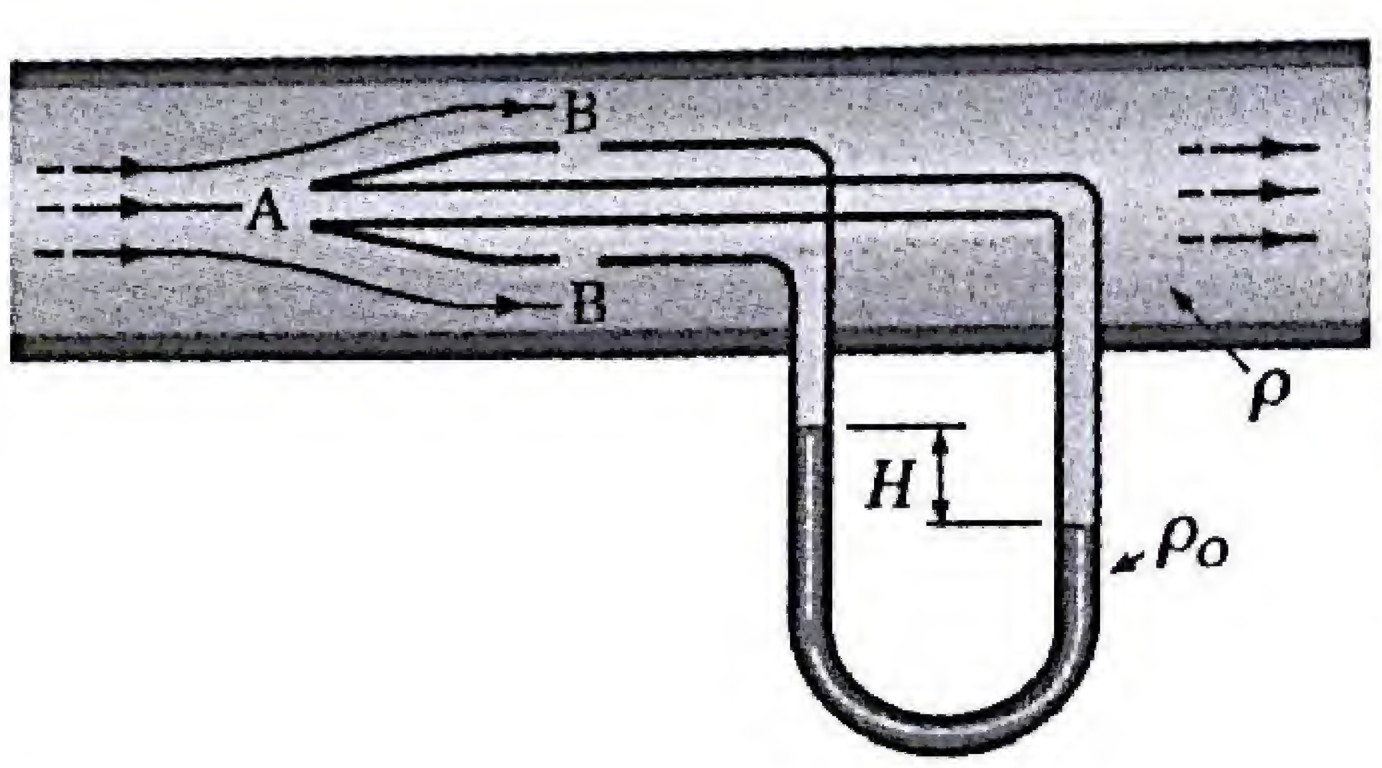
$$\frac{dV}{dt} = A_1 A_2\sqrt{\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = A_1 A_2\sqrt{\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2}}}$$

PR-2.17. *Medidor de Pitot para la velocidad de fluido*

En el tubo de Pitot mostrado, el fluido que entra en la abertura en el punto A se estanca pero cuando pasa frente a la abertura en B, fluye sin impedimento. Puede usarse para medir la rapidez de un aeroplano relativa al aire o la rapidez de un barco relativa al agua.



La velocidad del fluido se determina a partir de la diferencia de alturas que registra el manómetro de mercurio. Suponga que cuando el instrumento se coloca en un aeroplano, el manómetro registra una lectura H = 20 cm. Determine la velocidad del aeroplano relativa al aire.

Aire: $\rho = 1{,}25$ kg/m³
Mercurio: $\rho_O = 13600$ kg/m³

*Fue utilizado por Henri Pitot (1730) para medir velocidades en el río Sena

Solución: Aplicamos el teorema de Bernoulli al flujo estacionario entre A y B, tomando en cuenta que $v_A = 0$:

$$P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Además, la diferencia de presión está dada por la diferencia de alturas de las columnas de mercurio:

$$P_A - P_B = \rho_0 g H$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho_0 g H \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{\frac{2\rho_0 g H}{\rho}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2(13600\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}2\text{m})}{(1{,}25\text{kg/m}^3}} = 207\text{m/s}$$

Respuesta:

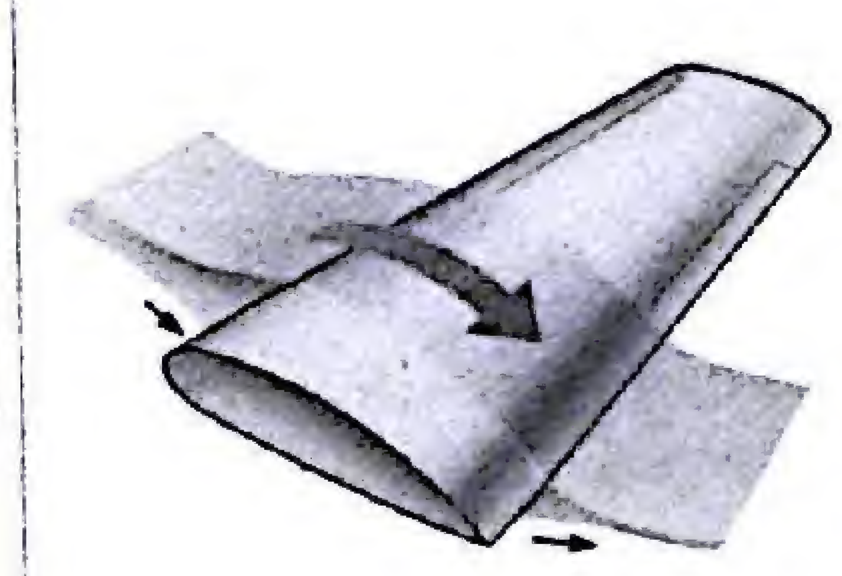
$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2\rho_0 g H}{\rho}} = 207\text{m/s}}$$

PR-2.18. *¿Cómo se sustentan los aviones en el aire?*

a) Utilice el teorema de Bernoulli para explicar como se produce la fuerza de sustentación de un avión en vuelo.

b) Suponga que la velocidad el aire arriba del ala es $v_1 = 200$ m/s y por debajo es $v_2 = 180$ m/s y que la densidad del aire a esa altura es $\rho = 0{,}80$ kg/m³, ¿cuál debería ser el área total de las alas para sostener un aeroplano de masa 30000 kg?

Solución: a) El perfil del ala de los aviones se diseña de forma tal que obliga al aire a viajar una mayor distancia (y más rápido) sobre la cara superior que por su cara inferior. De acuerdo al teorema de Bernoulli, la presión debajo del ala resulta mayor que encima de ella. Esta diferencia de presión da como resultado una fuerza neta sobre el ala dirigida hacia arriba (Fuerza sustentadora) .



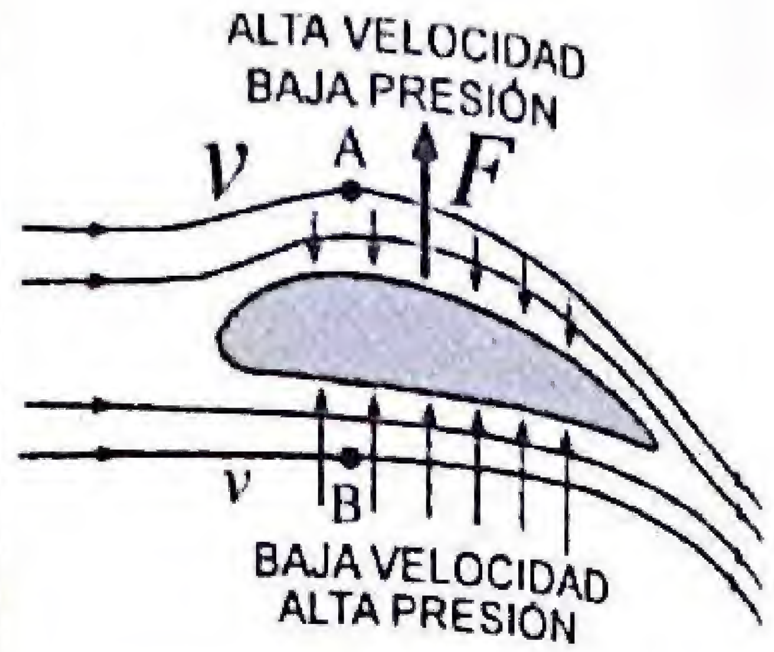
b) Consideremos en el dibujo siguiente la posición A encima del ala y la posición B por debajo. La separación entre estos dos puntos es tan pequeña que podemos despreciar la diferencia en energía potencial gravitacional, además la densidad del aire es también pequeña.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre estos dos puntos:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

y la diferencia de presión entre los dos puntos será:

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2$$



Flujo de líneas de corriente alrededor de un ala de avión

En este modelo sencillo, la fuerza neta de sustentación del aeroplano es:

$$F = F_B - F_A = (P_B - P_A)A = (\frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2)A$$

Esta fuerza debe equilibrar el peso del aeroplano:

$$F = Mg$$

De modo que el área total de las alas debe ser:

$$A = \frac{2Mg}{\rho(v_A^2 - v_B^2)}$$

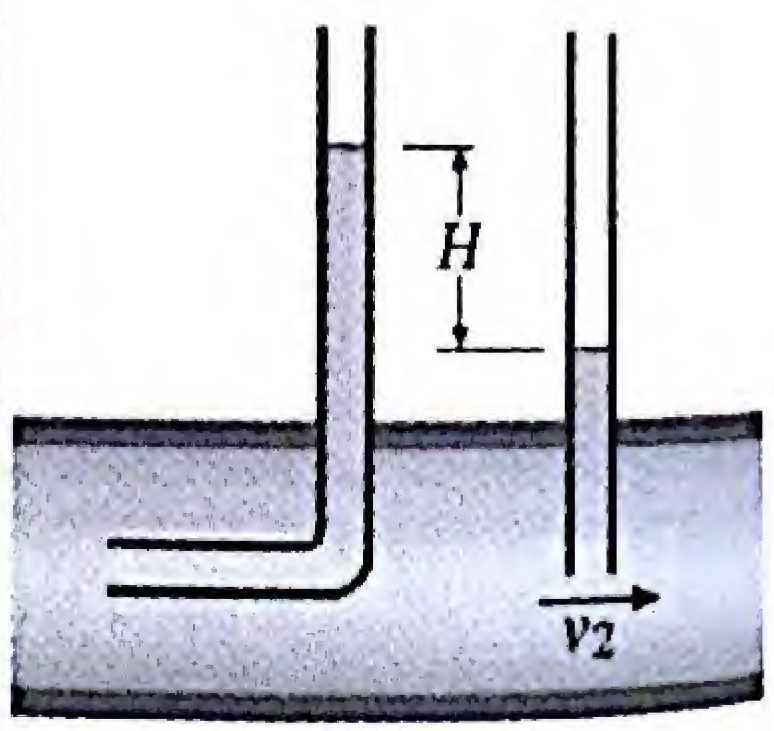
$$A = \frac{2(30000\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{0{,}80\text{kg/m}^3[(200\text{m/s})^2 - (180\text{m/s})^2]} = 96{,}7\text{m}^2$$

Respuesta:

$$\boxed{A = 96{,}7\text{m}^2}$$

PR-2.19. *Velocidad de un fluido en un tubo*

Un método sencillo para medir la velocidad de un fluido en un tubo de sección transversal constante consiste en insertar dos tubos delgados de la forma indicada, los cuales están abiertos a la atmósfera. Si la diferencia de alturas de las columnas es h = 11,5 cm, ¿cuál es la velocidad del fluido?



Solución: Aplicamos la ecuación de Bernoulli en las bocas de los tubos:

$$P_1 + 0 + 0 = P_2 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

La diferencia de presión está dada por la diferencia de alturas de las columnas del líquido:

$$P_1 - P_2 = \rho g H$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene la velocidad del fluido:

$$gH = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2gH}$$

$$v_2 = \sqrt{2(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}115\text{m})} = 1{,}5\text{m/s}$$

Respuesta:

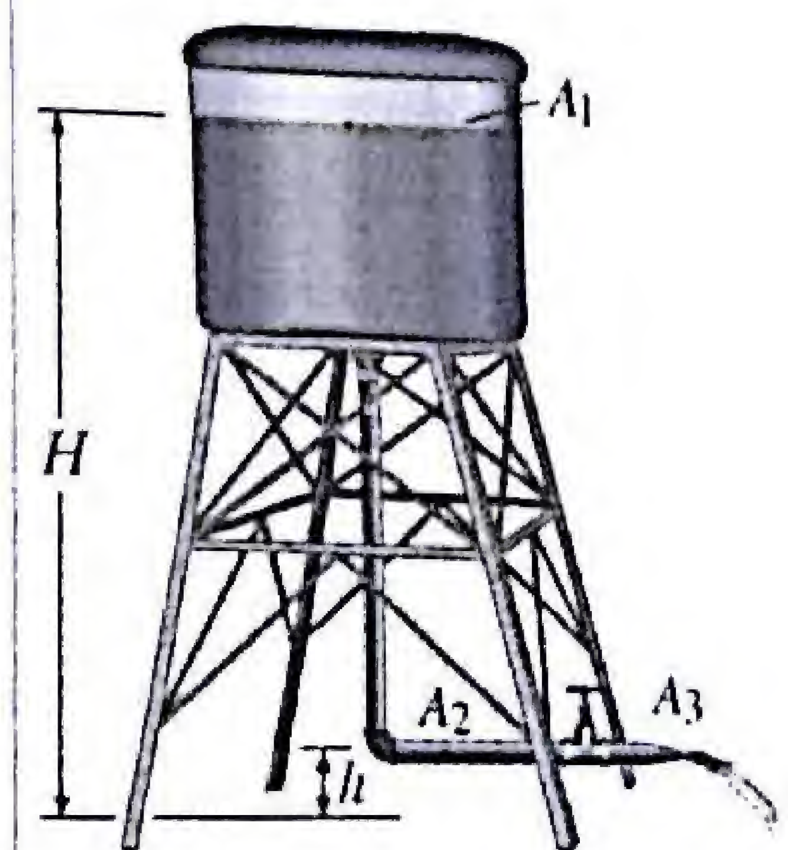
$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gH} = 1{,}5\text{m/s}}$$

PR-2.20. *Suministro de agua desde un tanque elevado*

Un tanque se mantiene lleno de agua hasta un nivel de elevación H = 9 m y cuya superficie está abierta a la atmósfera. El agua baja por un tubo vertical y da la vuelta para seguir horizontal a un nivel h = 1 m por encima del terreno. El tubo tiene una sección transversal $A_2 = 30\text{cm}^2$ y después de una válvula su sección se reduce hasta $A_3 = 15\text{cm}^2$. El área transversal del tanque A_1 es muy grande en comparación con el de la tubería.

a) Calcule la velocidad del agua en el punto 3 de salida.

b) Calcule la presión P_2 en el tubo horizontal.



Solución: a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 3, escribimos:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g y_3$$

Como $A_1 >> A_3$ la velocidad con la cual desciende la superficie dentro del tanque puede despreciarse, $v_1 \approx 0$. Tomando en cuenta que $y_1 = H$, $y_3 = h$ y que ambos puntos están abiertos a la atmósfera, $P_1 = P_3 = P_{atm}$, encontramos la velocidad de salida del chorro:

$$\frac{1}{2}\rho v_3^2 = \rho g(H - h) \qquad \Rightarrow \qquad v_3 = \sqrt{2g(H-h)}$$

$$v_3 = \sqrt{2(9{,}8\text{m/s}^2)(9-1)\text{m}} = 12{,}5\text{m/s}$$

b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y 3, encontramos:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h$$

$$P_2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(v_3^2 - v_2^2) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2[1 - (\frac{v_2}{v_3})^2]$$

De la ecuación de continuidad $v_2 A_2 = v_3 A_3$, se deduce que: $v_2 / v_3 = A_3 / A_2$, por lo tanto la presión en 2 es:

$$P_2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2[1 - (\frac{A_3}{A_2})^2]$$

$$P_2 = 1{,}01x10^5\text{Pa} + \frac{1}{2}(1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(12{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}})^2[1 - (\frac{15}{30})^2]$$

$$P_2 = 1{,}60x10^5\text{Pa}$$

Respuesta:

a) $v_3 = 12{,}5\text{m/s}$
b) $P_2 = 1{,}60x10^5\text{Pa}$

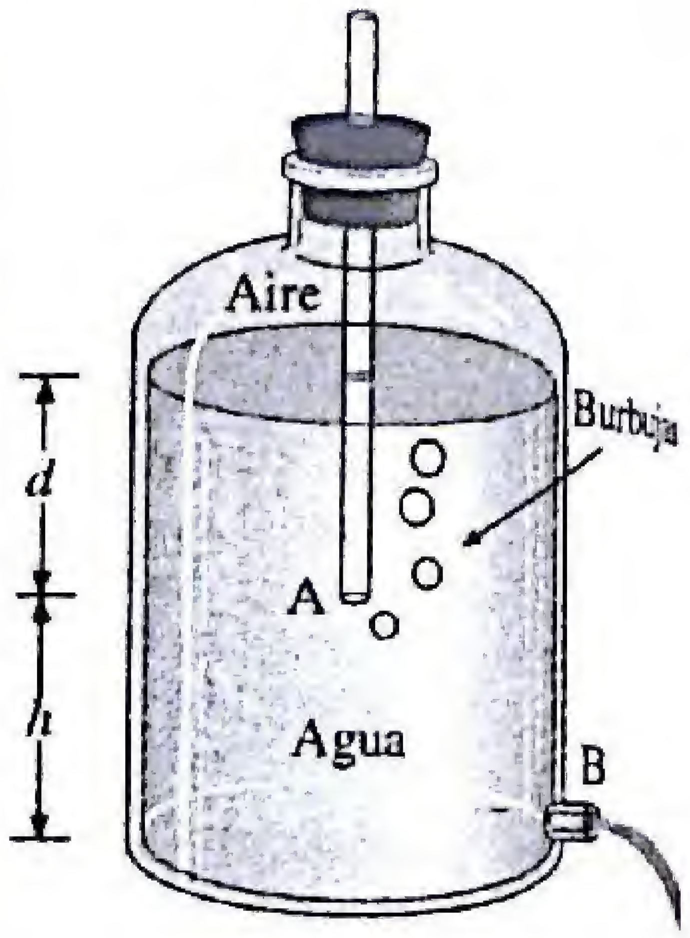
PR-2.21. *Un flujo constante con la botella de Mariotte*

Hemos visto que si a un recipiente lleno de agua con su parte superior abierta a la atmósfera, se le practica un agujero cerca del fondo, el agua saldrá con una rapidez que decrece a medida que desciende el nivel de agua.

a) La figura muestra una botella que tiene un tapón atravesado por un tubo que penetra en el agua. Esta es la llamada botella de Mariotte que permite obtener un flujo estacionario en B. ¿Cómo funciona?

b) Halle la velocidad del agua en B y demuestre que esta permanece constante siempre que su nivel esté por encima de A.

c) ¿Cuál es la presión del aire atrapado en la botella por encima de la superficie?



Solución: a) A medida que el agua sale por el tubo en B, su nivel va bajando, lo cual hace que el aire que existe en la parte superior se enrarezca. Desde el exterior penetra aire por el tubo vertical, formando burbujas al infiltrarse a través del agua y después se va acumulando sobre ella en la parte superior. Con esto se logra que la presión al nivel de A sea igual a la atmosférica ($P_A = P_{atm}$). Por lo tanto, el agua sale por B impulsada solamente por la presión que ejerce la columna de agua desde A hasta B.

b) La velocidad del agua en la superficie se considera despreciable. Si aplicamos el teorema de Bernoulli entre los puntos A y B se obtiene:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho 0^2 + \rho g y_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B$$

Como: $P_A = P_B = P_{atm}$ y $(y_A - y_B) = h$, se obtiene:

$$v_B = \sqrt{2gh} = \text{constante}$$

c) La presión del aire que queda atrapado en la botella por encima de la superficie del agua es:

$$P = P_A - \rho g d = P_{atm} - \rho g d$$

Observe que a medida que el nivel del agua desciende y la altura d disminuye, la presión del aire atrapado aumenta aunque el volumen ocupado aumenta. Esto ocurre porque el aire también entra por A.

Respuesta:

b) $v_B = \sqrt{2gh}$ = constante
c) $P = P_{atm} - \rho g d$

PR-2.22. *La furia del viento se llevó el techo*

Sobre el techo de una casa a la orilla de la playa sopla un fuerte viento a la velocidad de 180 km/h. Suponga un techo horizontal que tiene un área de 40 m^2 siendo la presión en el interior de la casa igual a la presión atmosférica. Calcule la fuerza neta que tiende a despegar el techo debido a la presión diferencial que existe en el interior y fuera de la casa.

Solución: El aire encima empuja el techo hacia abajo con una fuerza: $F_1 = P_1 A$, mientras que el aire dentro de la casa lo empuja hacia arriba con una fuerza: $F_i = P_{atm} A$. La fuerza neta sobre el techo será:

$$F_{neta} = F_i - F_1 = (P_{atm} - P_1)A$$

Supongamos que el techo está a una altura y_1 respecto al suelo. Para hallar la presión P_1 que existe justo encima del techo, aplicamos el teorema de Bernoulli escogiendo un punto 2 ubicado muy distante del techo y a igual elevación ($y_2 = y_1$), donde no sople viento ($v_2 = 0$) de modo que allí la presión sea igual a la atmosférica ($P_2 = P_{atm}$)

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g y_1$$

Simplificando, se obtiene:

$$P_1 = P_{atm} - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

Como se trata de un techo plano horizontal de área A, la fuerza neta que tiende a elevarlo será:

$$F_{neta} = (P_{atm} - P_1)A = [P_{atm} - (P_{atm} - \frac{1}{2}\rho v_1^2)]A$$

$$F_{neta} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 A = \frac{1}{2}(1{,}3\text{kg/m}^3)(50\text{m/s})^2(40\text{m}^2) = 65000\text{N}$$

Esta enorme fuerza superaría con creces al peso del techo, de manera que para evitar que se produzca, lo mas recomendable en estas situaciones sería abrir alguna ventana para que de esta manera las presiones dentro y fuera tiendan a equilibrarse.

Respuesta

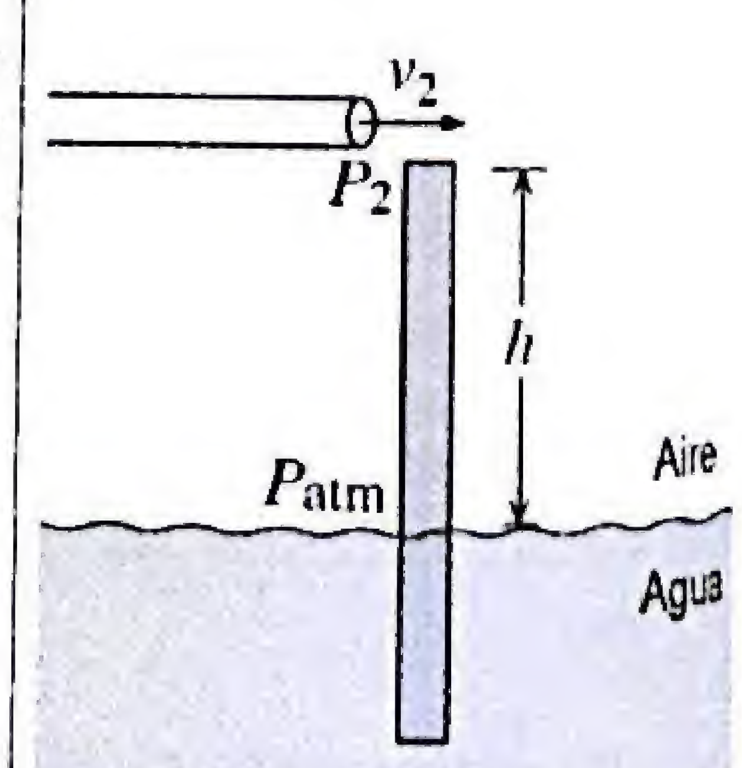
$\boxed{F_{neta} = 65000\text{N}}$

PR-2.23. *El efecto atomizador usando un pitillo*

En una demostración de física, cortamos un pitillo de plástico en dos pedazos. Un pedazo se sumerge en un vaso con agua y se sostiene verticalmente de manera que sobresalga en una cierta altura por encima del nivel del agua. El otro pedazo se coloca horizontalmente y luego, soplamos el aire fuertemente justo al ras de la boca del pitillo sumergido. De esta manera el agua es succionada, sube hacia la corriente de aire, y emerge pulverizada. ¿Cuál debe ser la mínima velocidad del aire soplado para que el nivel del agua suba hasta una altura $h = 4$ cm?

El pitillo atomizador

Solución: Aplicamos el teorema de Bernoulli entre dos puntos de una línea de flujo de aire. Escogemos el punto 2 en la boca del pitillo vertical donde el aire tiene una velocidad v_2, y el punto 1 en una zona donde está en reposo ($v_1 = 0$), a la presión atmosférica ($P_1 = P_{atm}$) y a la misma altura del punto 2, ($y_1 = y_2$).



La diferencia de presión entre estos dos puntos será:

$$P_{atm} - P_2 = \frac{1}{2}\rho_{aire} v_2^2$$

Esta debe ser igual a la diferencia de presión, $\Delta P = \rho_{agua} gh$, de la columna de agua de elevación h:

$$\frac{1}{2}\rho_{aire} v_2^2 = \rho_{agua} gh$$

Despejando, obtenemos la velocidad del aire soplado:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\rho_{agua} gh}{\rho_{aire}}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}04\text{m})}{1{,}30\text{kg/m}^3}} = 24{,}6\text{m/s}$$

• Densidades:

$\rho_{aire} = 1{,}30$ kg/m^3

$\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3

Respuesta:

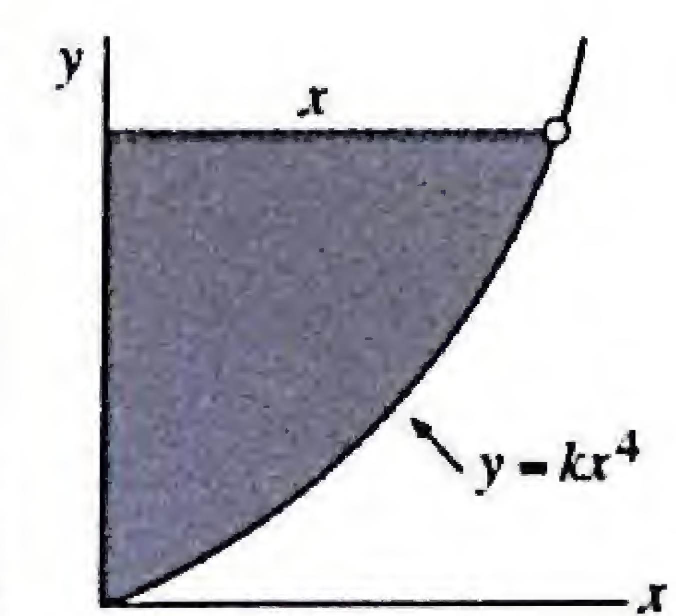
$\boxed{v = 24{,}6 \text{ m/s}}$

PR-2.24. *Un reloj de agua que usaban en la antigüedad*

La clepsidra es un reloj de agua con forma de reloj de arena que era usado en la antigua Grecia. Consiste en dos recipientes cónicos de vidrio, unidos en el vértice donde hay un pequeño orificio para que el agua baje de un recipiente al otro. La escala de tiempo se marca por la regularidad del descenso del nivel de agua. ¿Qué forma debe tener el recipiente para que el descenso del nivel del agua sea lineal con el tiempo?

Solución: Suponiendo que el área del agujero es muy pequeña frente al área de la superficie superior del agua, ($A_2 << A_1$) y aplicando el teorema de Torricelli, la velocidad de salida del líquido por el agujero es:

$$v_2 = \sqrt{2gy}$$



Siendo y la altura de la columna de agua. Por la ecuación de continuidad, se tiene:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A_1}{v_2} = \frac{A_2}{v_1}$$

Si el recipiente tiene simetría axial, en un instante dado el área superior del líquido es, $A_1(x) = \pi x^2$, luego:

$$\frac{\pi x^2}{\sqrt{2gy}} = \frac{A_2}{v_1} \qquad \Rightarrow \qquad \pi^2 v_1^2 x^4 = 2gyA_2^2$$

La condición para que el nivel del agua descienda linealmente con el tiempo es que la velocidad v_1 sea constante, de modo que el perfil $y(x)$ del recipiente debe cumplir con la ecuación:

$$y = (\frac{\pi^2 v_1^2}{2gA_2^2})x^4 = kx^4$$

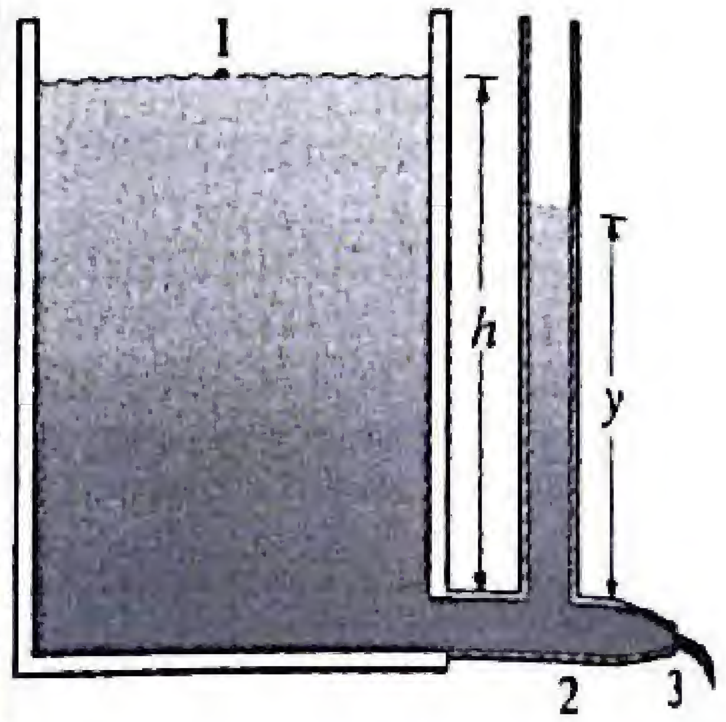
Siendo la constante: $k = \pi^2 v_1^2 / 2gA_2^2$

Respuesta:

$y = kx^4$
Siendo la constante:
$k = \pi^2 v_1^2 / 2gA_2^2$

PR-2.25. *Tanque con un tubo vertical en la salida*

Un tanque de área grande, A_1, contiene agua hasta una altura h y en el fondo tiene un tubo horizontal de salida al cual está conectado un tubo vertical. El tubo horizontal tiene un área $A_2 << A_1$ y termina en una boquilla cónica con un tapón de área $A_3 = A_2/2$. ¿Si se quita el tapón para que el agua salga, cuál será la altura y de la columna de agua en el tubo vertical?



Solución: Aplicando la ecuación de Bernoulli a una línea de flujo estacionario entre los puntos 1 y 3, los cuales están a la presión atmosférica, y tomando en cuenta que $v_1 \approx 0$, $y_1 = h$, $y_3 = 0$:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho 0^2 + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(0)$$

Despejando se obtiene la velocidad de salida del chorro:

$$v_3 = \sqrt{2gh}$$

Por la ecuación de continuidad entre los puntos 2 y 3, encontramos:

$$v_2 A_2 = v_3 A_3 \quad \Rightarrow \quad v_2 = (\frac{A_3}{A_2})v_3 = \frac{1}{2}v_3 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre los puntos 2 y 3:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(0)$$

$$P_2 - P_{atm} = \frac{1}{2}\rho(v_3^2 - v_2^2)$$

Esta corresponde a la diferencia de presión hidrostática de la columna de agua de elevación y. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\rho(v_3^2 - v_2^2) = \rho g y$$

$$y = \frac{1}{2g}(v_3^2 - v_2^2) = \frac{1}{2g}(2gh - \frac{gh}{2}) = \frac{3}{4}h$$

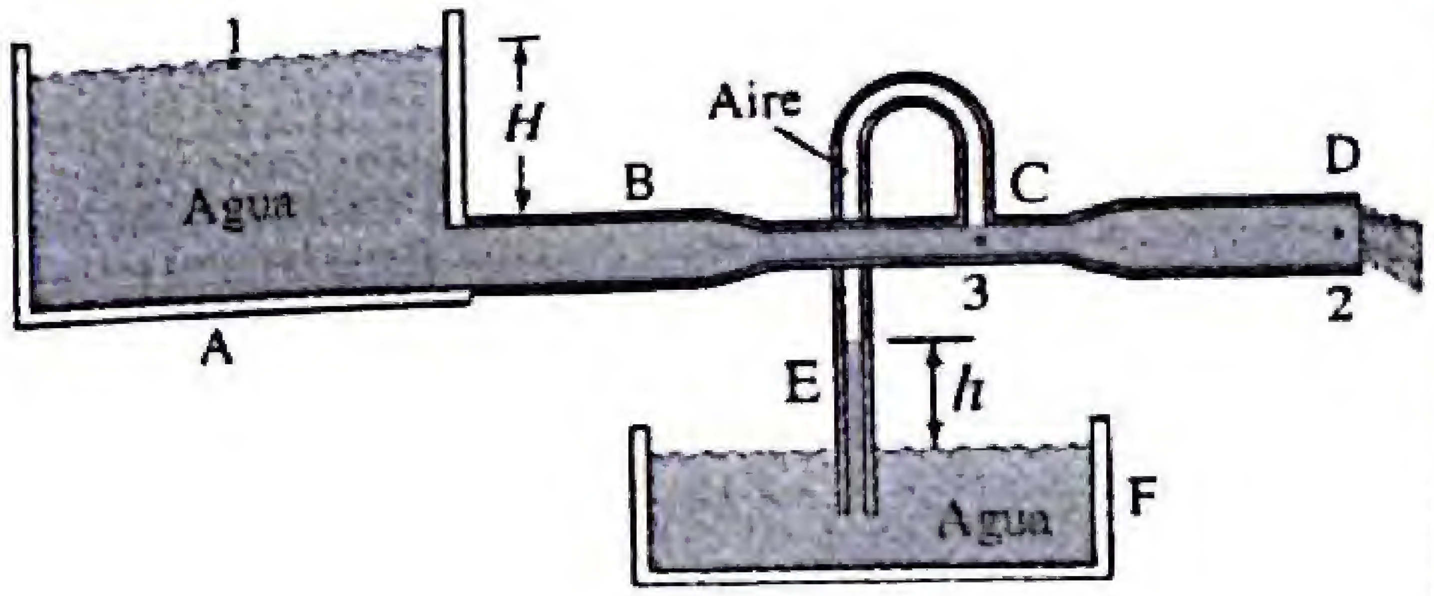
Respuesta:

$$\boxed{y = \frac{3}{4}h}$$

PR-2.26. *Dos tanques conectados por un tubo en U*

El tanque A contiene agua hasta una altura H y en el fondo tiene conectado un tubo horizontal BCD con una parte estrecha en el medio y su extremo D abierto al aire.

Un tubo sale de la constricción en C y baja al tanque F que contiene también agua. Si el área transversal del tubo en C es la mitad del área en D, ¿a qué altura h subirá el agua por el tubo vertical E?



Solución: Aplicamos el teorema de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente entre los puntos 1 (en la superficie) y 2 (en la salida) que están ambos a la presión atmosférica y tomando en cuenta que $v_1 \approx 0$:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho 0^2 + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

Se obtiene:

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

Aplicando la ecuación de continuidad entre 2 y 3, se obtiene v_3:

$$v_2 A_2 = A_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = (\frac{A_2}{A_3})v_2 = 2v_2 = \sqrt{8gh}$$

$$v_3 = \sqrt{8gH}$$

La presión P_3 del líquido en el cuello se obtiene aplicando el teorema de Bernoulli entre 2 y 3:

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0) = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g(0)$$

$$P_3 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_3^2) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(2gH - 8gH)$$

$$P_3 = P_{atm} - 3\rho gH$$

Esta es la misma presión del aire encerrado en el tubo y la presión hidrostática al nivel del líquido en el tubo vertical E. La altura h de la columna del líquido está dada por:

$$\rho gh = P_{atm} - P_3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_{atm} - P_3}{\rho g} = \frac{3\rho gH}{\rho g} = 3H$$

Respuesta:

$$\boxed{h = 3H}$$

PR-2.27. *Cómase el helado antes que se derrita*

La barquilla de un helado es un cono de radio $R = 4$ cm en su abertura y altura $H = 10$ cm. Suponga que el helado se ha derretido y el líquido llena todo el cono hasta su borde. En un instante dado, en el fondo del cono se practica un pequeño agujero de radio $r = 0{,}6$ mm y el líquido empieza a salir. Si ignoramos la viscosidad del fluido, determine el tiempo que tarda en vaciarse.

Solución: Suponiendo que la velocidad en la superficie superior es despreciable y aplicando el teorema de Bernoulli, escribimos:

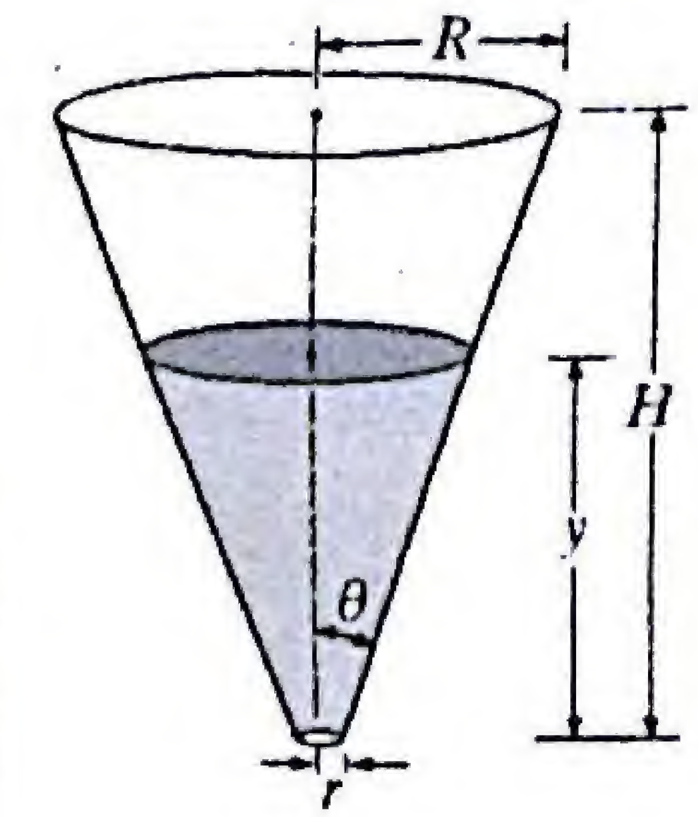
$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho gy = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

Despejando, encontramos la velocidad de salida del fluido por el agujero:

$$v_2 = \sqrt{2gy}$$

Por otra parte, sabemos que el volumen del cono es igual a un tercio del área de su base por la altura:

$$V(y) = \frac{1}{3}(\pi r^2)y = \frac{1}{3}\pi(ytg\theta)^2)y$$



La tasa de cambio del volumen de líquido de altura y es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi y^3 tg^2\theta}{3}\right) = \pi y^2 tg^2\theta\frac{dy}{dt}$$

La tasa de flujo por el agujero es igual a la tasa de decrecimiento del volumen del líquido:

$$\frac{dV}{dt} = v_2 A_2 = \sqrt{2gy}\,\pi r^2 = -\pi y^2 tg^2\theta\frac{dy}{dt}$$

Tomando en cuenta que: $tg\theta = R/H$, escribimos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2gy}\,\pi r^2}{\pi y^2 tg^2\theta} = -\frac{\sqrt{2g}\,r^2 H^2}{R^2}\frac{1}{y^{3/2}}$$

Integrando, se obtiene el tiempo que tarda en vaciarse el líquido del cono:

$$T = \int_0^T dt = -\frac{R^2}{\sqrt{2g}\,r^2H^2}\int_H^0 y^{3/2}dy = -\frac{R^2}{\sqrt{2g}\,r^2H^2}\left.\frac{y^{5/2}}{5/2}\right|_H^0$$

$$T = \frac{2}{5}\left(\frac{4\text{cm}}{0{,}06\text{cm}}\right)^2\sqrt{\frac{0{,}1\text{m}}{2(9{,}8\text{m/s}^2)}} = 127\text{s} = 2{,}12\text{min}$$

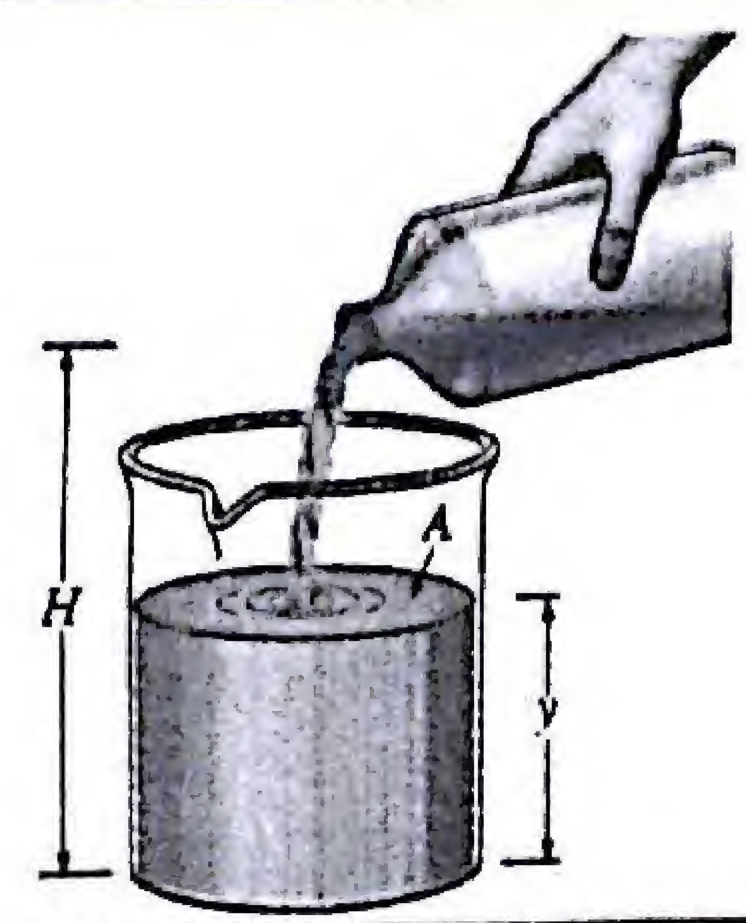
Respuesta:

$$\boxed{T = \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{\frac{H}{2g}} = 127\text{s}}$$

PR-2.28. *Fuerza sobre el fondo del recipiente*

Sobre un recipiente cilíndrico de área A se derrama un líquido de densidad ρ desde una altura H a una tasa constante R (m³/s). Halle la fuerza que ejerce el líquido sobre el fondo del recipiente en función del tiempo.

Solución: El líquido tiene velocidad vertical inicial nula y llega a la superficie con una velocidad:



$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(H-y)}$$

El nivel del líquido sube a una tasa constante: $\Delta y/\Delta t = R/A$ y el chorro golpea la superficie con una fuerza:

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \rho vA\frac{\Delta y}{\Delta t} = \rho vR$$

Al cabo de un tiempo t, la altura del nivel del líquido en el recipiente será:

$$y = (\frac{\Delta y}{\Delta t})t = \frac{Rt}{A}$$

De modo que la fuerza total que se ejerce sobre el fondo del recipiente en ese instante es:

$$F = F_1 + Mg = \rho vR + \rho yAg = \rho vR + \rho gRt$$

$$F = \rho R[\sqrt{2g(H - \frac{Rt}{A})} + gt]$$

Respuesta:

$$\boxed{F = \rho R[\sqrt{2g(H - \frac{Rt}{A})} + gt]}$$

PR-2.29. ***El famoso problema de la bañera***

Una bañera de paredes verticales, de profundidad H y fondo de área A_1, tiene un orificio de vaciado de área $A_2 << A_1$. Cuando se coloca un tapón en el orificio de salida, y se abre el grifo, se llena a su máximo, en un tiempo T. Cuando está completamente llena y se quita el tapón de desagüe, se observa que el tiempo de vaciado es t.

a) ¿Cuál sería la altura h del nivel estabilizado del agua?

b) ¿Habrá agua en la bañera aún si el tiempo de vaciado fuese mas corto que el de llenado ($t < T$)?

c) ¿Bajo qué condiciones será posible completamente la bañera dejando el orificio de desagüe abierto?

d) Calcule el nivel de agua en la bañera que se alcanza en los siguientes casos:

1) $T =$ 12 min, $t =$ 24 min
2) $T =$ 12 min, $t =$ 12 min
3) $T =$ 24 min, $t =$ 12 min

Solución: a) Una versión simple de este problema ya la hemos propuesto en el volumen 1 (Cinemática, PE-1.10), donde sugerimos una solución puramente matemática que es errónea porque supone que la velocidad de desagüe es constante. Sabemos ahora que la velocidad de salida del agua en un tanque disminuye a medida que el nivel desciende, según la expresión de Torricelli:

$v_2 = \sqrt{2gh}$, $h =$ altura del nivel del agua.

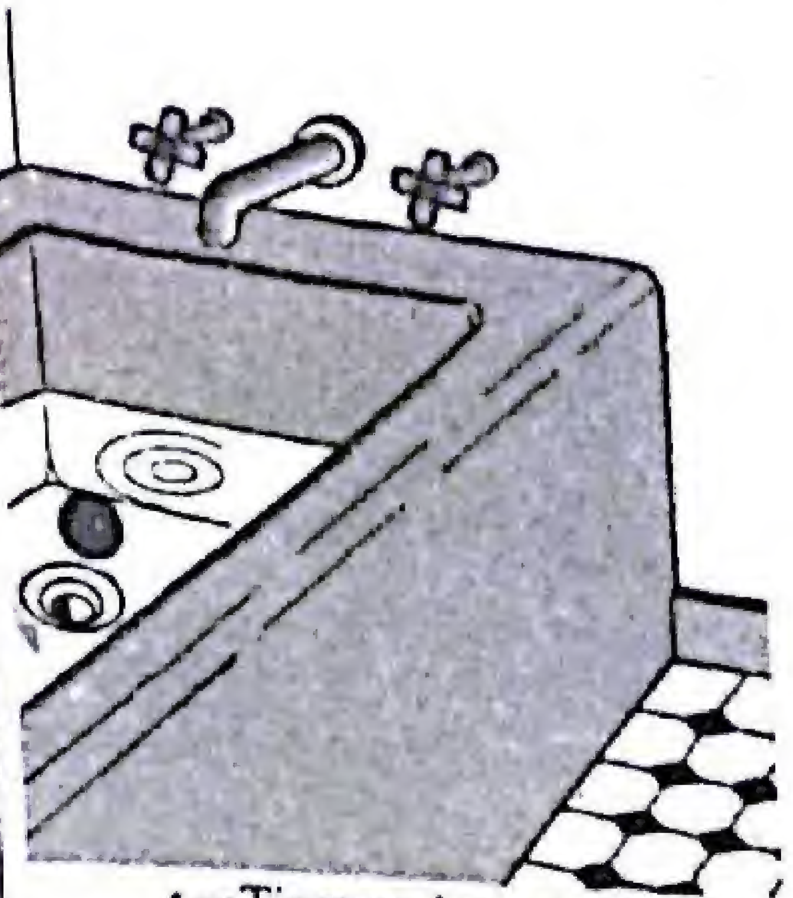
Esta se deriva del teorema de Bernoulli, considerando que la velocidad v_1 de la superficie superior del agua es despreciable ($v_1 << v_2$) ya que:

$v_2 A_2 = v_1 A_1$ siendo $A_2 << A_1$

$T =$ Tiempo de llenado de la bañera sin desagüe

Observamos que si el grifo permanece cerrado, la velocidad de salida, $v_2 = \sqrt{2gh}$ es semejante a la de un objeto que cae desde una altura h con la aceleración constante, g. Este movimiento uniforme comienza con una velocidad máxima, $v_2^0 = \sqrt{2gH}$ y termina con una velocidad nula. Asimismo, el descenso de la superficie superior del agua será con aceleración constante a, que se inicia con una velocidad máxima $v_1^0 = \sqrt{2aH}$ y termina con velocidad nula. Para relacionar a con g, escribimos:

$$\frac{v_1^0}{v_2^0} = \sqrt{\frac{2aH}{2gH}} = \frac{A_2}{A_1} \quad \Rightarrow \quad a = g(\frac{A_2}{A_1})^2$$



$t =$ Tiempo de vaciado

Como la superficie desciende una distancia H en el tiempo t, se tiene:

$$H = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g(\frac{A_2}{A_1})^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad (\frac{A_1}{A_2})^2 = \frac{gt^2}{2H} \qquad (1)$$

Cuando el agujero de desagüe está tapado, la velocidad de ascenso del nivel del agua es constante $v_1' = H/T$ y cuando está destapado la velocidad de descenso decrece en el transcurso del tiempo:

$$v_1(t) = (A_2/A_1)v_2(t) = (A_2/A_1)\sqrt{2gh(t)}$$

El nivel será constante cuando la velocidad de su descenso sea igual a la de su ascenso-

$$v_1' = v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{T} = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}$$

Por lo tanto, la altura h del nivel estabilizado del líquido es:

$$h = \frac{1}{2g}(\frac{H}{T})^2(\frac{A_1}{A_2})^2$$

Sustituyendo $(A_1/A_2)^2$ de la expresión (1), se obtiene la expresión para la altura a la que debe mantenerse el nivel del líquido:

$$h = \frac{1}{2g}(\frac{H}{T})^2\frac{gt^2}{2H} = \frac{H}{4}(\frac{t}{T})^2$$

Observamos que este resultado no depende ni de g ni de las áreas A_1 y A_2.

b) Según esta expresión, a menos que se tenga $T \to \infty$ (que el grifo esté cerrado) o que $t \to 0$ (que el vaciado sea instantáneo), siempre se mantendrá una capa de agua en la bañera, aún si el tiempo de vaciado fuese mas corto que el de llenado.

c) Poniendo $h = H$ en la expresión anterior, será posible llenar toda la bañera con el orificio abierto, si se cumple:

$$H = \frac{H}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = 2T$$

Es decir, se llena en el caso en que el tiempo de llenado sea dos veces menor que el de vaciado.

d) Aplicando para los casos particulares la expresión $h = Ht^2/4T^2$, se tiene:

1) $T =$ 12 min, $t =$ 24 min: $h = H$

2) $T =$ 12 min, $t =$ 12 min: $h = H/4$

3) $T =$ 24 min, $t =$ 12 min: $h = H/16$

Respuesta:

a) $h = \frac{H}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2$
b) Siempre habrá agua.
c) $t = 2T$
d) T=12 min, t=24 min: $h = H$
T=12 min, t=12 min: $h = H/4$
T=24min, t=12 min: $h = H/16$

PR-2.30. *Tiempo que tarda en llenarse la bañera*

Considere de nuevo el problema anterior de la bañera de paredes verticales y profundidad H, que tiene un tiempo de llenado T y un tiempo de vaciado t.
a) Halle el tiempo que se necesita para alcanzar un nivel h constante cuando el llenado se efectúa estando el orificio de desagüe destapado.
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo el nivel del agua alcanzaría el 99% del nivel máximo ($h = 0.99H$)?

Solución: a) Según el problema anterior, cuando el llenado se efectúa estando el orificio de desagüe destapado, el nivel del líquido subirá con una velocidad:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{H}{T} - \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gy}$$

De donde:

$$dt = \frac{dy}{\frac{H}{T} - \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gy}}$$

Integrando, se obtiene el tiempo requerido para que el nivel del líquido alcance una altura h:

$$\int_0^{t_0} dt = \int_0^h \frac{dy}{\left[\frac{H}{T} - \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gy}\right]}$$

$$t_0 = -\frac{A_1}{gA_2}\left[\sqrt{2gh} + \frac{HA_1}{TA_2}\ln\left(1 - \frac{TA_2}{HA_1}\sqrt{2gh}\right)\right] \qquad (1)$$

Podemos simplificar esta expresión tomando en cuenta que:

$$v_1 = \frac{dh}{dt} = \frac{A_2}{A_1}v_2 = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{A_1}{A_2\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Integrando:

$$\int_0^t dt = \frac{A_1}{A_2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$t = \frac{A_1}{A_2\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{H}}{1/2} = \frac{2A_1}{A_2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

De donde:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{2g}{H}}$$

Sustituyendo A_1/A_2 en la expresión (1) se tiene:

$$t_0 = -\left[t\sqrt{\frac{h}{H}} + \frac{t^2}{2T}\ln\left(1 - \frac{2T}{t}\sqrt{\frac{h}{H}}\right)\right]$$

Pero vimos en el problema anterior que el agua alcanzaría el nivel máximo ($h = H$) a condición de que el tiempo de llenado sea dos veces menor que el de vaciado ($t = 2T$). De acuerdo a esta expresión el recipiente nunca se llenará.

b) Para alcanzar el 99% del nivel máximo ($h = 0.99H$), la expresión anterior queda:

$$t_0 = -\left[0.995t + \frac{t^2}{2T}\ln\left(1 - \frac{2T}{t}0.995\right)\right]$$

Como $t = 2T$, el tiempo requerido es:

$$t_0 = -[0.995 + \ln(1 - 0.995)](2T) = 8.6T$$

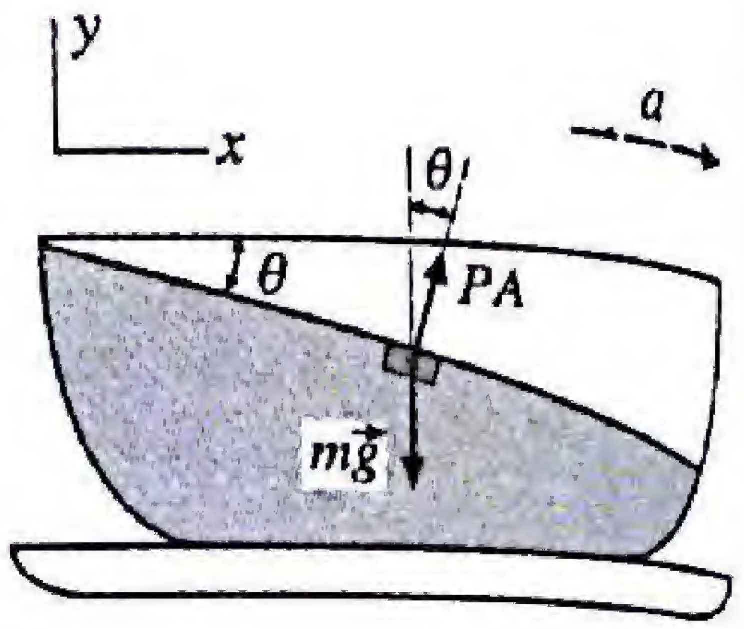
Respuesta:

a)
$t_0 = -\left[t\sqrt{\frac{h}{H}} + \frac{t^2}{2T}\ln\left(1 - \frac{2T}{t}\sqrt{\frac{h}{H}}\right)\right]$
b) $t_0 = 8.6T$

PR-2.31. *No es fácil tomar sopa en un tren acelerado*

Un plato de sopa está en reposo sobre una mesa horizontal en el vagón restaurante de un tren. Suponga que la sopa es un fluido ideal, es decir, incomprensible y sin fricción interna. Si la aceleración del tren es a hacia la derecha, ¿cuál será el ángulo que formará la superficie de la sopa con la horizontal?

Solución: a) Cuando el plato es acelerado hacia la derecha, el líquido tiende a acumularse en la parte izquierda y, en la situación estacionaria este lado quedará a un nivel por encima de su lado derecho. Consideremos en la superficie un elemento del fluido en forma de un disco delgado de área A y masa m. La fuerza de empuje, $F_e = PA$, sobre este elemento de fluido ejercida por el fluido adyacente queda en la normal local a la superficie y forma un ángulo θ con la vertical. Las ecuaciones de movimiento de este disco son:



$$\sum F_x = PAsen\theta = ma$$

$$\sum F_y = PA\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad PA\cos\theta = mg$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene el ángulo que forma la superficie del líquido con la horizontal:

$$\frac{PAsen\theta}{PA\cos\theta} = \frac{ma}{mg} \quad \Rightarrow \quad tg\theta = \frac{a}{g}$$

Respuesta:

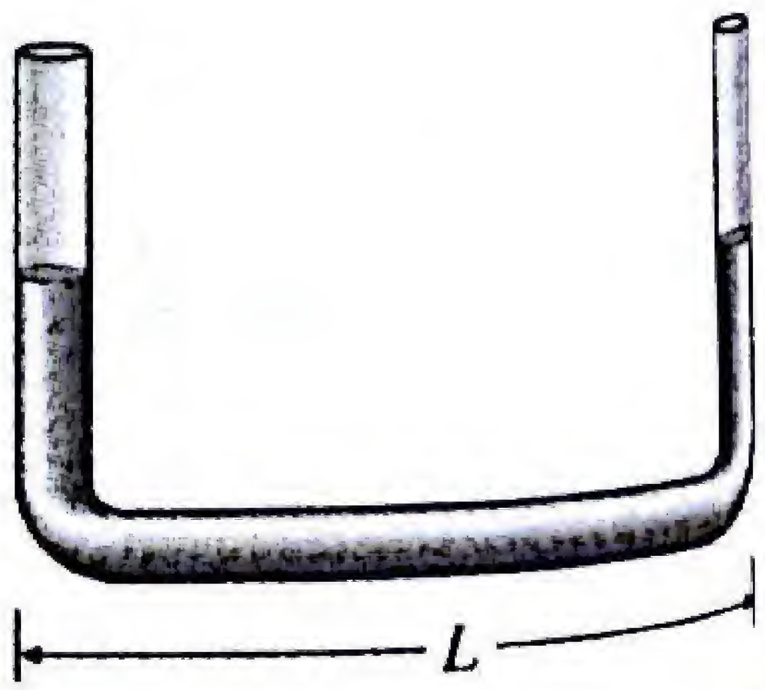
$tg\theta = \frac{a}{g}$

PR-2.32. *Líquido acelerado en un tubo en U*

Un tubo en forma de U con una porción horizontal de longitud L, contiene un líquido. ¿Qué diferencia de altura habrá entre las dos columnas verticales en los casos siguientes?

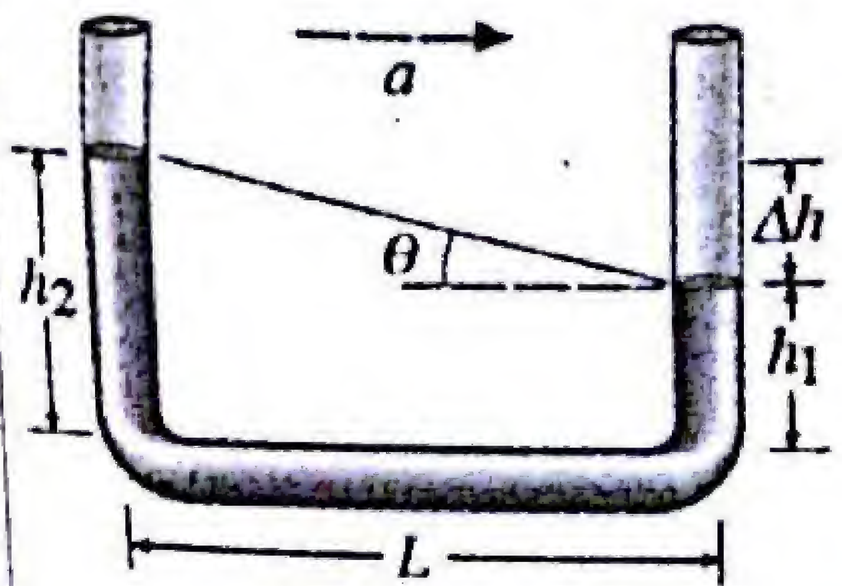
a) El tubo tiene una aceleración a hacia la derecha.

b) El tubo se pone a girar con una velocidad angular, ω, con la rama vertical izquierda en el eje de rotación.



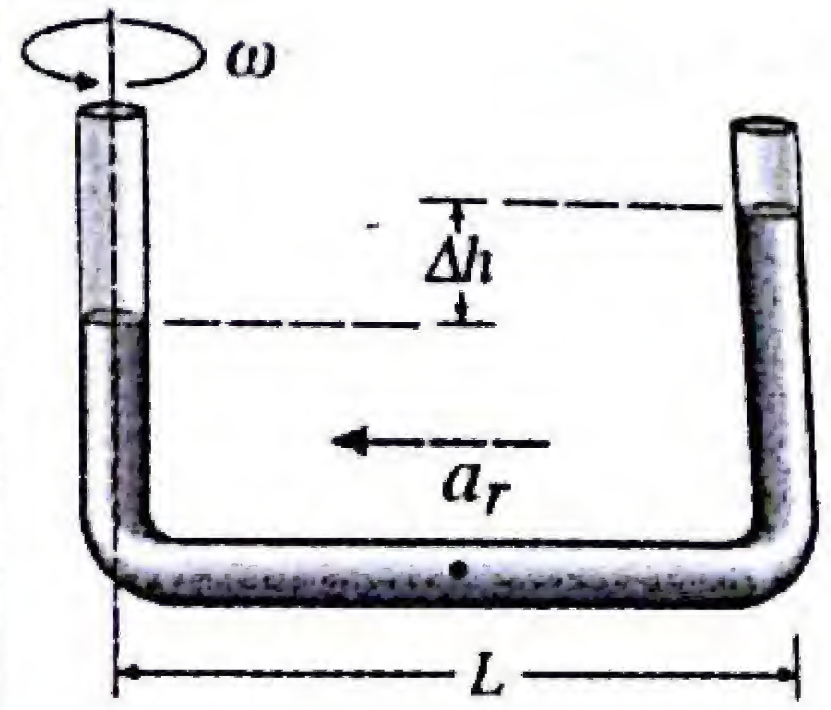
Solución: a) Podemos aplicar directamente la expresión obtenida en el problema anterior:

$$tg\theta = \frac{\Delta h}{L} = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{a}{g}L$$



Otro procedimiento consiste en considerar el fluido en la parte horizontal del tubo de longitud L, que tiene una masa: $M = \rho V = \rho AL$, siendo A el área de su sección transversal. Este fluido estará sujeto a una fuerza neta debida a la diferencia de presión que existe en el fondo de las dos columnas verticales: $\rho g h_2 - \rho g h_1$. Aplicando la segunda ley de Newton, escribimos:

$$\sum F_x = F_2 - F_1 = Ma \quad \Rightarrow \quad \rho g(h_2 - h_1) = (\rho AL)a$$



La diferencia de altura entre las dos columnas será:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{a}{g}L$$

b) Si consideramos la parte horizontal del fluido de longitud L, ésta estará acelerada radialmente hacia la izquierda (hacia el eje de rotación), siendo la aceleración de su centro de masa: $a_r = \omega^2 r = \omega^2 L/2$. Aplicando la expresión obtenida en la parte (a), la diferencia de altura será:

$$\Delta h = \frac{a_r}{g}L = (\frac{\omega^2 L}{2g})L = \frac{\omega^2 L^2}{2g}$$

Observe que en ambas situaciones, la diferencia de alturas no depende ni de la densidad del líquido ni tampoco del área de la sección transversal del tubo.

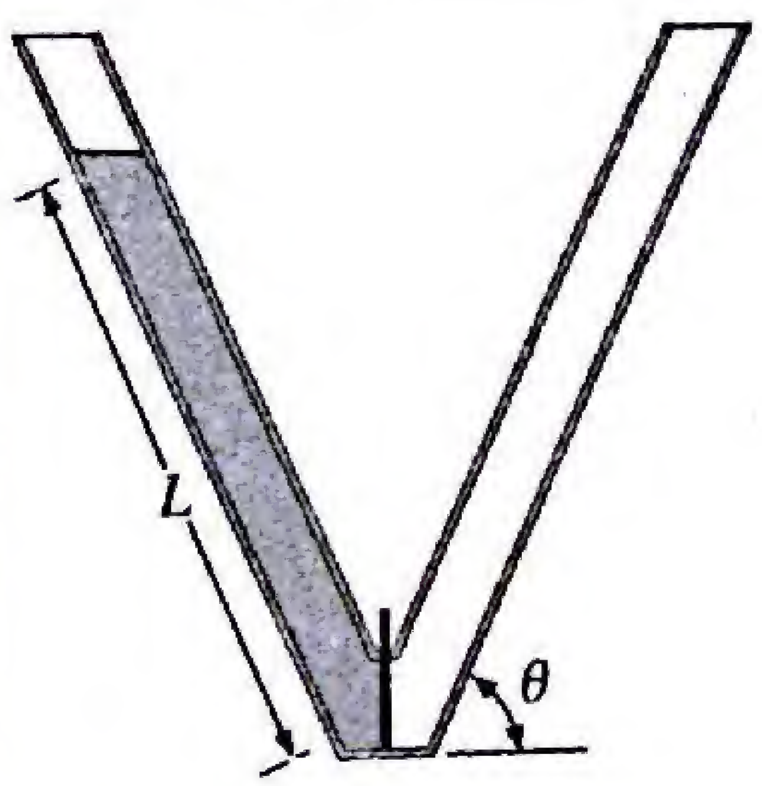
Respuesta:

a) $\Delta h = \frac{a}{g}L$

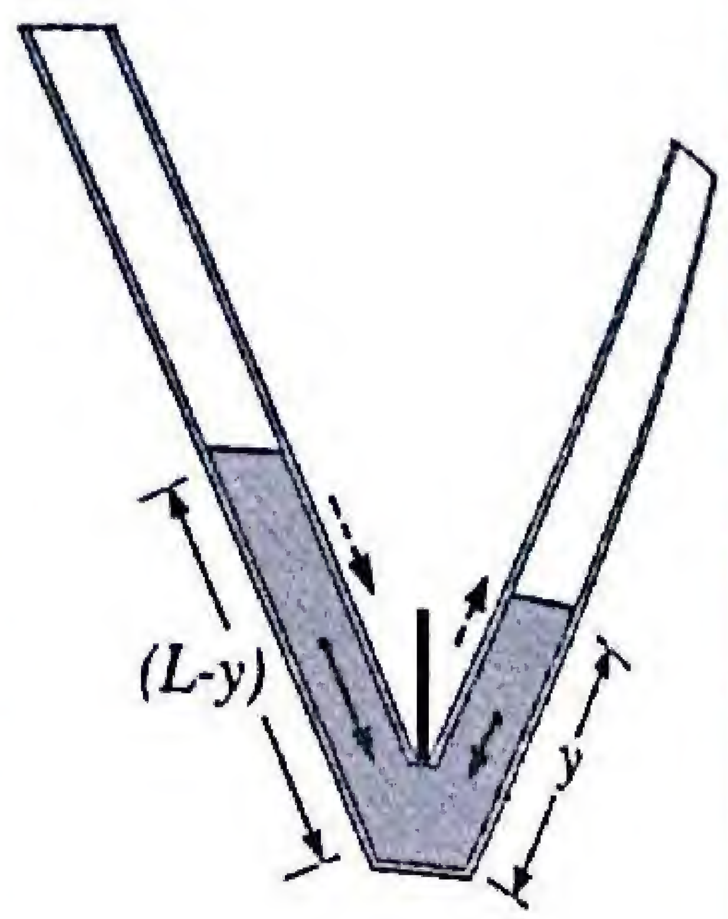
b) $\Delta h = \frac{\omega^2 L^2}{2g}$

PR-2.33. *Oscilaciones del agua en un tubo en V*

Un tubo delgado de vidrio está doblado en forma de V y su parte izquierda tiene una columna de agua de longitud L. Mediante un tabique en el fondo se evita que salga agua hacia el lado derecho. En un cierto instante se quita el tabique que lo separa y el agua adquiere un movimiento oscilatorio entre los dos tubos. Determine el periodo de las oscilaciones suponiendo que no existe fricción con las paredes.



Solución: Si en un instante dado, en el lado derecho hay una columna de agua de longitud y, entonces en el lado izquierdo habrá una columna de longitud $(L-y)$. La fuerza neta que actúa sobre todo el agua de masa m es:



$$F = \left(\frac{L-y}{L}\right)mgsen\theta - \frac{y}{L}mgsen\theta = \left(\frac{L-2y}{L}\right)mgsen\theta$$

Esta fuerza produce sobre el agua una aceleración a lo largo del tubo y está dada por la segunda ley de Newton, $ma = F$, por lo tanto:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{L-2y}{L}\right)mgsen\theta$$

Como L es constante, podemos escribir:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(y-\frac{L}{2}\right) + \frac{2gsen\theta}{L}\left(y-\frac{L}{2}\right) = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple que está centrado en la posición $y = L/2$. La frecuencia angular de oscilación está dada por:

$$\omega^2 = \frac{2gsen\theta}{L}$$

De modo que el periodo del movimiento oscilatorio es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2gsen\theta}}$$

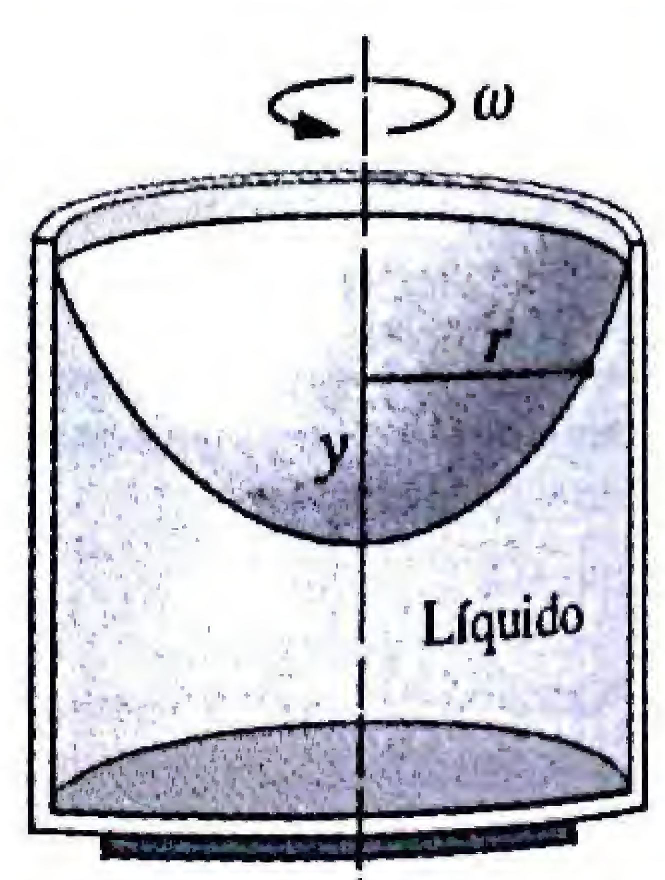
Respuesta:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2gsen\theta}}}$$

PR-2.34. *La superficie curva de un líquido en rotación*

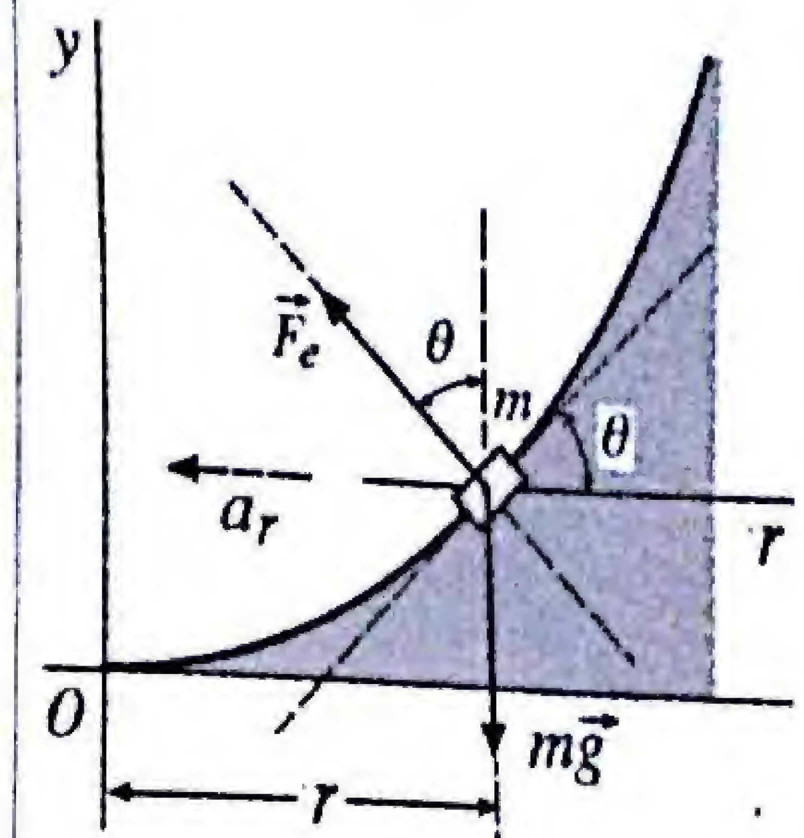
El recipiente cilíndrico de una batidora de cocina está parcialmente lleno de líquido y se pone a girar con una velocidad angular constante, ω, en torno al eje vertical. Demuestre que cuando se alcanza una situación estacionaria, la superficie libre del líquido adopta la forma de un paraboloide de revolución. Es decir, la altura del líquido está dada por la expresión:

$$y(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$



La superficie del líquido en rotación es un paraboloide

Solución: En la situación estacionaria, todos los puntos en la superficie del líquido tienen igual presión, ya que están en contacto con el aire. Sea un elemento de fluido de masa m ubicado a una distancia r del eje de rotación. Las dos fuerzas que actúan sobre este elemento son, su peso mg y la fuerza de empuje ejercida por el fluido adyacente ($F_e = PA$), la cual queda en dirección perpendicular a la superficie. El elemento de fluido gira con una velocidad angular ω alrededor del eje y tendrá una aceleración radial:



$$a_r = \omega^2 r$$

Las ecuaciones de movimiento son:

Radial: $\sum F_r = ma_r \quad \Rightarrow \quad PAsen\theta = m\omega^2 r$

Vertical: $\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad PAcos\,\theta = mg$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda, y tomando en cuenta que, $tg\theta = dy/dr$, (la pendiente de la superficie del agua en ese punto), se tiene:

$$tg\theta = \frac{dy}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\omega^2}{g}rdr$$

Integrando esta ecuación, obtenemos finalmente la altura del líquido en función del radio:

$$\int_0^y dy = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r rdr \quad \Rightarrow \quad y(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

Es decir, la superficie del agua es un paraboloide de revolución con concavidad hacia arriba. Observe que de esta expresión se deduce el mismo resultado que el del problema PR-2.32 para $r = L$.

Esta técnica es la que se utiliza para fabricar espejos parabólicos para telescopios. El procedimiento empleado es que se hace girar vidrio líquido y, mientras gira se deja que solidifique.

Respuesta:

Paraboloide de revolución:

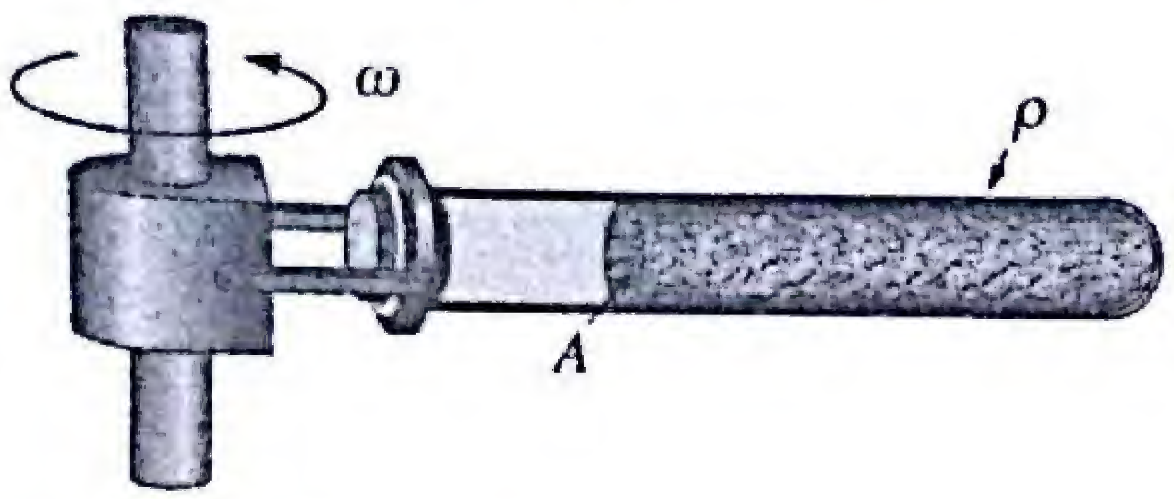
$$\boxed{y(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2}$$

PR-2.35. *Un tubo de ensayo en una centrifugadora*

Un fluido incomprensible con densidad ρ está en un tubo de ensayo horizontal con área transversal interior A, y gira en una centrifugadora con velocidad angular ω.

a) Si la superficie del fluido está a una distancia radial r_0 donde la presión es p_0, demuestre que la presión a una distancia $r \geq r_0$, es:

$$p(r) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2)$$



b) Un objeto con volumen V y densidad ρ_0 tiene su centro de masa a una distancia R_{cm0} del eje, demuestre que la fuerza horizontal sobre el objeto es:

$$F = \rho V\omega^2 R_{cm}$$

Donde R_{cm} es la distancia del eje al centro del fluido desplazado.

c) ¿Qué sucede si en el fluido hay objetos con diferentes densidades?

Solución: a) Consideremos un elemento de volumen del fluido con área A y espesor dr' a una distancia r' del eje de rotación. La presión en su superficie interior es p, y en la exterior es $(p+dp)$. La fuerza neta hacia adentro es:

$$F_r = (p + dp)A - pA = Adp$$

La aceleración radial es $a_r = \omega^2 r'$ y aplicando la segunda ley de Newton ($F_r = ma_r$) al elemento de fluido de masa: $\rho Adr'$, obtenemos el diferencial de presión:

$$Adp = \rho A\omega^2 r'\,dr'$$

Integrando esta expresión:

$$\int_{p_0}^{p} dp = \rho\omega^2 \int_{r_0}^{r} r'dr'$$

Por lo tanto, la presión a la distancia radial $r \geq r_0$, es:

$$p(r) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2)$$

b) Si suponemos que las fuerzas gravitatorias son insignificantes, la fuerza neta sobre un objeto debe ser la misma que la fuerza sobre el fluido de la misma forma, desplazado por el objeto. Esta porción de fluido está acelerada hacia adentro con una aceleración radial, $\omega^2 R_{cm}$, y la fuerza centrípeta sobre el objeto es:

$$F = \rho V\omega^2 R_{cm}$$

c) Supongamos que en el fluido hay un objeto de densidad ρ_0 y tal que $\rho R_{cm} > \rho_0 R_{cm0}$. La fuerza centrípeta es mayor que la requerida para mantener al objeto moviéndose en un circulo de radio R_{cm0} a velocidad angular ω, por lo tanto, el objeto se desplaza hacia adentro. Por otra parte, si para el objeto se cumple: $\rho R_{cm} < \rho_0 R_{cm0}$, entonces éste se desplazará hacia afuera. Si tenemos una mezcla de objetos pequeños con densidad uniforme, $R_{cm} = R_{cm0}$, los objetos de menor densidad se moverán hacia el centro y los de mayor densidad tienden a alejarse del centro.

Respuesta:

a) $p(r) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2)$

b) $F = \rho V\omega^2 R_{cm}$

c) Los objetos de menor densidad se moverán hacia el centro de rotación y los de mayor densidad se alejarán.

PR-2.36. *Pelotas que bajan y burbujas que suben*

Cuando la velocidad relativa entre un objeto y un fluido es tan baja que el flujo es laminar, la fuerza de fricción se debe a la viscosidad. Según la ley de Reynolds, para un objeto esférico de radio r en un fluido de viscosidad η, la fuerza resulta proporcional a la velocidad: $F_v = 6\pi\eta rv$

a) Suponga una esferita de acero de radio $r = 2{,}5$ mm que se deja caer en un recipiente muy grande que contiene glicerina, ¿cuál será la velocidad terminal de la esferita?

b) Suponga una burbuja de aire de radio $r = 2{,}5$ mm que se desprende desde el fondo del mismo recipiente que contiene glicerina. ¿Suponiendo que el radio de la burbuja de aire no cambia, que velocidad terminal alcanza?

Acero:
Densidad $\rho = 7800$ kg/m^3

Glicerina:
Densidad $\rho' = 1260$ kg/m^3
Viscosidad: $\eta = 0{,}83$ N.s/m^2

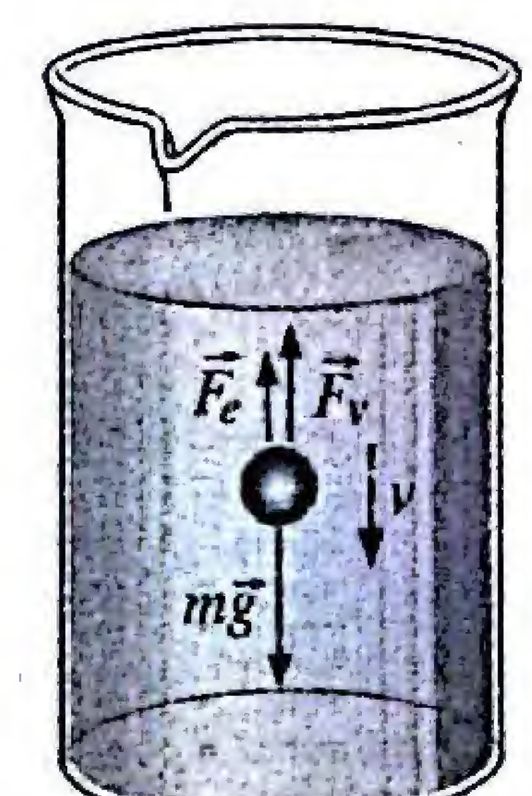
Aire:
Densidad $\rho = 1{,}2$ kg/m^3

Solución: Sobre la esferita de radio r que cae a través del fluido se ejercen tres fuerzas:

Fuerza de gravedad: $mg = \rho Vg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$

Fuerza de empuje: $F_e = \rho' Vg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho' g$

Fuerza viscosa (Ley de Reynolds): $F_v = 6\pi\eta rv$



Aplicando la segunda ley de Newton, la fuerza neta es igual a la masa por la aceleración:

$$\sum F_y = F_e + F_v - mg = ma$$

A medida que la esferita cae y aumenta su velocidad, también aumenta la fuerza viscosa, hasta que su magnitud es igual al peso efectivo. En este punto, la aceleración es cero ($a = 0$) y se alcanza la velocidad máxima o velocidad terminal:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g + 6\pi\eta r v_t - \frac{4}{3}\pi r^3\rho g = 0$$

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho')$$

a) Para la esferita de acero en glicerina:

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{(2{,}5\text{x}10^{-3})^2(9{,}8\text{m/s}^2)}{(0{,}830\text{N.s/m}^2)}(7800\text{kg/m}^3 - 1260\text{kg/m}^3)$$

$$v_t = 0{,}107\text{m/s}$$

b) Para burbuja de aire en glicerina:

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{(2{,}5\text{x}10^{-3})^2(9{,}8\text{m/s}^2)}{(0{,}830\text{N.s/m}^2)}(1{,}2\text{kg/m}^3 - 1260\text{kg/m}^3)$$

$$v_t = -0{,}021\text{m/s}$$

El signo (-) indica la velocidad es hacia arriba, es decir con sentido contrario al supuesto en el análisis anterior.

Respuesta:

$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho')$
a) $v_t = 0{,}107$m/s
b) $v_t = -0{,}021$m/s

PR-2.37. *Velocidad terminal de las gotas de lluvia*

Desde una nube en reposo se desprenden gotas de lluvia. Considere las gotas como esferitas de radio $r = 0{,}5$ mm. Determine:

a) La velocidad de una gota en función del tiempo.

b) El valor de la velocidad límite.

c) La distancia recorrida en función del tiempo.

Solución: La fuerza neta sobre una gota es la resultante de su peso, Mg, la fuerza de empuje F_e, y la fuerza de resistencia del aire, F_v:

$$\sum F_y = Mg - F_e - F_v = ma$$

$$(\frac{4}{3}\pi r^3\rho)g - (\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0)g - 6\pi\eta r v = (\frac{4}{3}\pi r^3\rho)a$$

Agua:
Densidad $\rho = 1000$ kg/m^3

Aire:
Densidad $\rho_0 = 1{,}29$ kg/m^3
Viscosidad $\eta = 1{,}75\text{x}10^{-5}$ N. s/m^2

La aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) - \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho}v = A - Bv$$

Siendo las constantes:

$$A = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) = (9{,}8\text{m/s}^2)(1 - \frac{1{,}29\text{kg/m}^3}{1000\text{kg/m}^3}) = 9{,}79\text{m/s}^2$$

$$B = \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho} = \frac{9}{2}\frac{1{,}75\text{x}10^{-5}\text{N.s/m}^2}{(5\text{x}10^{-4}\text{m})^2(1{,}29\text{kg/m}^3)} = 244\,\text{s}^{-1}$$

Separando variables en la expresión anterior e integrando:

$$\int\frac{dv}{Bv - A} = -\int dt \quad \Rightarrow \quad ln(Bv - A) = -Bt + ln\,C$$

$$v(t) = \frac{1}{B}(A + Ce^{-Bt})$$

La constante C de integración está determinada por la condición inicial $v(0) = 0$ y es $C = -A$:

$$v(t) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

b) La velocidad terminal se alcanza en el límite $t \to \infty$:

$$v_t = \frac{A}{B} = \frac{9{,}67\text{m/s}^2}{0{,}315\text{s/m}} = 30{,}7\text{m/s}$$

c) La distancia recorrida en función del tiempo se obtiene integrando la expresión de la velocidad:

$$x = \int v dt = \frac{A}{B}\int(1 - e^{-Bt})dt$$

$$x = \frac{A}{B}t - \frac{A}{B^2}e^{-Bt} + D$$

La constante D de integración está determinada por la condición inicial $x(0) = 0$ y es $D = A/B^2$:

$$x(t) = \frac{A}{B}(t - \frac{e^{-Bt} - 1}{B})$$

Respuesta:

a) $v(t) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$
b) $v_t = 30{,}7$m/s
c) $x(t) = \frac{A}{B}(t - \frac{e^{-Bt} - 1}{B})$
Las constantes A y B son:
$A = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad B = \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho}$

PR-2.38. *Velocidades en un fluido viscoso*

Sea un fluido viscoso sometido a un flujo laminar estacionario a través de un tubo cilíndrico horizontal de radio interior R. Demuestre que la velocidad del fluido a distancia radial r desde el eje es:

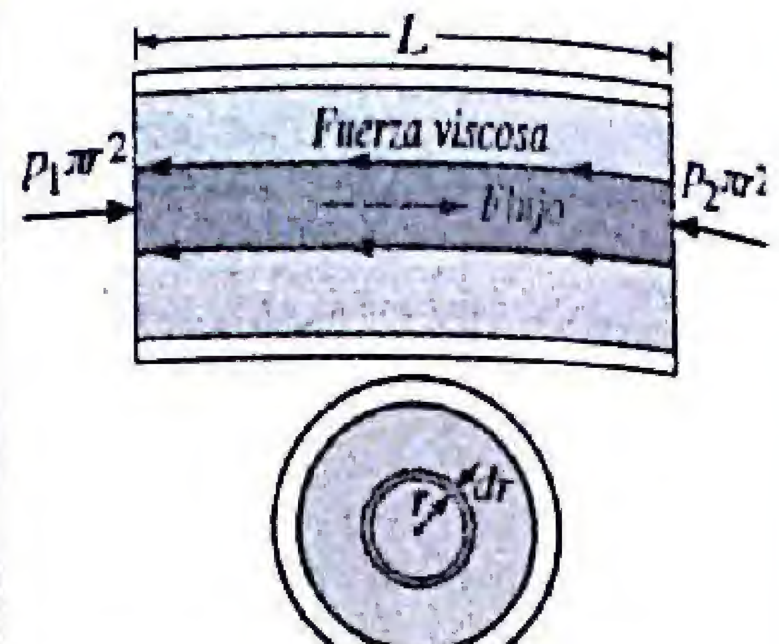
$$v(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

Siendo v_0 la velocidad en el centro del tubo.

Solución: Sea un cilindro de fluido de radio $r < R$, con eje a lo largo del centro del tubo. La fuerza sobre este cilindro debida a la diferencia de presión en los extremos es:

$$F_p = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

Donde πr^2 es el área de los extremos del cilindro. A esta fuerza se opone la fuerza viscosa ejercida por la capa exterior adyacente al cilindro. La fuerza de viscosidad es proporcional al área de los lados del cilindro, $A = (2\pi r)L$ y también al gradiente de velocidad, dv/dr. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad, η.

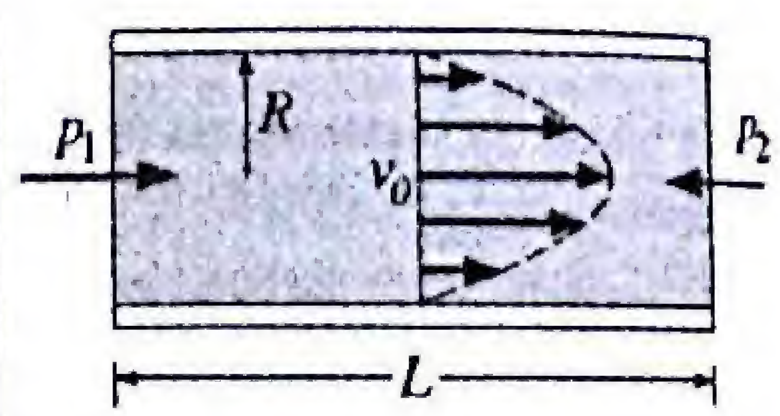


Cilindro arbitrario de fluido de radio r.

$$F_v = \eta(2\pi rL)\frac{dv}{dr}$$

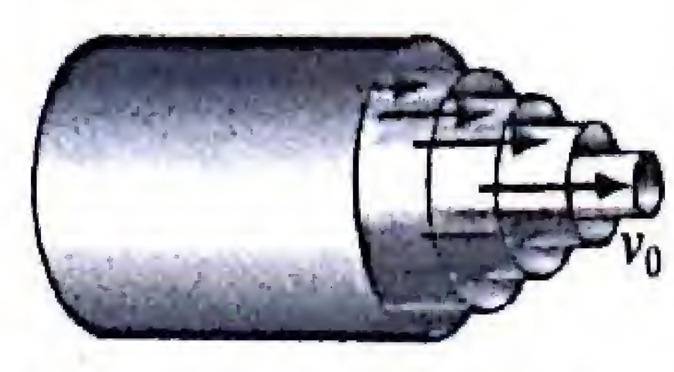
Como el flujo es estacionario, no hay aceleración del fluido y las magnitudes de estas dos fuerzas opuestas deben ser iguales:

$$F_p = F_v \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)\pi r^2 = \eta(2\pi rL)\frac{dv}{dr}$$



Despejando, obtenemos el gradiente de velocidad:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta L}$$



Perfil de velocidades para un flujo laminar en un tubo de sección transversal circular

Como el fluido tiende a adherirse en las paredes del tubo $(r = R)$ la velocidad allí es cero ($v = 0$), integrando se obtiene:

$$\int_v^0 dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_r^R r\,dr$$

$$v = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}\frac{r^2}{2}\Big|_r^R = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Encontramos así que la velocidad disminuye desde un máximo en el centro del tubo hasta cero en la pared:

$$v(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

Donde la velocidad máxima está dada por:

$$v_0 = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}$$

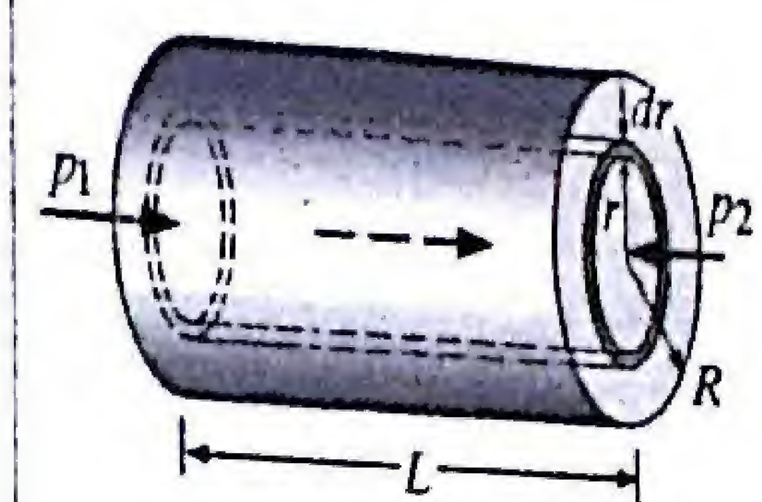
Respuesta:

$$\boxed{v(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) \qquad v_0 = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}}$$

PR-2.39. *La ecuación de Poiseuille*

Considere un fluido de viscosidad η, sometido a un flujo laminar estacionario a través de un tubo cilíndrico. Demuestre que el volumen de fluido viscoso que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo es:

$$\text{Gasto:} \quad Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L} \quad (\text{m}^3/\text{s})$$



Donde R es el radio interior del tubo, L su longitud y $(p_1 - p_2)$ la diferencia de presión entre los extremos.

Solución: Dividimos la sección transversal del tubo en pequeños anillos de grosor dr. El área de un anillo infinitesimal es el producto de la longitud de la circunferencia por el grosor: $dA = (2\pi r)dr$. Usando el resultado del problema anterior para la velocidad del fluido a la distancia radial r, el gasto del fluido a través del anillo infinitesimal es:

$$dQ = v\,dA = [\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)]2\pi r\,dr$$

El gasto de flujo total a través del tubo se obtiene tomando el flujo por todos los anillos:

$$Q = \int_0^R dQ = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 r - r^3)]dr$$

Integrando, se obtiene:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L}$$

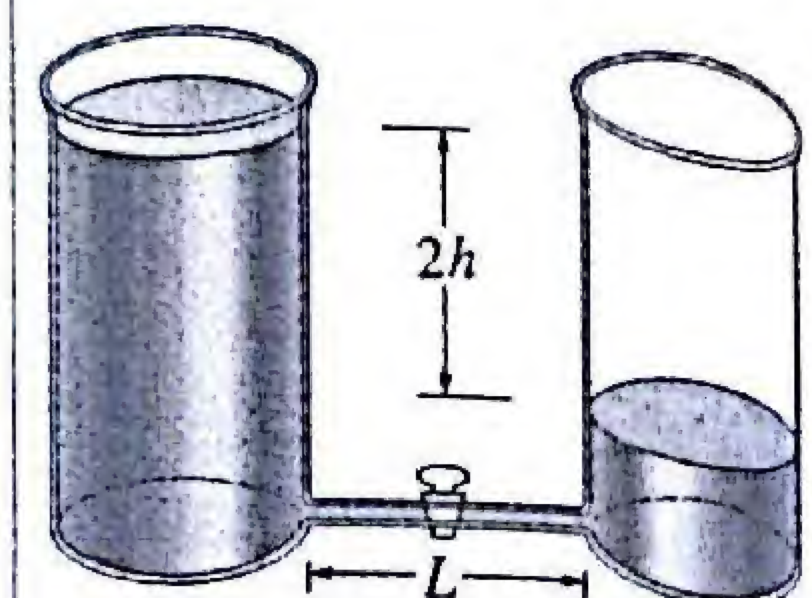
La ecuación de Poiseuille se aplica sólo al flujo laminar (no turbulento) de viscosidad constante que es independiente de la velocidad del fluido.

Respuesta:

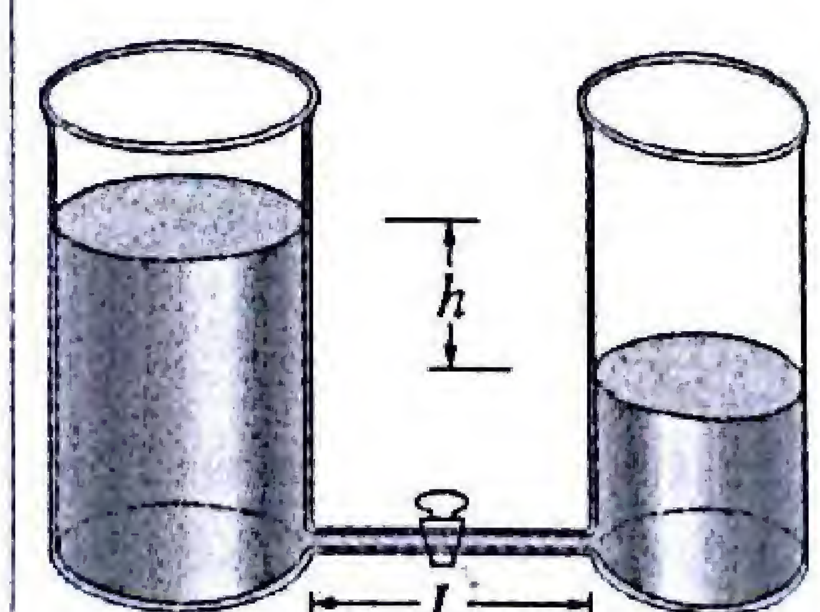
$$\boxed{Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L}}$$

PR-2.40. *Transvase de un líquido viscoso*

Dos recipientes cilíndricos con un área de sección transversal A están unidos en el fondo por un tubo circular estrecho de radio R y de longitud L. Los dos recipientes contienen un líquido de densidad ρ y viscosidad η e inicialmente tienen una cierta diferencia de alturas. Si se abre la llave de paso, ¿al cabo de cuánto tiempo la diferencia de alturas se reducirá a la mitad?



Solución: Supongamos que en un instante de tiempo dado la diferencia de alturas del líquido en los dos recipientes es x. Si en un intervalo de tiempo dt, la diferencia se reduce en dx, entonces en el recipiente de la izquierda el nivel ha bajado en $dx/2$, y en el de la derecha habrá subido en $dx/2$. El volumen de líquido que pasa por el tubo horizontal en ese tiempo dt es: $dV = A(dx/2)$. El gasto es:



$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L} \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

$$-\frac{A(dx/2)}{dt} = \frac{\pi\rho g x R^4}{8\eta L}$$

Donde hemos sustituido la diferencia de presión entre los extremos del tubo: $p_1 - p_2 = \rho g x$. Por lo tanto:

$$dt = -\frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g}\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dt = -\frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g}\int_{2h}^{h}\frac{dx}{x}$$

El tiempo para que la diferencia de alturas se reduzca a la mitad es:

$$t = -\frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g} \ln x\Big|_{2h}^{h} = -\frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g}\ln\left(\frac{h}{2h}\right) = \frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g}\ln 2$$

Respuesta:

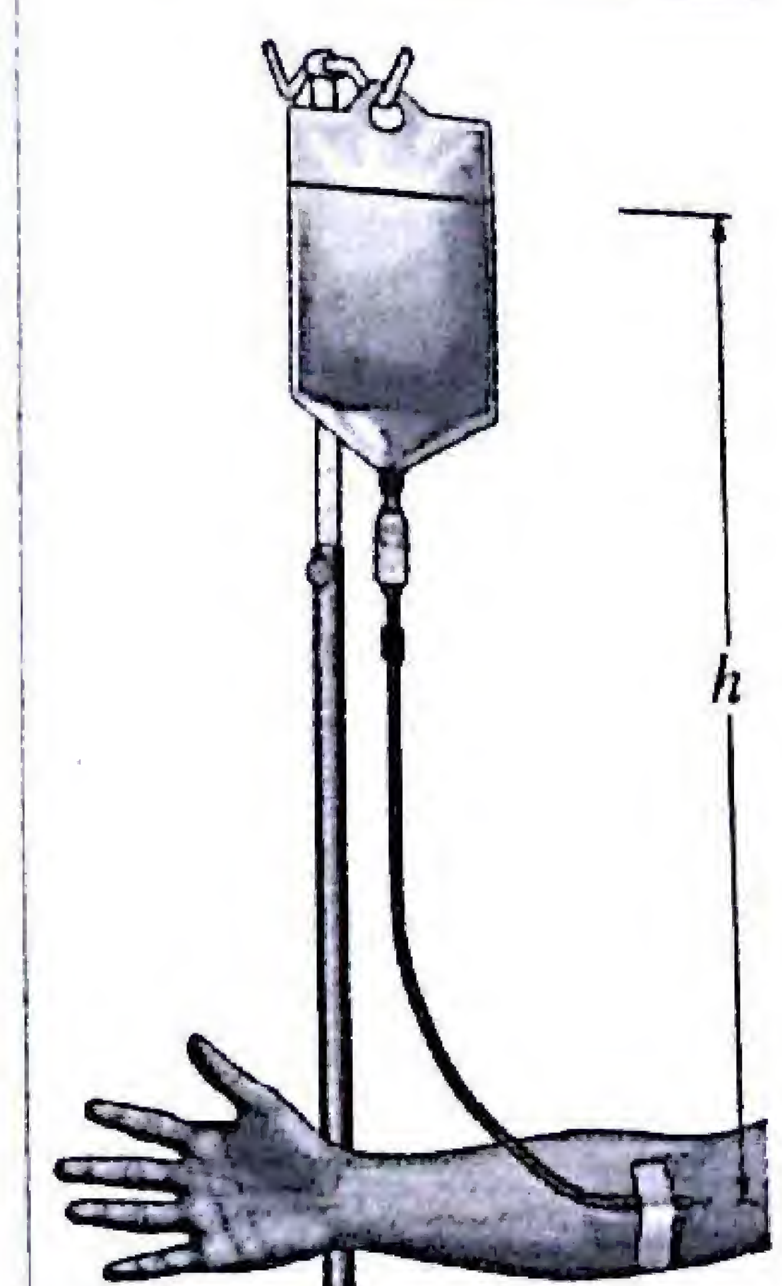
$$\boxed{t = \frac{4\eta A L}{\pi R^4 \rho g}\ln 2}$$

PR-2.41. *Viscosidad en una transfusión sanguínea*

Un paciente recibe una transfusión de sangre, la cual fluye a través de una manguera desde una bolsa suspendida hasta una aguja insertada en la vena. La aguja tiene un radio interior $R = 0{,}25$ mm y una longitud $L = 4$ cm. La presión de la sangre en la vena es de 20 mm de Hg por encima de la presión atmosférica. ¿A qué altura debe colocarse la bolsa por encima de la aguja para inyectar la sangre con un gasto de 4 cm^3 por minuto?
Se desprecia la resistencia que ofrece la manguera por tener un radio mucho mayor que el de la aguja.

Sangre
Densidad: $\rho = 1050\,\mathrm{kg/m^3}$
Viscosidad: $\eta = 4\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$

Solución: Supongamos que solo la aguja ofrece una resistencia viscosa al flujo sanguíneo aplicamos la ecuación de Poiseuille. El volumen de fluido que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo es directamente proporcional al gradiente de presión, $(P_1 - P_2)/L$ y a la cuarta potencia del radio R del tubo:

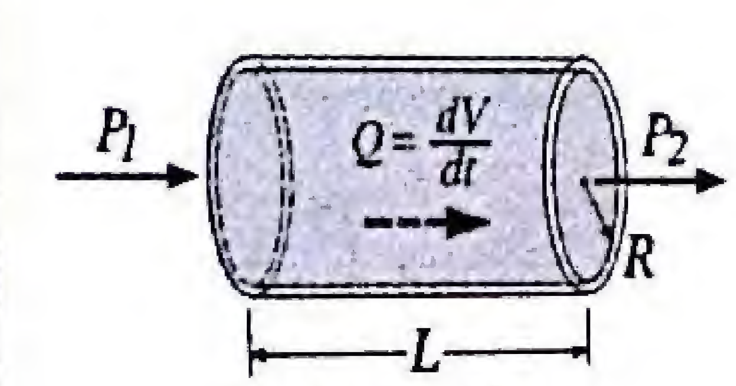


Gasto: $$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{L} \quad (\mathrm{m^3/s})$$

Siendo η la viscosidad de la sangre. La presión a la entrada de la aguja es: $P_1 = mgh$ y la presión en la salida de la aguja es 20 mm de Hg, que equivale a:

$$P_2 = (20\mathrm{mmHg})\left(\frac{133\mathrm{N/m^2}}{1\mathrm{mmHg}}\right) = 2660\mathrm{N/m^2}$$

$$P_1 - P_2 = mgh - 2660\mathrm{N/m^2} = \frac{8Q\eta L}{\pi R^4}$$



Aguja cilíndrica

Despejando, se obtiene la altura h de la columna del fluido:

$$h = \frac{\dfrac{8Q\eta L}{\pi R^4} + 2660\mathrm{N/m^2}}{\rho g}$$

$$h = \frac{\dfrac{8(4\times10^{-6}\mathrm{m^3/60s})(4\times10^{-3}\mathrm{Pa\cdot s})(4\times10^{-2}\mathrm{m})}{\pi(0{,}25\times10^{-3}\mathrm{m})^4} + 2660\mathrm{Pa}}{(1050\mathrm{kg/m^3})(9.8\mathrm{m/s^2})}$$

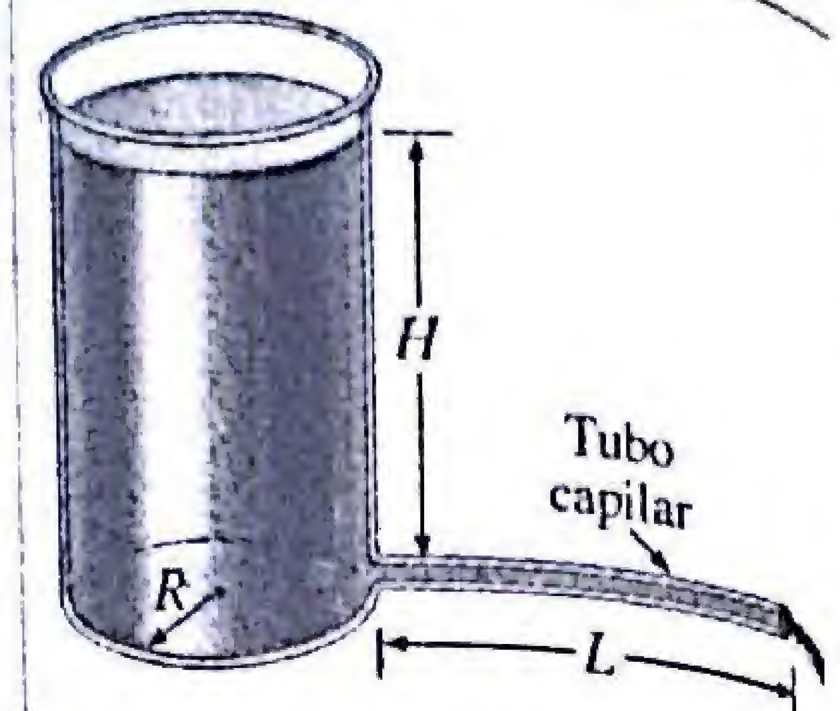
$$h = 0{,}93\mathrm{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{h = 0{,}93\mathrm{m}}$$

PR-2.42. *El desagüe por un tubo capilar es muy lento*

El agua de un recipiente cilíndrico de radio $R = 2{,}5$ cm se vacía a través de un tubo capilar horizontal de longitud $L = 20$ cm y de radio interno $r = 0{,}25$ mm. Calcular el tiempo necesario para que la altura del agua descienda desde su valor inicial hasta la mitad, si la viscosidad del agua es de $\eta = 1{,}0$ mPa.s.



Solución: La tasa de cambio del volumen de fluido en el recipiente, $-A(dy/dt)$, será igual que en el tubo capilar. Aplicando la ecuación de Poiseuille, escribimos:

$$Q = \frac{dV}{dt} = -A\frac{dy}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{(P_2 - P_3)}{L}$$

La diferencia de presión en el capilar es:

$$P_2 - P_3 = (P_{atm} + \rho g y) - P_{atm} = \rho g y$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

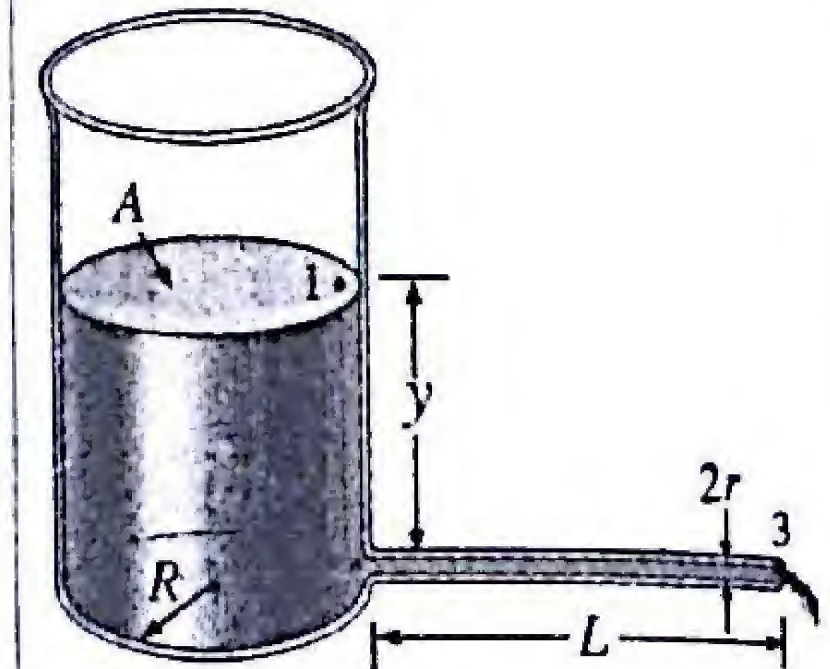
$$-A\frac{dy}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{\rho g y}{L}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\rho g \pi r^4}{8A\eta L}dt = -\frac{\rho g \pi r^4}{8\pi R^2 \eta L}dt = -Cdt$$

Siendo la constante:

$$C = \frac{\rho g r^4}{8R^2\eta L}$$



Integrando, encontramos el tiempo $T_{1/2}$ empleado para que la altura H del nivel del agua se reduzca a la mitad.

$$\int_H^{H/2}\frac{dy}{y} = -\int_0^{T_{1/2}} Cdt \quad \Rightarrow \quad \ln y\Big|_H^{H/2} = -CT_{1/2}$$

$$T_{1/2} = -\frac{1}{C}\ln\left(\frac{H/2}{H}\right) = +\frac{\ln 2}{C}$$

$$C = \frac{(1000\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}25\text{x}10^{-3}\text{m})^4}{8(2{,}5\text{x}10^{-2}\text{m})^2(1\text{x}10^{-3}\text{Pa.s})(0{,}2\text{m})} = 3{,}83x10^{-5}\text{s}^{-1}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{3{,}83x10^{-5}\text{s}^{-1}} = 18098s = 5{,}03 \text{ horas}$$

Respuesta:

$$\boxed{T_{1/2} = 5{,}03 \text{ horas}}$$

PE-2.01. *De acuerdo a la ecuación de Bernoulli..*

Cuando un fluido no viscoso e incompresible, fluye por un tubo horizontal largo de sección transversal constante...

a) La velocidad disminuye y la presión es constante.
b) La velocidad disminuye, pero la presión aumenta.
c) La presión disminuye, y la velocidad es constante.
d) La presión disminuye, pero la velocidad aumenta.
e) La velocidad y la presión se mantienen constante.

PE-2.02. *Disminución del flujo de agua en la tubería*

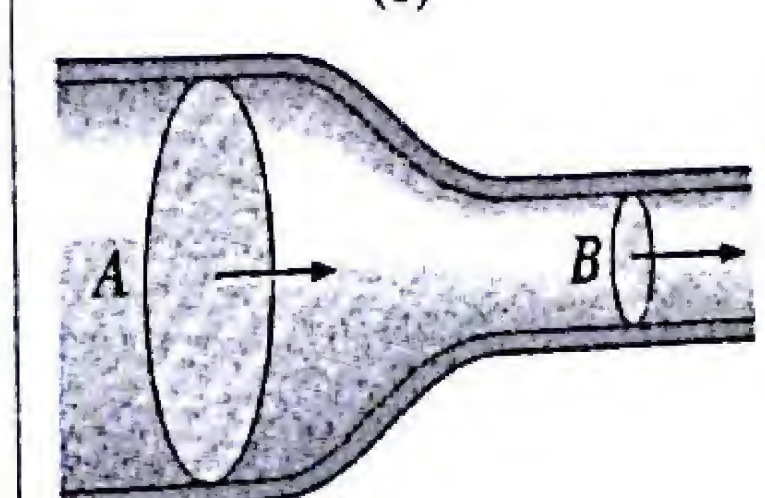
Por una tubería se bombea agua a razón de 20 litros por minuto y se observa que en el otro extremo sale agua a razón de 12 litros por minuto. Esta disminución del flujo de agua puede ser debida a que.....

a) El diámetro del tubo es mayor al comienzo que al final.
b) El diámetro del tubo es mayor al final que al comienzo.
c) Existe fricción en la tubería.
d) Hay una fuga de agua en la tubería.
e) El agua está siendo bombeada cuesta arriba.

PE-2.03. *Comparación de presiones en tubo reductor*

Un tubo tiene una sección transversal que disminuye su área. Cuando fluye agua por el tubo, la presión....

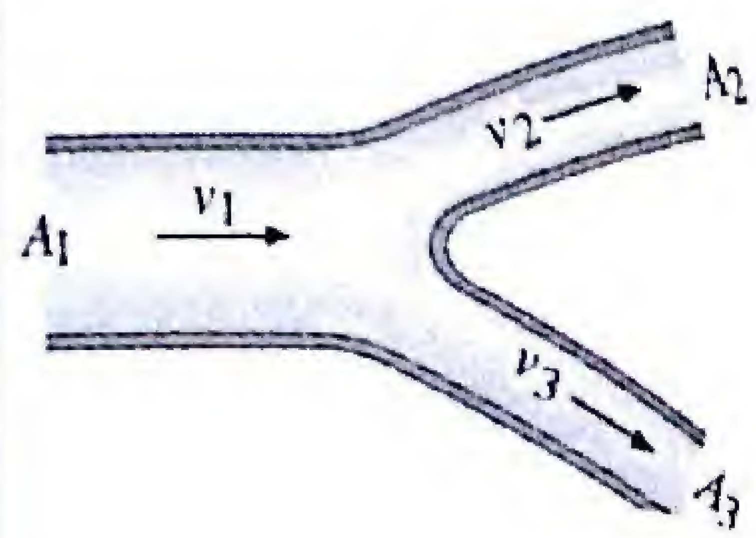
(b)



a) La presión es mayor en B que en A.
b) La presión es mayor en A que en B.
c) La presión en A es igual a la presión en B.
d) Las presiones en A y en B no están relacionadas.

PE-2.04. *Bifurcación en una tubería de agua*

Por una tubo de área transversal A_1 fluye agua con una rapidez v_1. El tubo se divide en dos tubos mas delgados de áreas: $A_2 = A_3 = A_1 / 2$. ¿Cuál es la relación entre las velocidades del agua en las tres ramas?



a) $v_2 = v_3 = v_1 / 2$ b) $v_2 = v_3 = v_1 / 4$

c) $v_2 = v_3 = v_1$ d) $v_2 = v_3 = 2v_1$

e) $v_2 = v_3 = 4v_1$

PE-2.05. *Caudal en una tubería de sección variable*

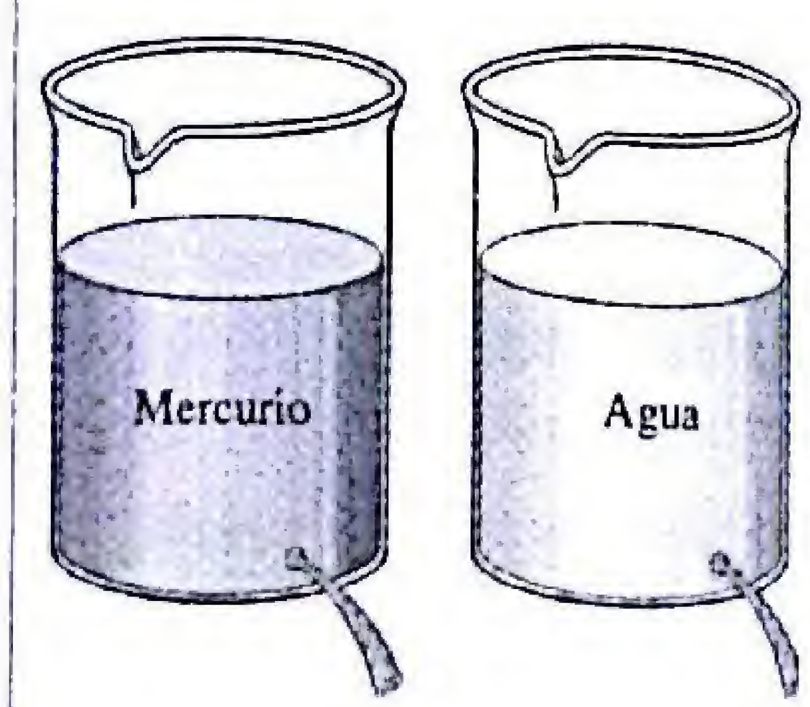
Por un tubo circular de sección transversal variable fluye agua a razón de 3,14 m^3/s. En una sección del tubo el radio es r = 20 cm. ¿Qué rapidez tiene el agua en esa sección?

a) v = 25 m/s, b) v = 5 m/s, c) v = 1,57 m/s

d) v = 0,61 m/s, e) v = 0,50 m/s

PE-2.06. *¿Cuál recipiente se vacía primero?*

Sean dos recipientes idénticos, uno contiene agua y el otro contiene mercurio hasta la misma altura. Si se perforan agujeros del mismo tamaño en el fondo de cada recipiente, suponiendo que ambos líquidos fuesen ideales, ¿cuál de los dos recipientes se vacía primero?



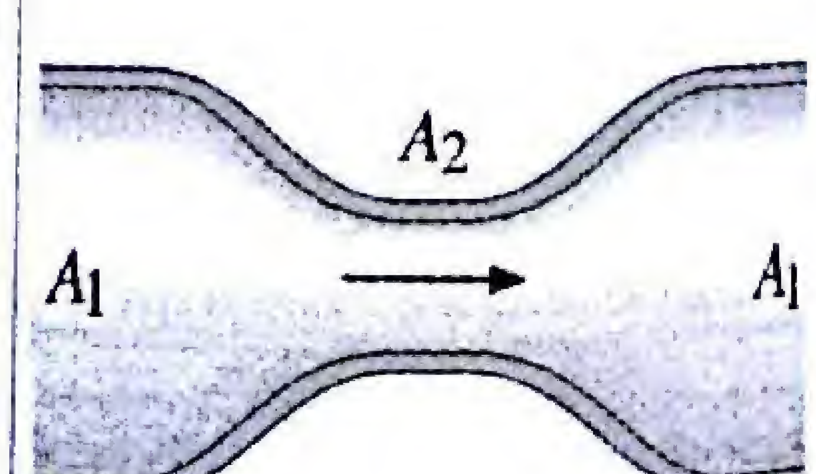
a) el que contiene agua.

b) el que contiene mercurio?

c) los dos se vacían en el mismo tiempo

PE-2.07. *Velocidad y presión en una constricción*

Un tubo horizontal tiene un segmento donde su área transversal se reduce. Cuando el agua pasa por esta constricción, podemos decir que...



a) su velocidad aumenta y su presión aumenta.

b) su velocidad aumenta y su presión disminuye.

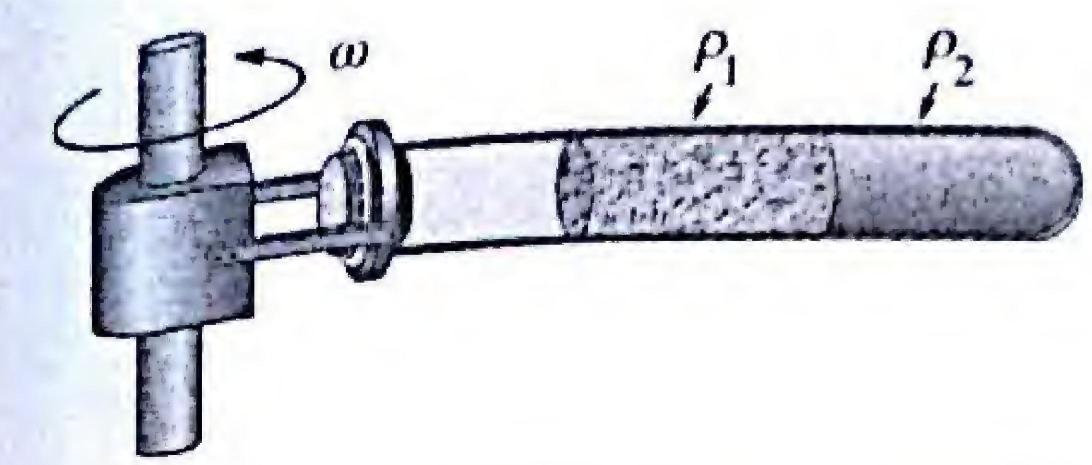
c) su velocidad disminuye y su presión disminuye.

d) su velocidad disminuye y su presión aumenta.

e) ni su velocidad ni su presión cambian de valor.

PE-2.08. *Centrifugación de aceite y agua*

Una mezcla de agua y finísimas gotas de aceite se pone a girar a alta velocidad angular en un tubo de probeta provisto de un tapón.



Tomando en cuenta que el aceite es menos denso que el agua, podemos decir que.....

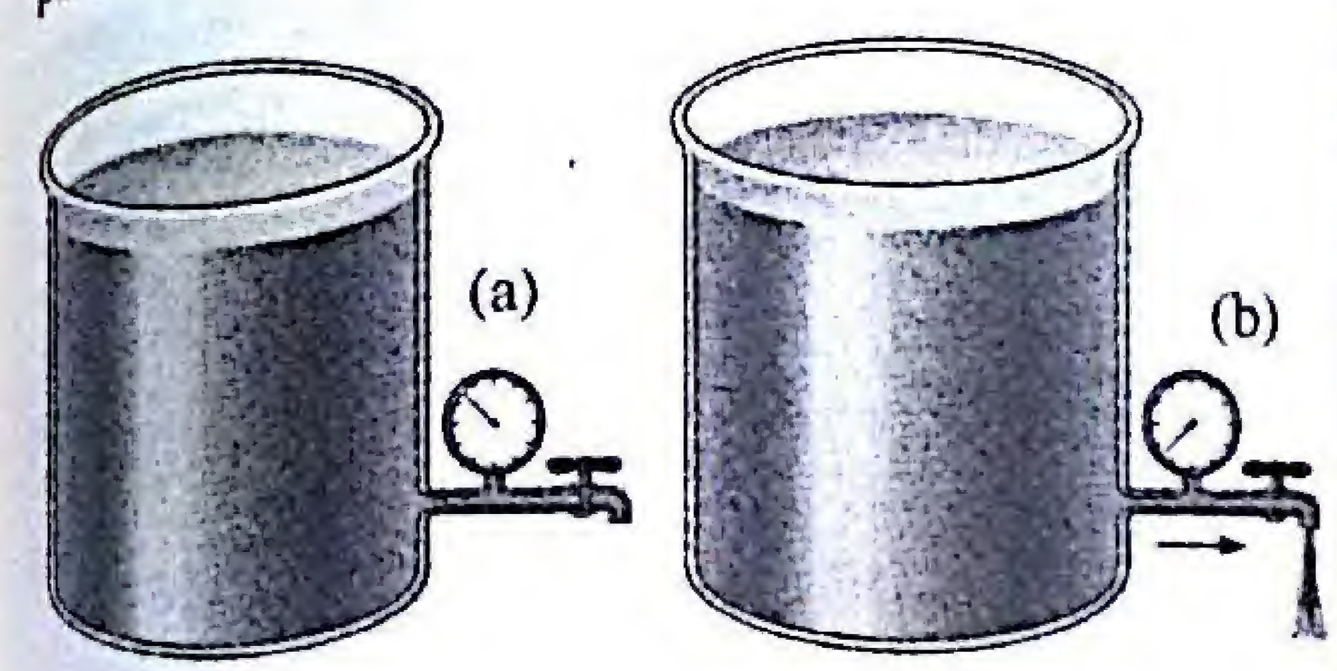
a) El aceite quedará alejado del centro de centrifugación y en el fondo del tubo.

b) El aceite quedará del lado del centro de centrifugación.

c) Los dos líquidos no quedarán separados.

PE-2.09. *Caída de presión del agua al abrir la llave*

Un gran tanque de agua tiene en el fondo un tubo de desagüe provisto de un medidor de presión y una llave de paso.



Cuando la llave está cerrada la lectura del medidor es 248 kPa y cuando la llave está abierta, la presión cae a 120 kP. La velocidad del agua en el tubo es.....

a) v = 2 m/s

b) v = 4 m/s

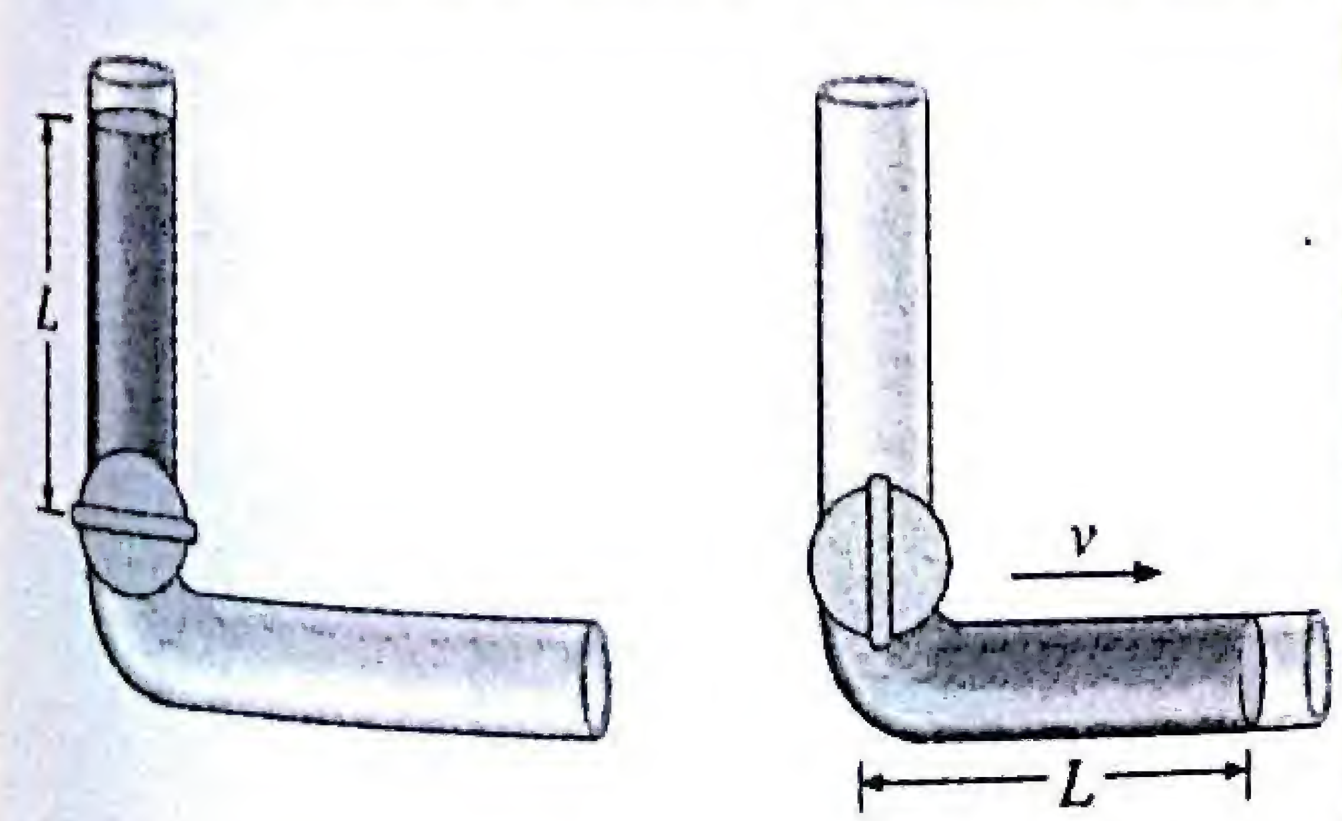
c) v = 8 m/s

d) v = 12 m/s

e) v = 16 m/s

PE-2.10. *Velocidad de columna de agua*

Una columna de agua de altura L=10,2 cm está en reposo en la parte vertical de un tubo en L de sección constante.



Después que la válvula se abre, toda el agua circulará por la sección horizontal con una velocidad ....

a) v = 0,1 m/s

b) v = 0,5 m/s

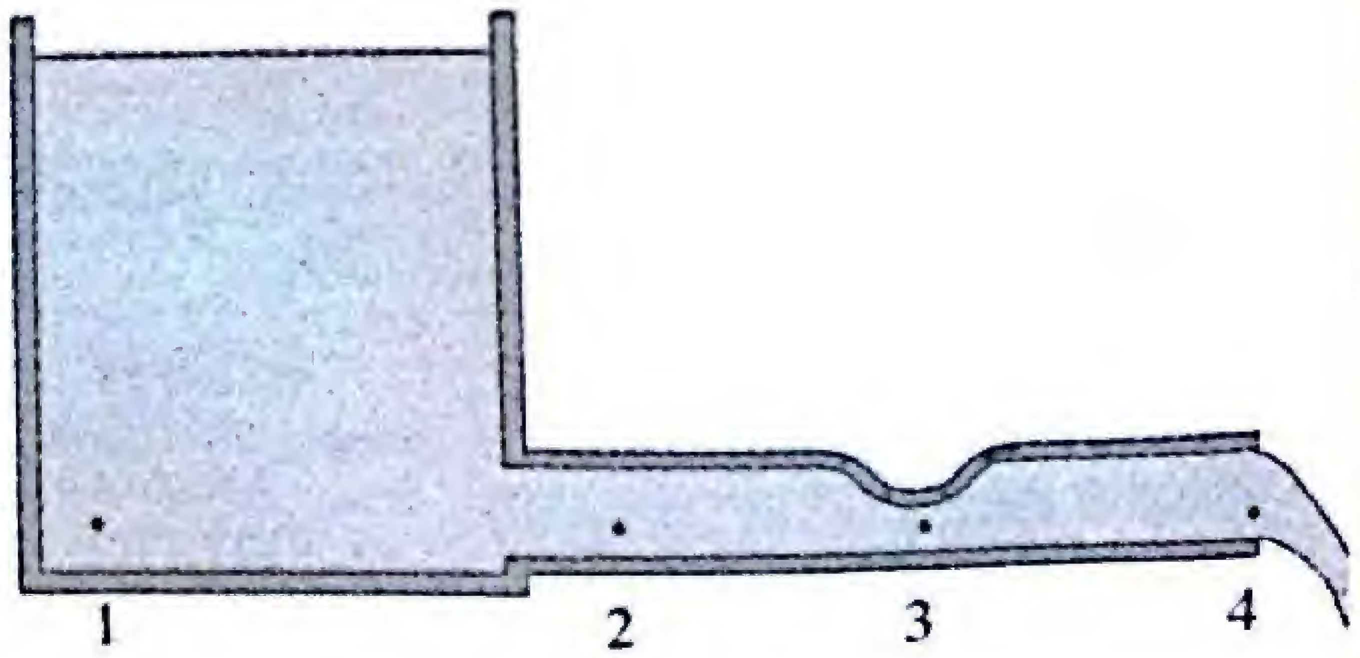
c) v = 1 m/s

d) v = 2 m/s

e) v = 5 m/s

PE-2.11. *Comparación de presiones a igual altura*

Un estanque grande se encuentra lleno de agua hasta cierta altura. En el fondo hay un tubo delgado de desagüe, el cual tiene un estrangulamiento.



Si comparamos las presiones en los cuatro puntos en el fluido indicados ubicados a igual altura, podemos asegurar que:

a) $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

b) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$

c) $P_1 = P_2 = P_4 > P_3$

d) $P_1 > P_2 = P_4 > P_3$

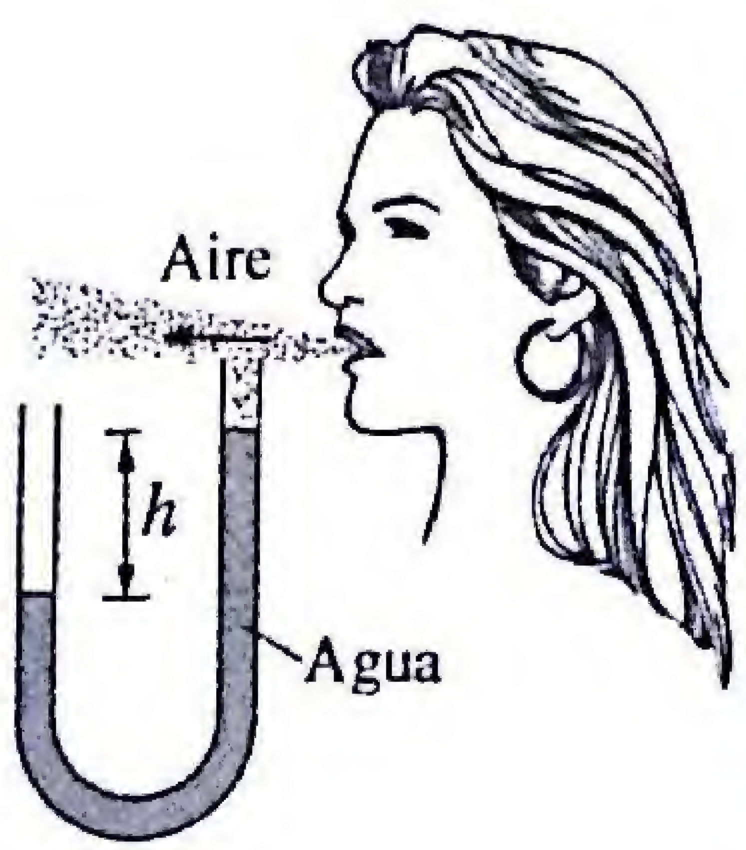
e) $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$

PE-2.12. *Soplando aire sobre tubo en U*

Un tubo de vidrio en U está abierto por ambos lados y contiene agua (1000 kg/m^3). Si se sopla aire ($\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3) por uno de los lados (y no por el otro) a una velocidad v = 10 m/s, ¿qué diferencia en alturas alcanzarán las dos columnas de agua?

a) h = 1,33 cm, b) h = 1,0 cm, c) h = 0,66 cm

d) h = 0,50 cm, e) h = 0,33 cm



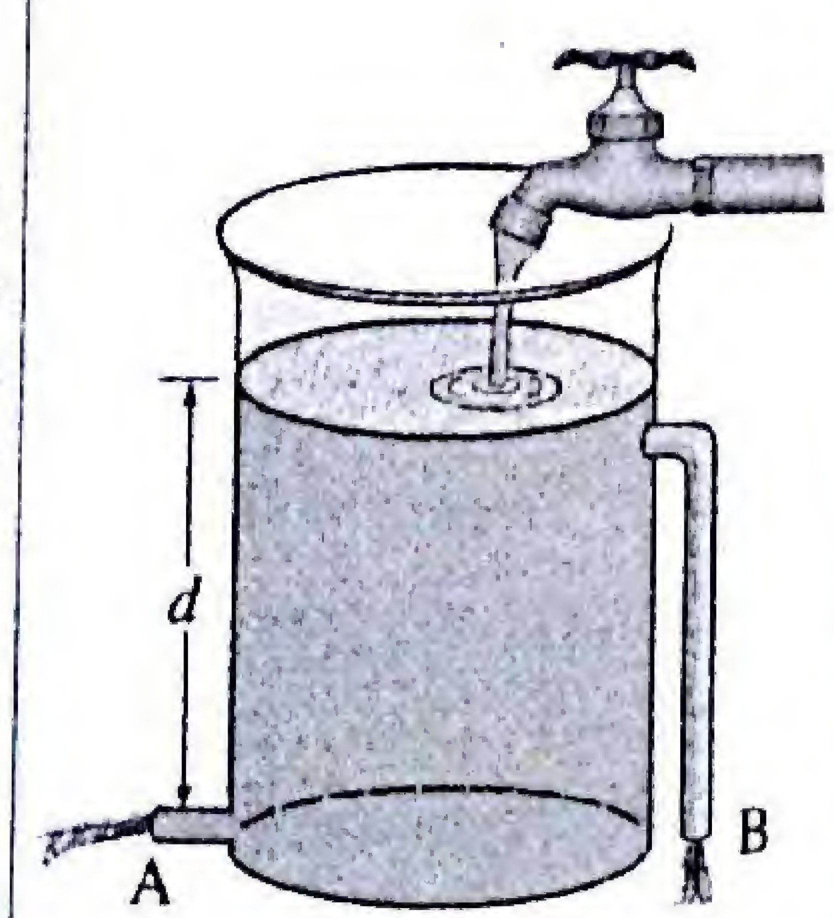
PE-2.13. *¿Cuál chorro saldrá con mayor velocidad?*

Un estanque lleno de agua tiene dos agujeros de salida. El agujero A está en el fondo a una profundidad d por debajo de la superficie del liquido. El agujero B queda al final de un tubo vertical delgado que sale de la parte superior y de igual longitud d por debajo de la superficie del agua. ¿Cuál chorro sale con mayor velocidad?

a) La salida A,

b) La salida B

c) Igual velocidad en A y B.



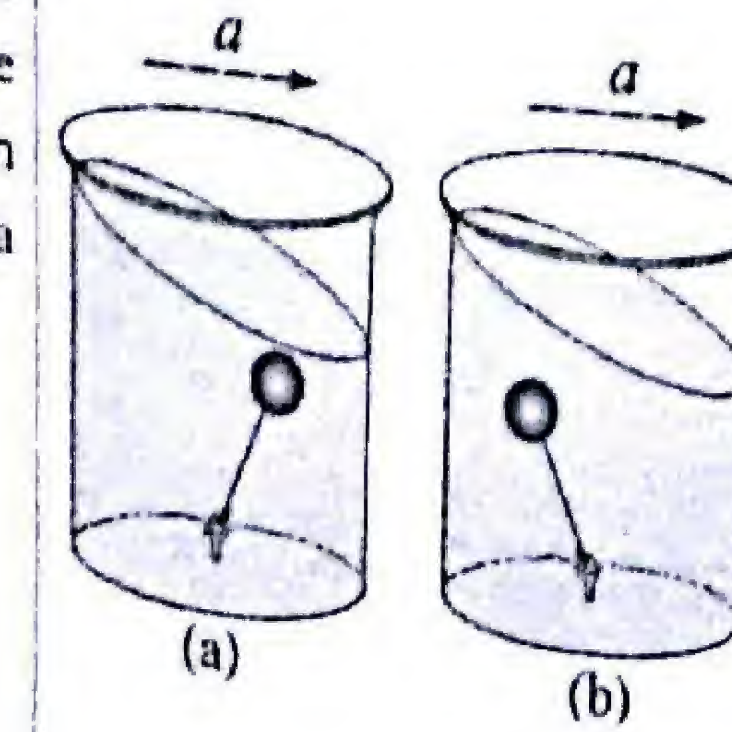
PE-2.14. *¿Hacia dónde se inclina la pelota?*

Una pelota de ping-pong está fija al fondo de un frasco por medio de un hilo. El frasco se llena de agua hasta que la pelota queda flotando con el hilo tenso en posición vertical. Cuando al frasco se le da una aceleración hacia adelante, en cuál dirección se desviará la pelota?

a) Hacia delante,

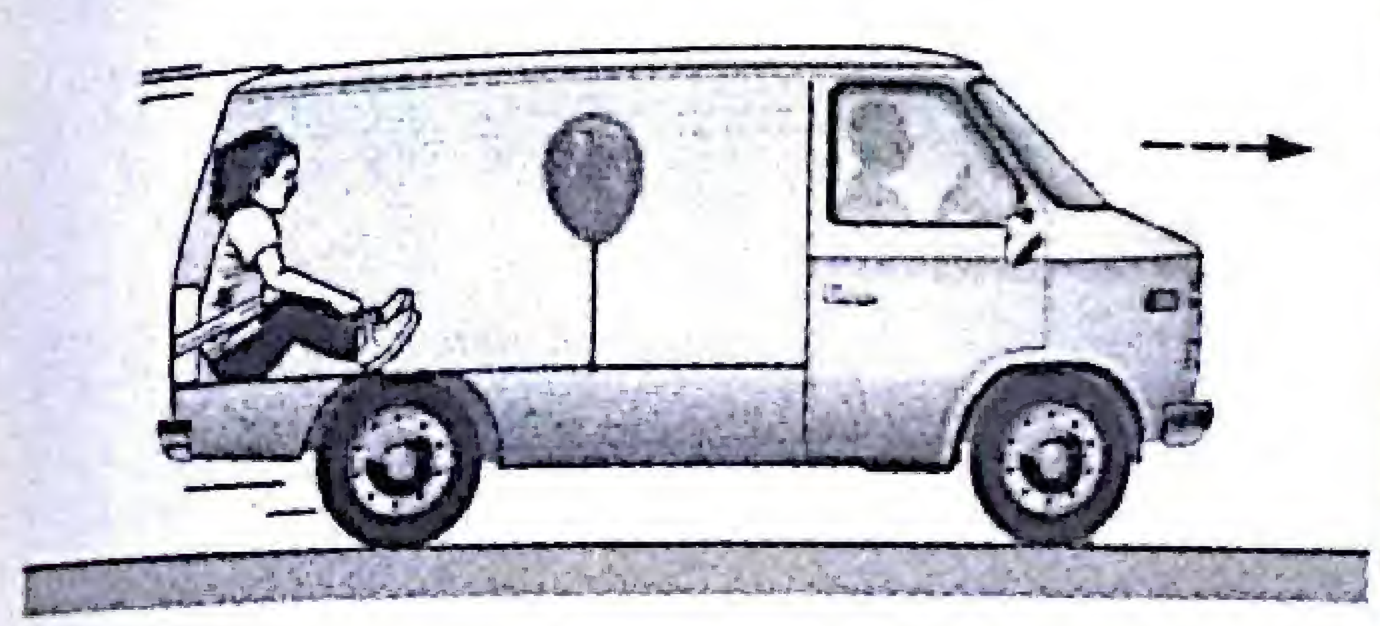
b) Hacia atrás

c) no se desvía de la vertical



PE-2.15. *Globo con helio dentro de un carro que frena*

Un carro se desplaza a velocidad constante y una niña suspende un globo lleno de helio mediante una cuerda atado al piso…



¿Si el carro *frena* de repente, hacia donde tiende a moverse el globo con respecto al carro?

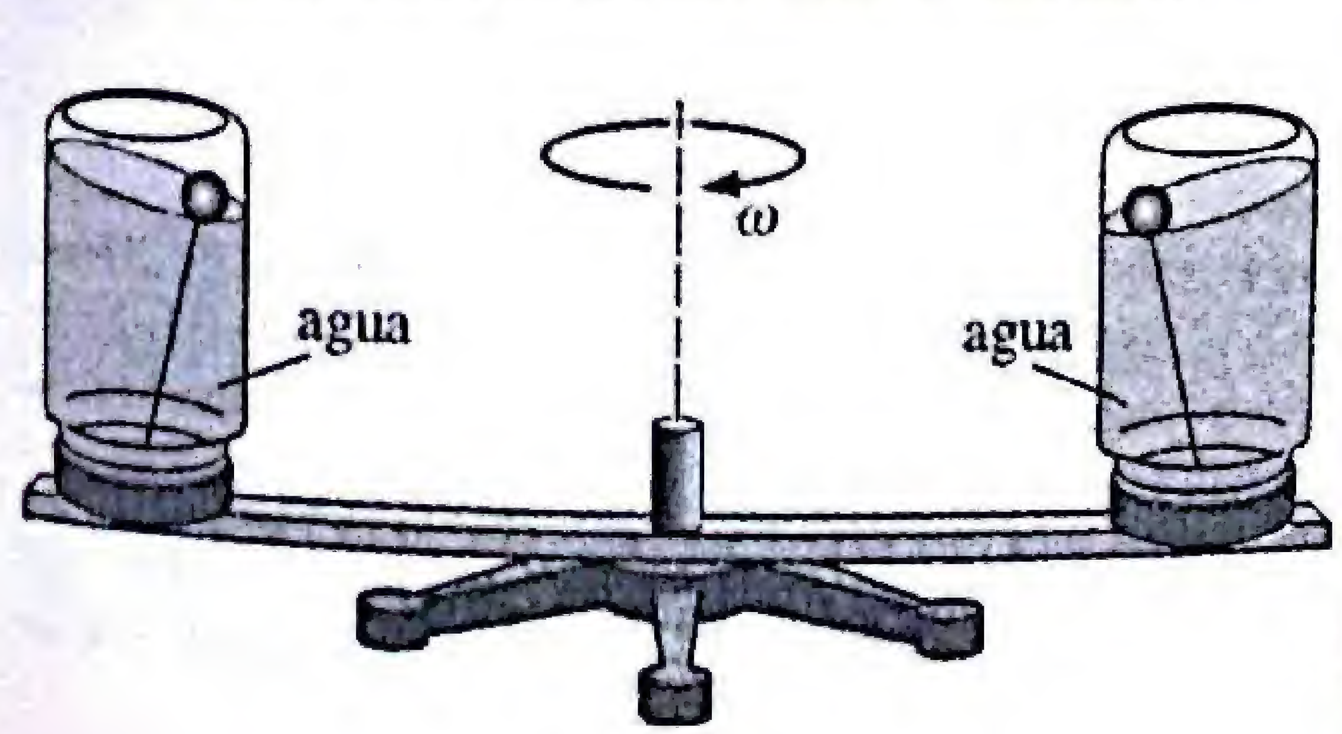
a) Hacia la parte delantera.

b) Hacia la parte trasera.

c) La cuerda del balón mantiene su posición vertical.

PE-2.16. *Pelotas que flotan en frascos en rotación*

En una demostración de física se colocan dos pelotas de tenis atadas mediante hilos al fondo de frascos llenos de agua, los cuales están en los extremos de una barra



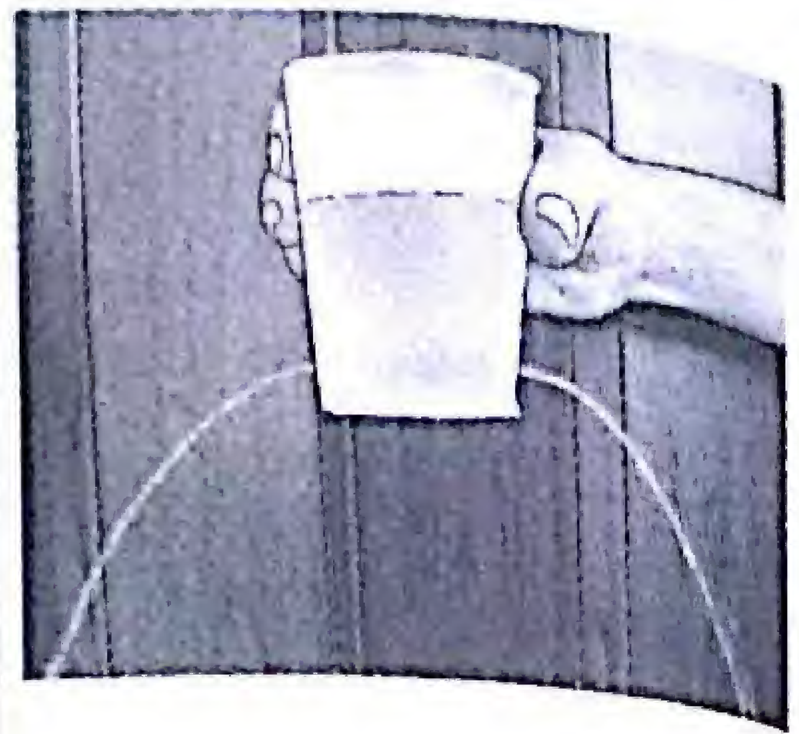
Inicialmente cada pelota flota con el hilo tenso verticalmente pero cuando se ponen a rotar en el sentido indicado en la figura, los hilos se inclinan hacia el eje de rotación. ¿Qué sucede si los frascos se ponen a girar con igual ω pero en el sentido contrario?

a) El hilo se inclina en la misma dirección anterior (hacia adentro).

b) El hilo se inclina hacia afuera..

PE-2.17. *Un vaso de agua con dos agujeros en el fondo*

En el borde inferior de un vaso de plástico se perforan dos pequeños agujeros, se cubren éstos con los dedos y luego se llena el vaso con agua. Si se sostiene el vaso fijo, y quitamos los dedos de los agujeros, se observa que salen dos chorros de forma parabólica. ¿Qué sucederá si luego dejamos caer el vaso?

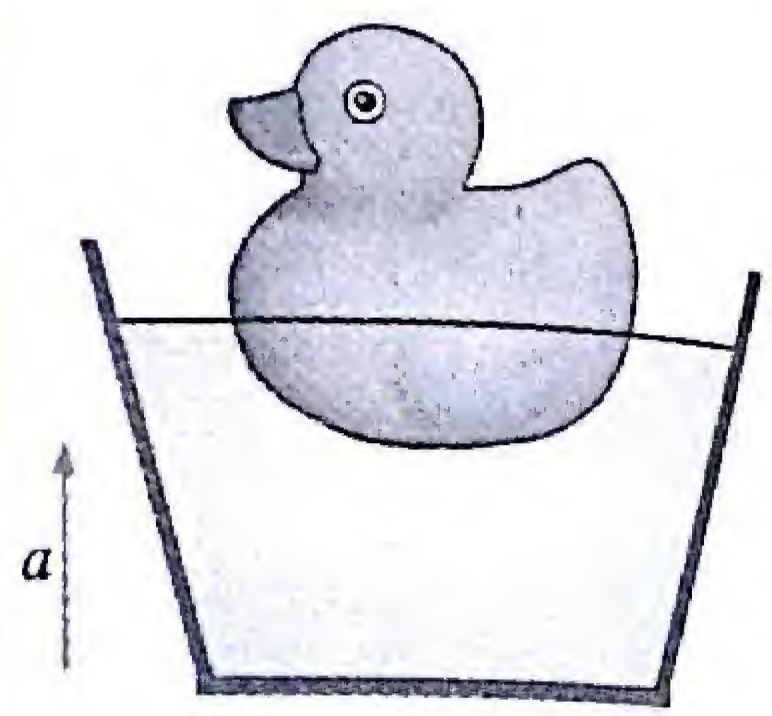


a) Los chorros siguen manteniendo la misma forma.

b) El agua deja de salir mientras el vaso está cayendo

PE-2.18. *Flotación en un ascensor acelerado*

En el piso de un ascensor en reposo hay un balde con agua donde está flotando un pato de juguete. ¿Qué sucede si el ascensor sube aceleradamente?



a) El pato flotará mas arriba.
b) El pato sseguirá flotando al mismo nivel.
c) El pato flotará mas hundido.

PE-2.19. *Aumento de la presión sanguínea....*

Debido a la formación de depósitos en su pared interna, el diámetro de una arteria de un paciente, ha sido disminuido a 90% de su valor normal. Para mantener la misma tasa de flujo de sangre, la diferencia de presión se debería incrementar en..

a) 5%, b) 15%, c) 23%, d) 36% e) 52%

PE-2.20. *¿Qué es mejor: El grueso o varios delgados?*

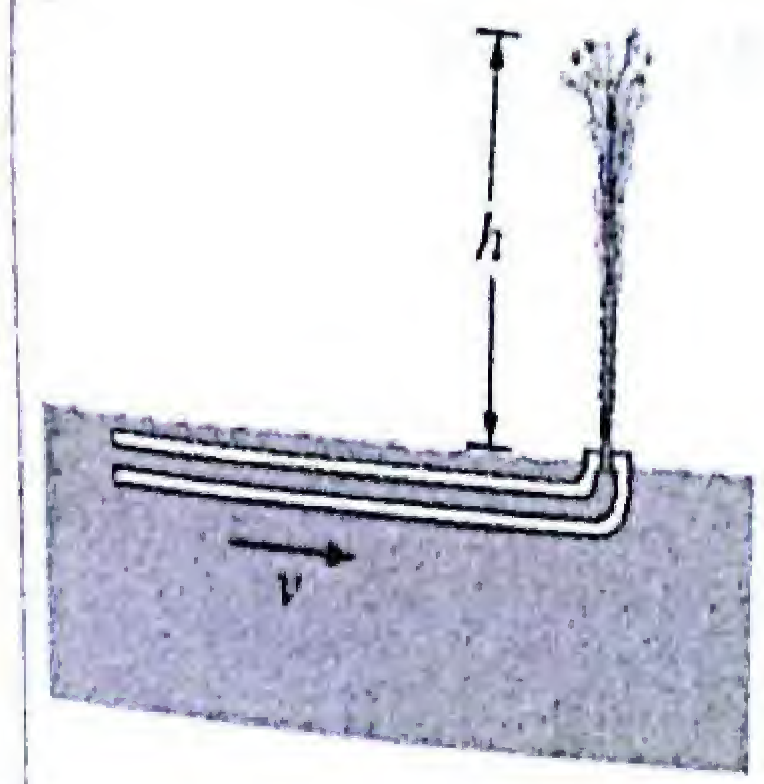
Se consideran dos alternativas de tuberías para transportar agua de un sitio a otro donde existe un gradiente de presión determinado:
1) Un tubo único con un diámetro grande.
2) Varios tubos de diámetro pequeño con un área transversal total idéntica a la del tubo de diámetro grande.

¿Con cuál se conseguirá la *mayor* rapidez de flujo?

a) Con el tubo único grueso.
b) Con los tubos delgados
c) Es igual para ambas opciones

PE-2.21. *Medición sencilla de la velocidad del agua*

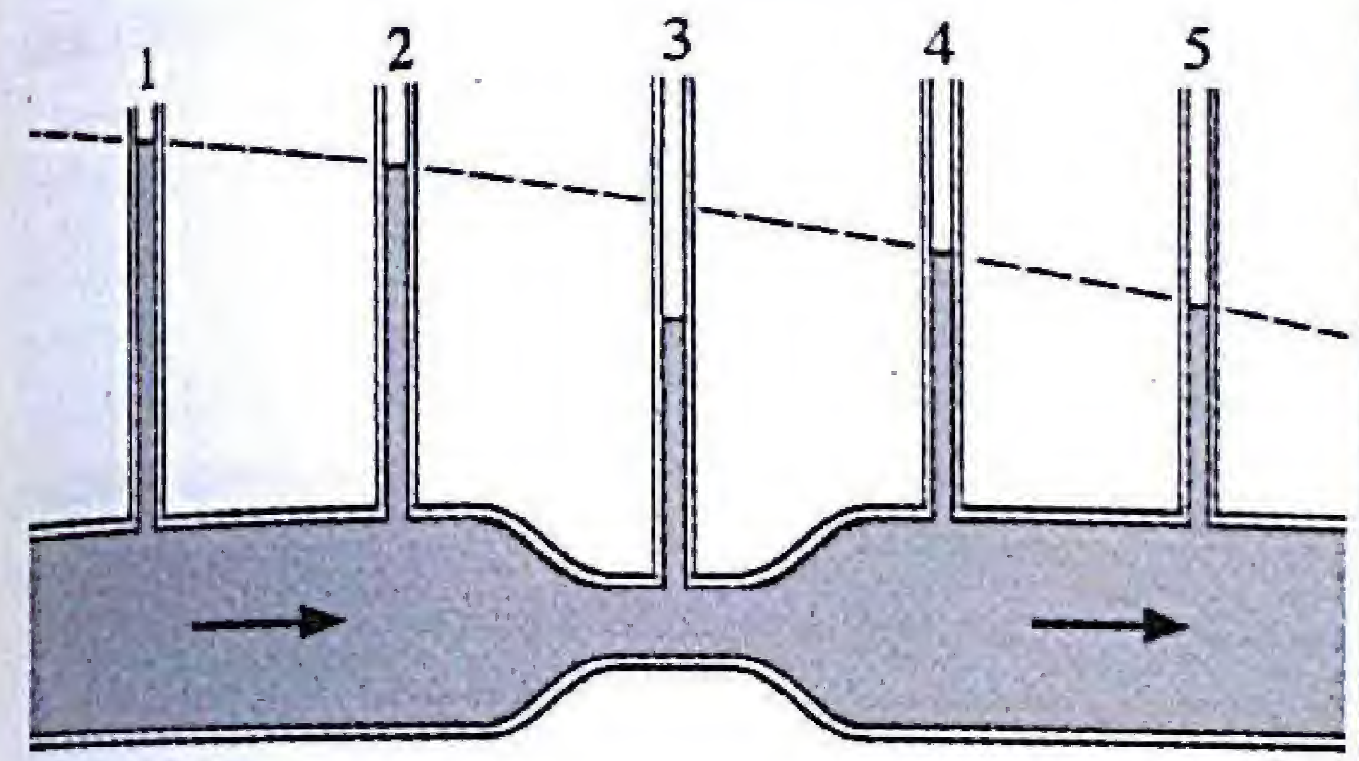
Un tubo con un codo en un extremo se coloca horizontalmente justo cerca de la superficie del agua en un río, como se ilustra en la figura. Si el fluido es ideal y emerge un chorro que alcanza una altura $h = 46$ cm, ¿cuál será la velocidad del río?



a) $v = 3$ m/s , b) $v = 6$ m/s, c) $v = 4{,}6$ m/s
d) $v = 1$ m/s , e) $v = 9$ m/s.

PE-2.22. *Tubo Venturi para ilustrar el efecto Bernoulli*

En el aparato mostrado, cinco tubos de vidrio iguales están conectado a un tubo horizontal que tiene un estrangulamiento. Cuando el líquido fluye de izquierda a derecha, alcanza diferentes alturas en los tubos verticales.

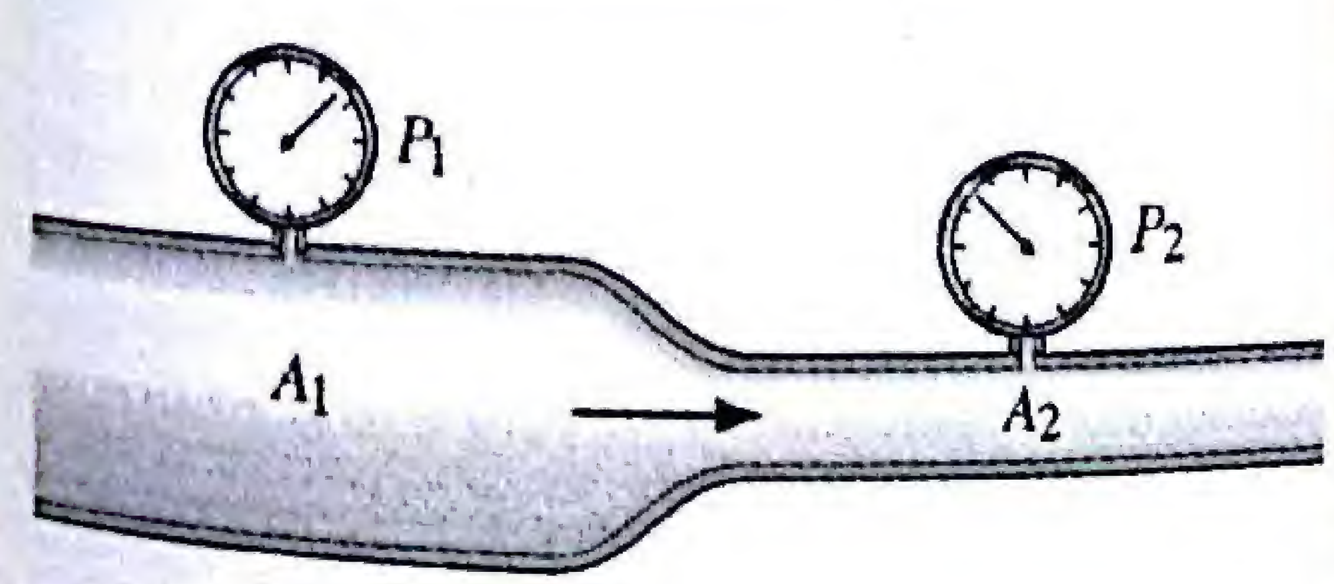


La caída de presión en el tubo 3 es atribuida al efecto Bernoulli en la región estrangulada. Pero la caída gradual de presión que se observa en los tubos 1, 2, 4 y 5, puede ser debida a...

a) Un efecto de capilaridad
b) El flujo es turbulento
c) El fluido es no newtoniano
d) El fluido es viscoso

PE-2.23. *¿Cuántos litros por segundo están fluyendo?*

Por una tubería horizontal cuya sección transversal se reduce desde un área $A_1 = 20\ \text{cm}^2$ hasta $A_2 = 10\ \text{cm}^2$, está fluyendo agua continuamente. La diferencia de presión entre las dos secciones es 6000 Pa.

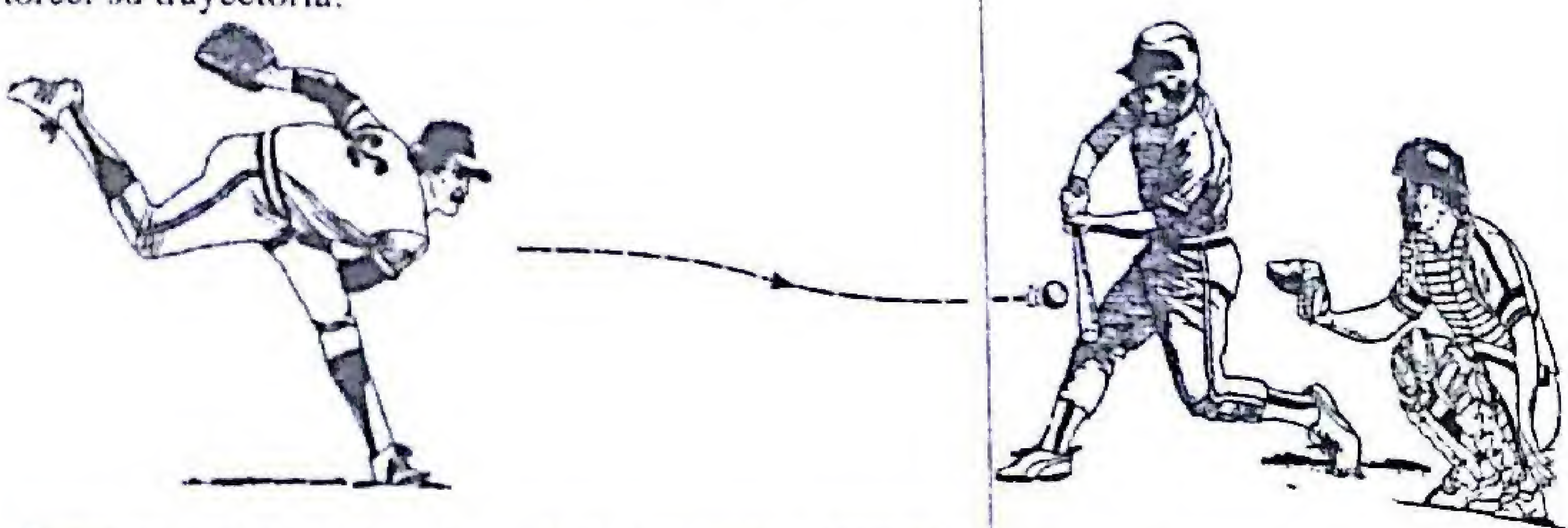


¿Cuántos litros por segundo están pasando?

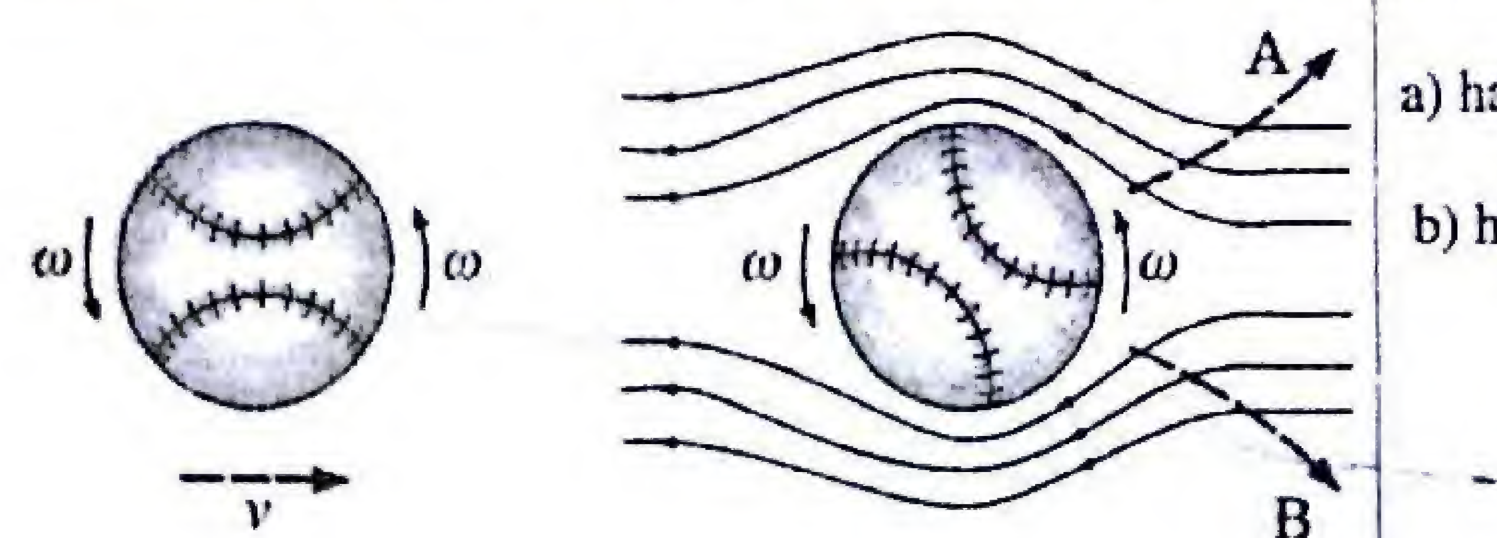
a) 0,5 lt/s,
b) 2 lt/s,
c) 2 lt/s,
d) 3 lt/s,
e) 4 lt/s

PE-2.24. *¿Cómo hace el pitcher para lanzar una curva?*

Cuando un lanzador en el juego de béisbol imparte a la pelota un giro en el momento de lanzarla, debido a su cubierta rugosa esta tiende a arrastrar el aire a su alrededor. La rapidez de la pelota con respecto al aire es mayor en un lado y de acuerdo a Bernoulli la presión en ese lado es menor, resultando una fuerza que le hace torcer su trayectoria.



Suponga que la pelota es lanzada de izquierda a derecha y el sentido de giro es anti horario, como indica la figura.



...En esta situación la pelota debe desviarse ...

a) hacia el lado A

b) hacia el lado B

CAP. 2: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
2.01					✓
2.03		✓			
2.05	✓				
2.07		✓			
2.09					✓
2.11				✓	
2.13			✓		
2.15		✓			
2.17		✓			
2.19					✓
2.21	✓				
2.23					✓

	a	b	c	d	e
2.02				✓	
2.04			✓		
2.06			✓		
2.08		✓			
2.10			✓		
2.12			✓		
2.14	✓				
2.16	✓				
2.18			✓		
2.20	✓				
2.22				✓	
2.24	✓				

DANIEL BERNOULLI

1700 - 1782

Nació en Groningen (Holanda), hijo del matemático Johann Bernoulli. Era una familia de eminentes matemáticos que en 1705, regresa a la ciudad suiza de Basilea, de donde era originaria cuando su padre obtiene una plaza en la Universidad de Basilea. Daniel estudió Medicina y Filosofía en las universidades de Heidelberg, Estrasburgo y Basilea. Su disertación doctoral en medicina trató sobre la mecánica de la respiración. Fue profesor de medicina y física en San Petesburgo (Rusia) y en Basilea (suiza). Sus contribuciones principales corresponden a los campos de teoría de la probabilidad, la hidrodinámica y la elasticidad. Su trabajo en medicina sobre el flujo de la sangre y la presión sanguínea le motivó un gran interés por el estudio de la física de los fluidos. El trabajo mas famoso de Bernoulli es el principio que lleva su nombre, una de las formas del principio de conservación de la energía que afirma que: en todo fluido incompresible en movimiento estacionario, la suma de la presión y las energías cinética y potencial por unidad de volumen es constante. Este principio no es aplicable estrictamente a los gases, que son compresibles, sin embargo, aproximadamente allí también se aplica, lo que tiene importantes consecuencias, como por ejemplo, para explicar las fuerzas que sostienen a las alas de un aeroplano que vuela. En el seno de la familia Bernoulli había mucho celo y rivalidad en los trabajos científicos, que generaba agrias discusiones y disputas entre ellos mismos. En 1874 se inscribió para optar al premio anual de la academia de Ciencias de París enviando un trabajo sobre astronomía. Su padre, también ya había enviado un trabajo para optar al mismo premio, y el veredicto del jurado fue que dicho premio debía ser compartido por ambos aspirantes. Esta decisión tuvo una infeliz consecuencia en las ya deterioradas relaciones, porque el padre reaccionó en contra de Daniel con tanta ira que terminó botándole de la casa y luego también publicó un libro *Hidráulica* en el que trató de atribuirse algunos de los descubrimientos de su hijo. Daniel Bernoulli publicó 86 trabajos sobre los más variados temas en matemáticas puras y aplicadas y ganó 10 Premios de la Academia de Ciencias de París, siendo sólo superado por el líder de todos los matemáticos de la época, Euler quien ganó 13 Premios. En el ocaso de su vida, Daniel Bernoulli, hacia importantes donaciones para obras de beneficencia. Con su financiamiento ordenó construir un pequeño hostal que servía de refugio a los estudiantes que no tenían suficientes recursos. Allí le daban a tales jóvenes, no sólo cama, sino también comida y en algunos casos un dinero como especie de beca. El 17 de marzo de 1782 tuvo un paro respiratorio y murió en Basilea, ciudad que tanto lo admiraba.

3

TEMPERATURA

Los fenómenos térmicos son una manifestación de la variación de energía mecánica durante el movimiento de las partículas (átomos y moléculas) que constituyen los cuerpos. La termodinámica trata acerca de las relaciones entre aquellas propiedades macroscópicas del cuerpo que pueden medirse en el laboratorio, tales como presión, volumen y temperatura. Un concepto central de la termodinámica es la temperatura, la cual relacionamos cotidianamente con aquellas sensaciones del tacto, de lo caliente y de lo frío; pero esta experiencia de sentido común es cualitativa e imprecisa. La *temperatura* es un parámetro que determina cuándo los sistemas se encuentran en equilibrio térmico. Al poner dos sistemas que tengan distintas temperaturas en contacto térmico, quedarán sometidos a intercambios de energía térmica. Cuando cesa la transferencia de energía entre estos sistemas es porque han alcanzado la misma temperatura y entonces se dice que se encuentran en *equilibrio térmico*. El proceso de transferencia de energía térmica de un sistema a otro, debido a la diferencia de temperaturas es lo que llamamos *calor*. Para determinar la temperatura de un cuerpo, le ponemos un *termómetro* en contacto térmico y esperamos que ambos alcanzan el equilibrio térmico. La medida de la temperatura estará indicada por una escala en el termómetro, relacionada con los cambios que ha experimentado éste en alguna de sus propiedades físicas. Por ejemplo, los materiales suelen expandirse al aumentar la temperatura y los cambios en sus dimensiones resultan proporcionales a dicha temperatura. Una de las formas de materia que resulta más fácil de entender es el llamado *gas ideal*. Para esta clase de material encontraremos la *ecuación de estado* que relaciona las variables presión, volumen, temperatura y cantidad de materia. La *teoría cinética* es un modelo sencillo que considera que las moléculas de un gas chocan elásticamente con las paredes del recipiente y nos permite mostrar que la temperatura de una sustancia es una magnitud proporcional a la energía cinética de translación de las moléculas que la constituyen.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

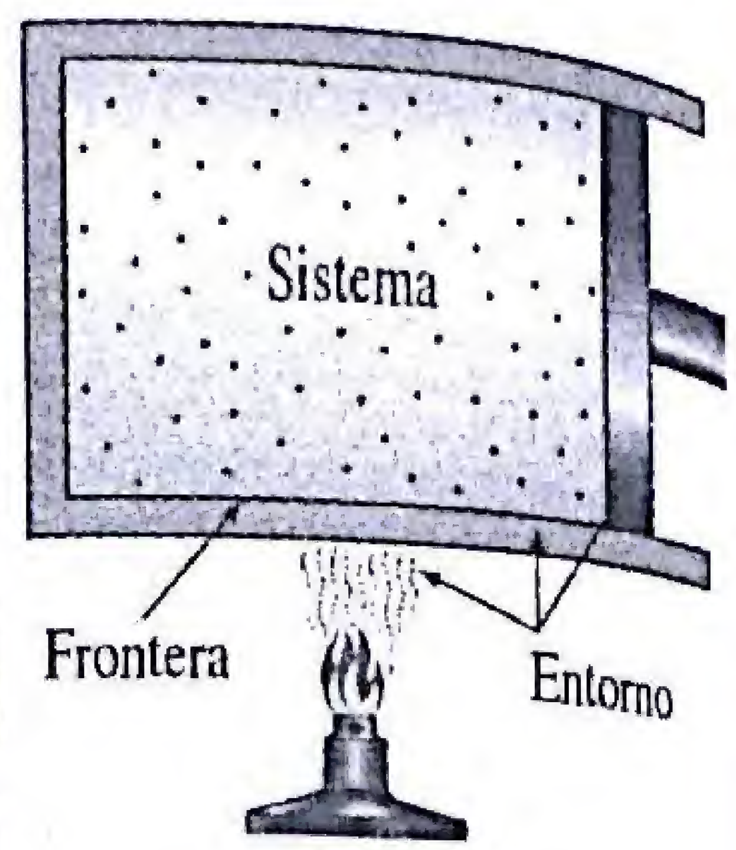
- Equilibrio térmico y ley cero de la termodinámica
- Temperatura
- Escalas de temperatura
- Dilatación térmica
- Esfuerzo térmico
- Ecuación de estado del gas ideal
- Teoría cinética de los gases
- Temperatura y energía molecular

SISTEMAS TERMODINÁMICOS

En termodinámica empezamos especificando el *sistema* físico de interés, el cual usualmente está constituido por una definida porción de materia limitada por una superficie (real o hipotética), llamada *frontera*.

Lo que no pertenece al sistema lo llamamos *entorno* o ambiente, que es el resto del universo o todo aquello que se encuentre fuera de la frontera del sistema.

En la situación mostrada en la figura, el sistema se ha representado por una porción de vapor y el entorno está constituido por un recipiente cilíndrico que lo contiene, provisto de un pistón y una fuente de calentamiento.

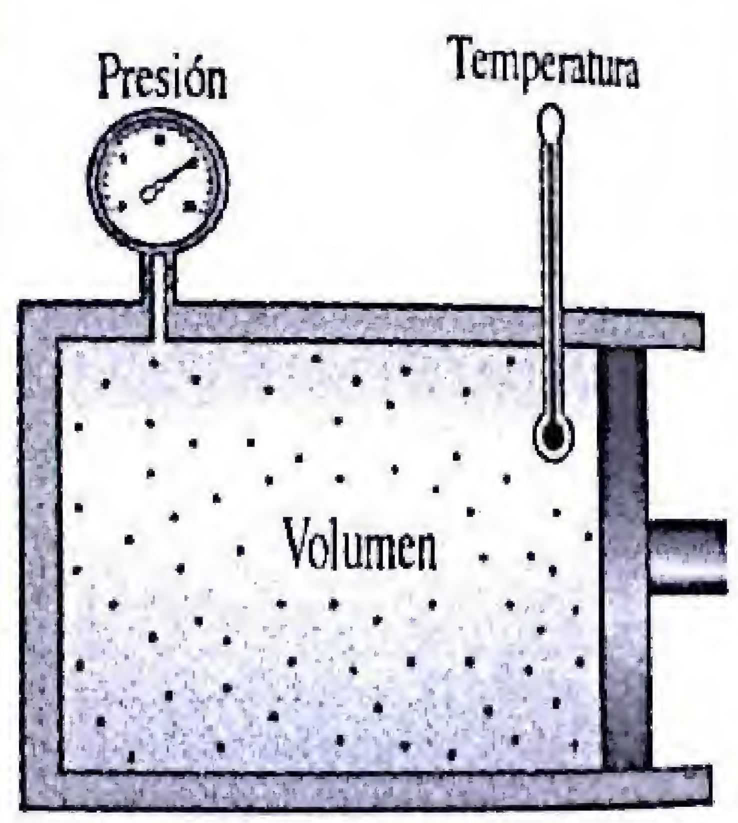


COORDENADAS TERMODINÁMICAS

De la misma manera que podemos especificar un punto en el espacio por sus coordenadas espaciales, también podemos especificar sin ambigüedad, los estados internos de equilibrio de un sistema termodinámico mediante un conjunto de variables macroscópicas. Por ejemplo, para describir el estado de un gas en un recipiente, las variables más comunes son:

Presión, volumen, temperatura

Para establecer el concepto de temperatura, partiremos de la noción de equilibrio térmico.



Presión, volumen y temperatura

EQUILIBRIO TÉRMICO

Cuando un sistema se encuentra en equilibrio térmico las variables termodinámicas que lo caracterizan son las mismas a través de todo el sistema y no cambian con el tiempo. Si dos sistemas cuyas presiones y temperaturas sean diferentes, se ponen en contacto de modo que influyan entre sí, se dice que están en *contacto térmico*.

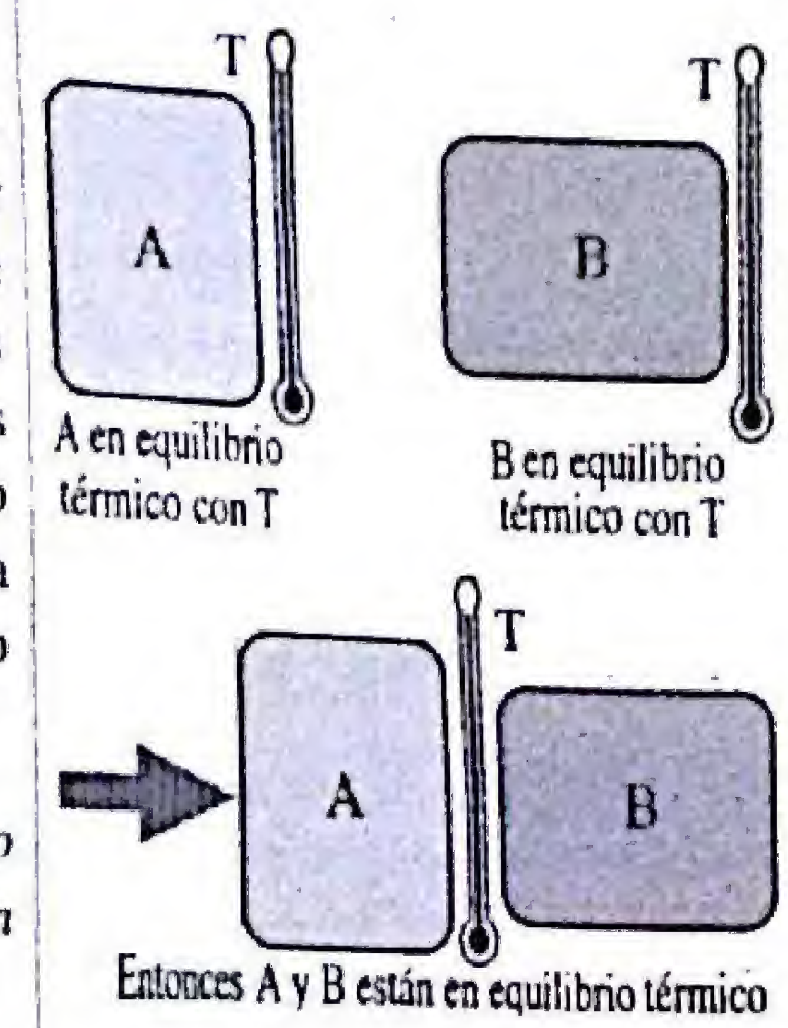
Por otra parte si dos sistemas no están en equilibrio y son separados por un material aislante (pared adiabática), ésta no permitirá la interacción entre ellos, e impedirá que alcancen el equilibrio térmico.

Sistemas separados por una pared adiabática no interaccionan

LA LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA

Supongamos que se pone un sistema T (que llamaremos termómetro) en contacto con un sistema A hasta alcanzar una lectura estable o de *equilibrio*. A continuación se coloca T en contacto con otro sistema B. Si las lecturas del termómetro T, después del contacto con A y B son las mismas, podemos concluir que A y B están en equilibrio térmico. Este resultado es conocido como Ley Cero de la termodinámica o ley del equilibrio y se enuncia como sigue:

Si dos cuerpos A y B por separado están en equilibrio térmico con un tercer cuerpo, entonces A y B también estarán en equilibrio térmico entre sí.

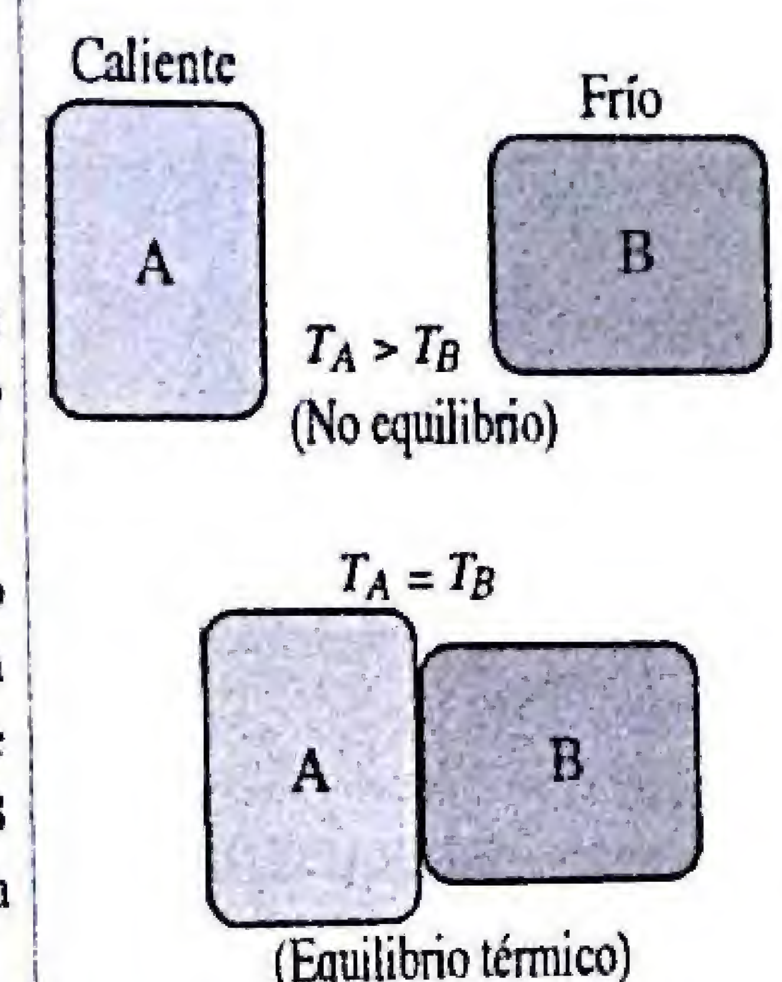


TEMPERATURA

La ley cero de la termodinámica nos va a permitir una definición mas precisa de temperatura:

Temperatura es la propiedad del estado de un sistema que determina si éste se encuentra o no en equilibrio térmico con otro sistema.

Esto equivale a decir que dos sistemas están en equilibrio térmico, sí y solo si, tienen la misma temperatura. Esta definición está de acuerdo con la noción cotidiana que tenemos de que, cuando un cuerpo caliente A y otro frío B se ponen en contacto térmico, alcanzarán finalmente una temperatura común, $T_A = T_B$.



EL TERMÓMETRO

Un termómetro es un dispositivo que permite registrar la temperatura de otro sistema cuando se encuentra en equilibrio térmico con él. Los termómetros se basan en alguna propiedad física medible que varía en determinada forma con la temperatura. Ejemplos de estas propiedades son: la presión, el volumen, la resistencia eléctrica, el color.

Propiedades termométricas:
Presión
Volumen,
Resistencia eléctrica
Color

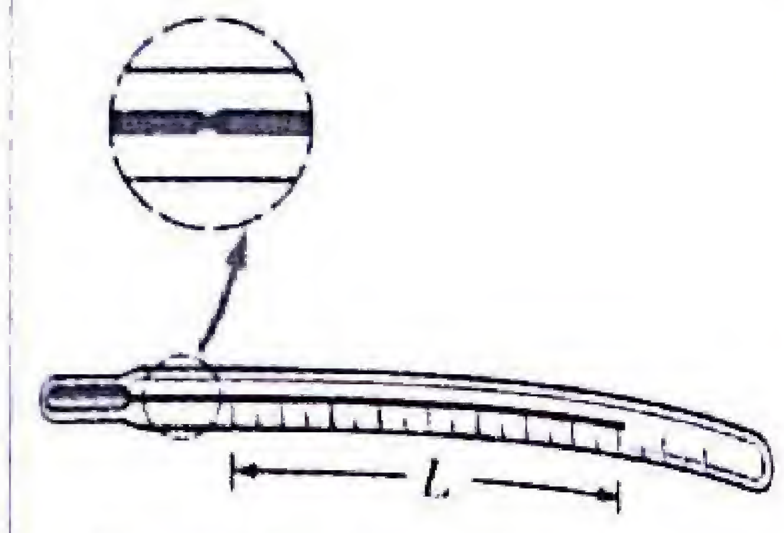
Dos requisitos para construir un termómetro ....

1) Definir una escala de temperatura. Por ejemplo, que cumpla algún tipo de relación:

$$T(x) = Ax + B$$

En esta relación lineal, x sería la propiedad termométrica y A, B constantes.

2) Asignar valores arbitrarios de temperaturas a ciertos estados físicos que sean reproducibles para fijar las constantes (ejemplo, una transición de fase).



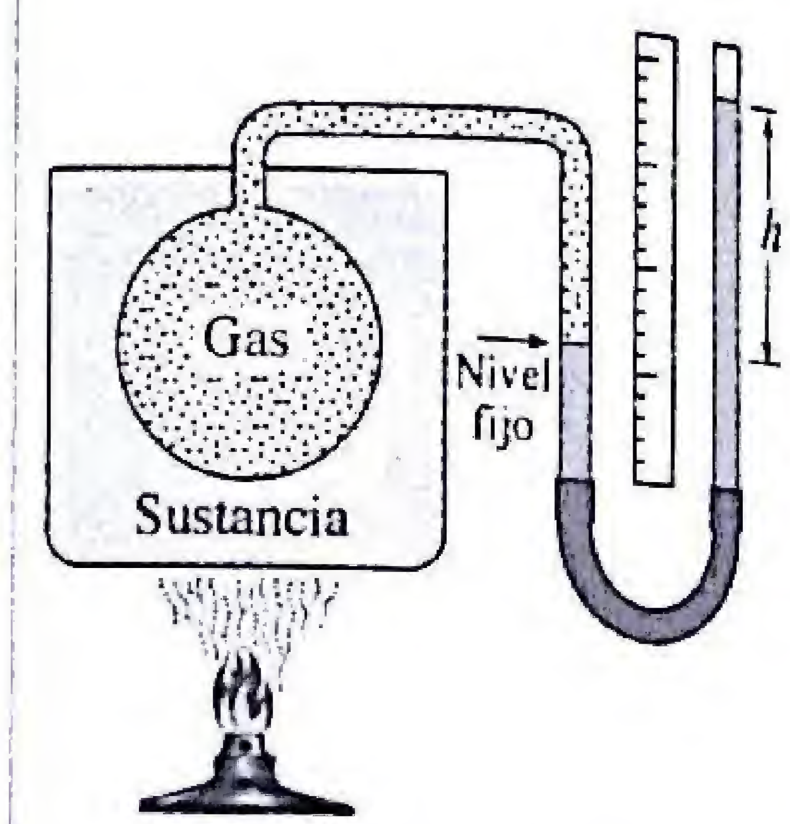
Expansión térmica de un líquido: La temperatura se especifica con el valor de la longitud L.

TERMÓMETRO DE GAS A VOLUMEN FIJO

En este termómetro se determina la temperatura de una sustancia mediante la medición de la presión de un gas contenido en un matraz en contacto térmico con la sustancia. El volumen del gas es mantenido constante al elevar o bajar el tubo en "U" tal que el nivel del mercurio en el tubo de la izquierda se mantenga a un nivel fijo. La altura h de la columna de mercurio es una medida de la presión del gas, la cual para un gas diluido, aumenta proporcionalmente a la temperatura.

$$T = aP$$

La elección de la constante de proporcionalidad a determina el valor numérico (y las unidades) de la temperatura T. Esta constante es igual para todos los gases, si sus densidades son suficientemente bajas.



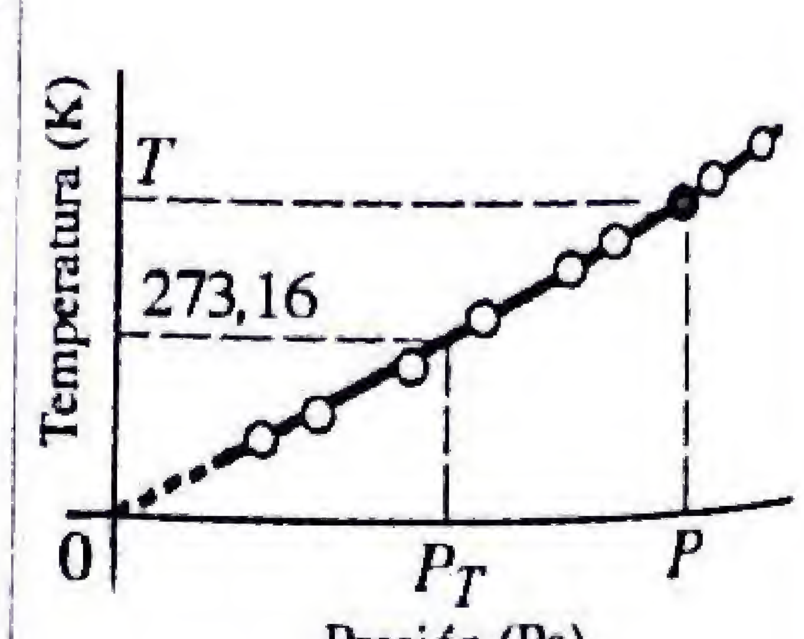
Termómetro de gas a volumen constante

ESCALA ABSOLUTA DE TEMPERATURA

La escala absoluta (o Kelvin) de temperatura es la que se utiliza en el trabajo científico y para definirla se emplea un termómetro de gas a volumen constante. Se elige como estado físico de referencia, el del agua coexistiendo en equilibrio en sus tres fases (sólido líquido y gas), al cual se le asigna el valor arbitrario de 273.16 *grados kelvin*. La constante de proporcionalidad es:

$$a = (273.16/P_T)$$

siendo P_T las presión correspondiente al punto triple del agua. Se define así la temperatura absoluta por la siguiente expresión:



$$T = \left(\frac{273,16}{P_T}\right)P$$

En la escala absoluta el menor valor de la temperatura es cero. Como la temperatura es una manifestación de energía molecular, se puede interpretar el *cero absoluto* como la temperatura para la cual no es posible extraer energía adicional del sistema y disminuir su temperatura.

Unidad SI de temperatura

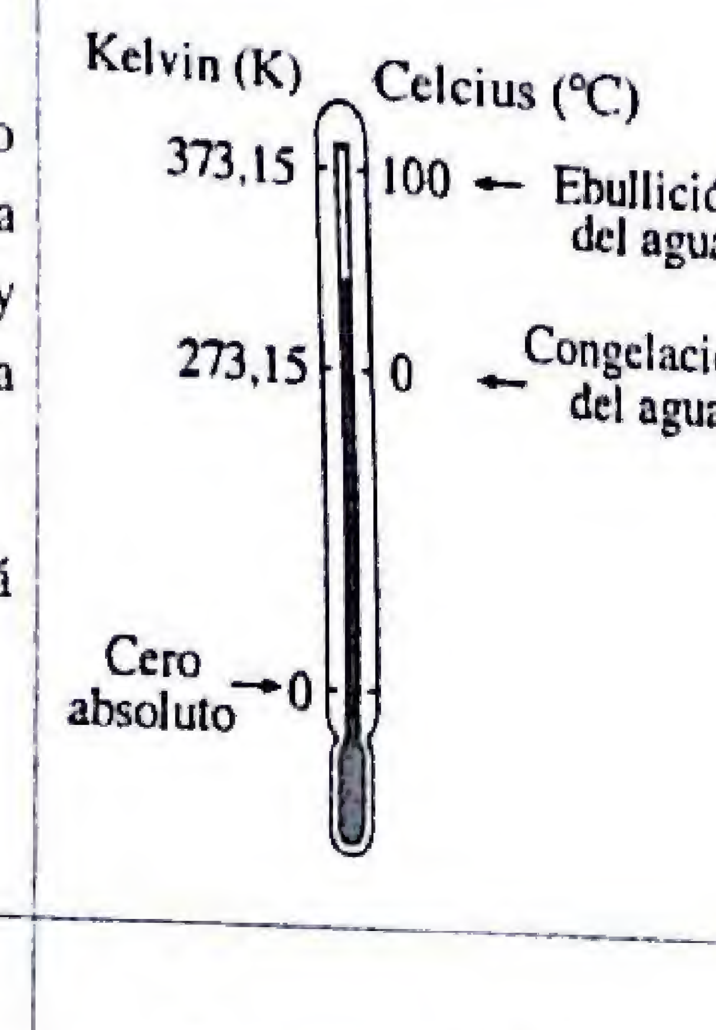
1 Kelvin (K)

ESCALA CENTÍGRADA DE TEMPERATURA

La escala Celsius o Centígrada es la que se utiliza a diario para las lecturas de temperatura. Esta escala fue definida originalmente en términos de los puntos de congelación y ebullición del agua, teniendo estos puntos una diferencia de exactamente 100 °C.

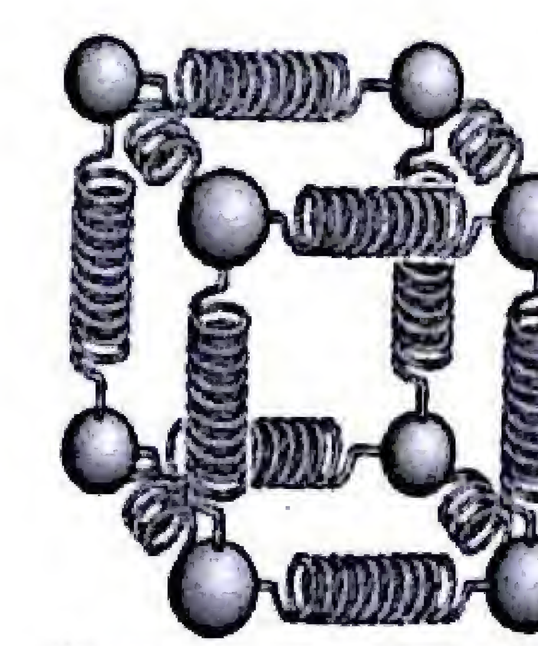
Se define ahora en términos de la escala Kelvin, y está desplazada respecto a ésta en 273.15 °C, por la relación:

$$T(°C) = T(K) - 273.15$$



DILATACIÓN TÉRMICA

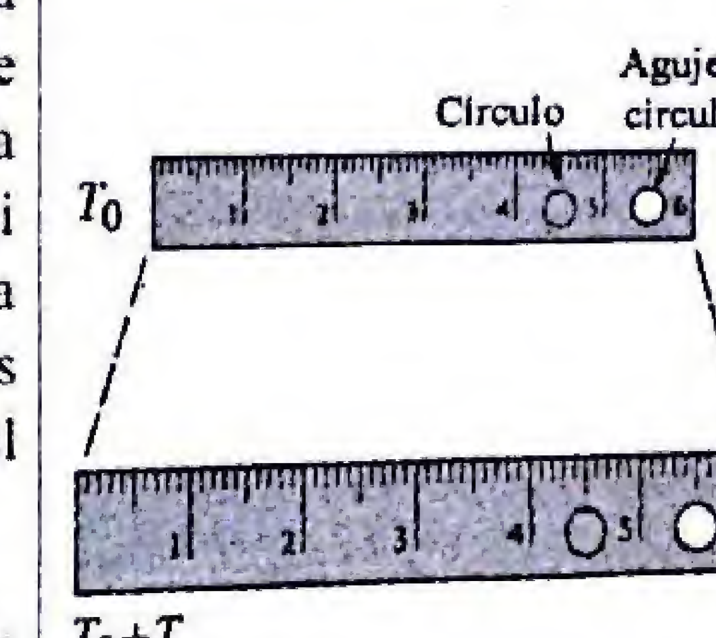
La mayoría de los cuerpos se expanden cuando se calientan y se contraen cuando se enfrían. Podemos visualizar las fuerzas interatómicas en un sólido imaginando como si los átomos estuviesen conectados mediante resortes que son mas fáciles de estirar que de comprimir.



Atomos en una red cristalina

Los átomos están en constante vibración respecto a una posición media de equilibrio. Cuando aumenta la temperatura se produce un incremento en la agitación de los átomos, haciendo que vibren con mayor amplitud. La fuerza que se manifiesta entre los átomos actúan como si los resortes fuesen mas resistentes a la compresión que a la tensión. En consecuencia la distancia media entre los átomos se incrementa, ocasionando la dilatación del sólido.

Al separarse los átomos, todas las dimensiones de un objeto aumentan, de modo que podemos considerar la expansión térmica de un objeto plano como una ampliación fotográfica.



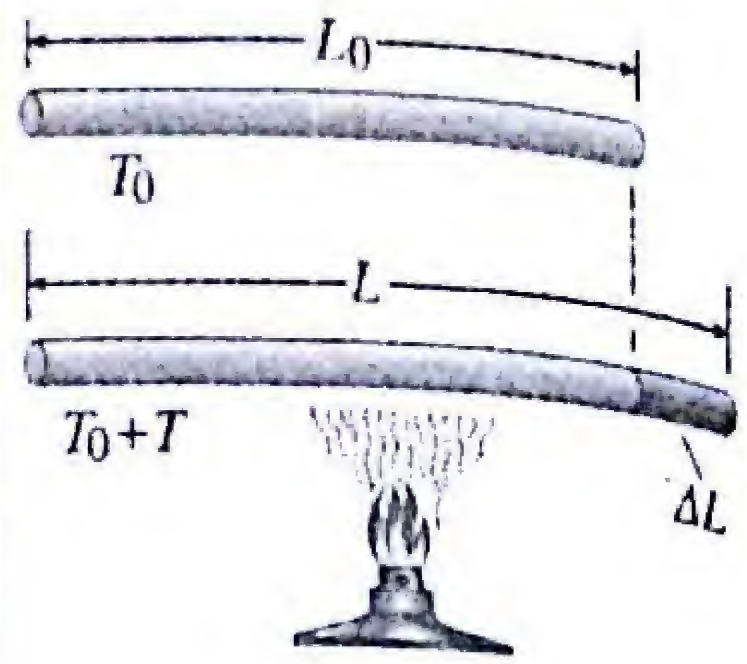
Al calentar un objeto aumentan todas sus dimensiones lineales

DILATACIÓN LINEAL

El cambio de longitud, ancho o espesor de un sólido de cualquiera de sus dimensiones se denomina dilatación lineal. Cuando la temperatura de un sólido cambia en una cantidad ΔT, el cambio ΔL en la longitud resulta directamente proporcional a dicho cambio de temperatura y a la longitud inicial L_o:

$$\Delta L = \alpha L_o \Delta T \qquad\qquad L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0)$$

donde α es el coeficiente de expansión lineal para un material determinado y tiene unidades $(°C)^{-1}$.



α = Coeficiente de expansión lineal

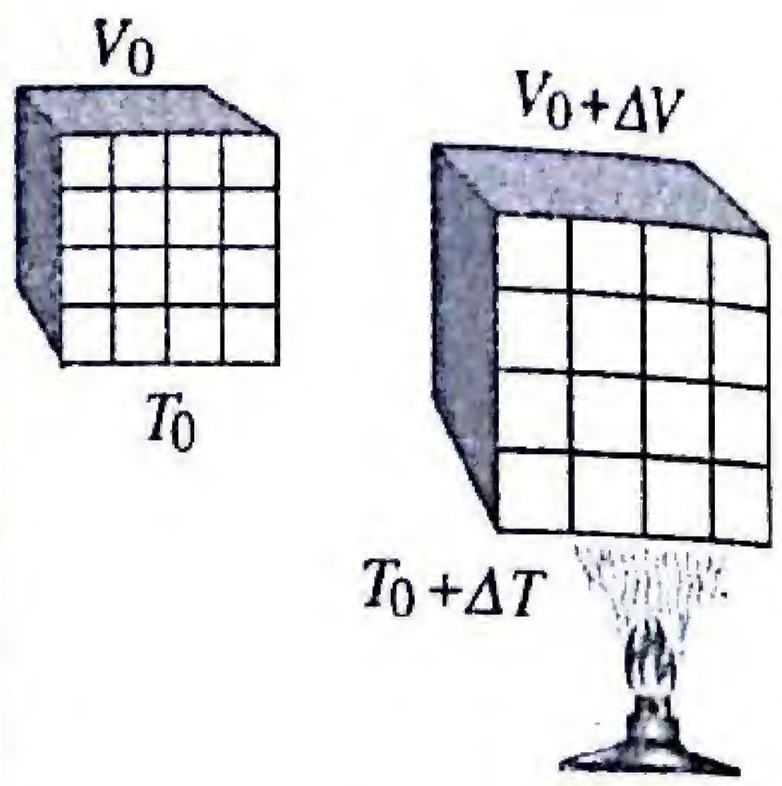
DILATACIÓN VOLUMÉTRICA

Como todas las dimensiones lineales de un objeto cambian con la temperatura, el área de las superficies y el volumen también cambian. El cambio de volumen de un sólido a presión constante es proporcional a ΔT y al volumen inicial V_o.

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

$$V - V_0 = \beta V_0 (T - T_0)$$

donde β es el coeficiente promedio de expansión volumétrica. Si el material es isotrópico, es decir, el cuerpo se expande uniformemente en todas direcciones, entonces, el coeficiente de expansión volumétrica es tres veces el coeficiente de expansión lineal: $\beta = 3\alpha$.

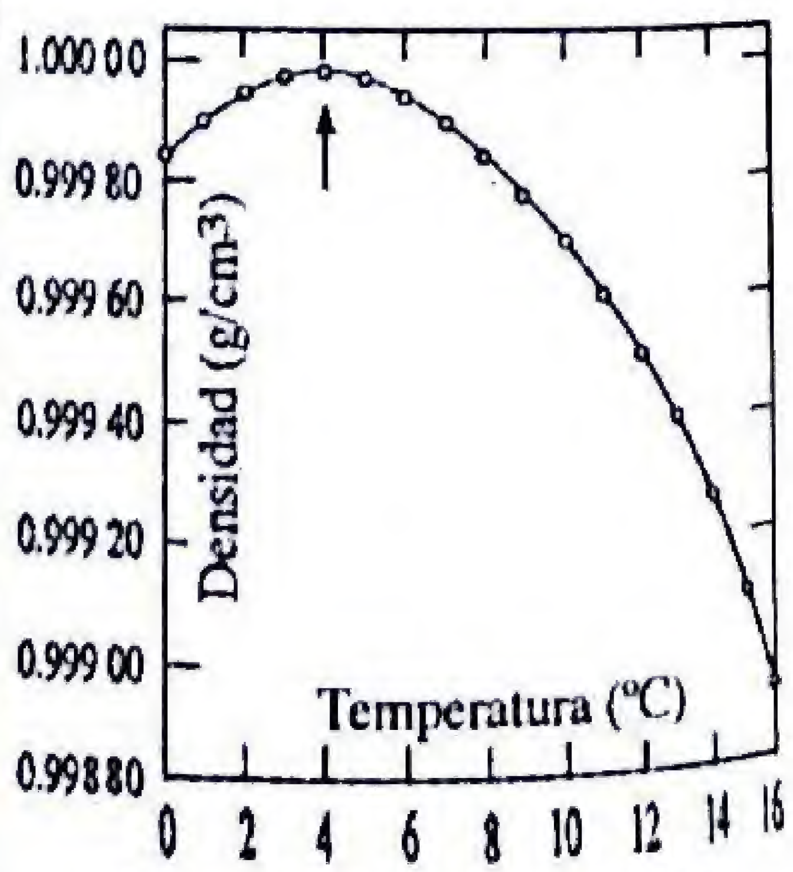


β = Coeficiente de expansión volumétrica.

LA EXPANSIÓN ANÓMALA DEL AGUA

Casi todas las sustancias se expanden al calentarlas y se contraen cuando se enfrían, una excepción es el agua. Al aumentarle la temperatura de 0 °C a 4 °C el agua se contrae y su densidad alcanza un máximo a 4 °C. A partir de los 4 °C, el agua se expande en forma normal y su densidad disminuye conforme aumenta la temperatura.

Este comportamiento del agua explica cómo se preserva la vida acuática en los lagos de aquellas regiones donde el invierno es muy riguroso. El hielo se forma primero en la superficie y como el hielo es menos denso que el agua, permanece flotando y actuando como aislante térmico para el agua densa que se encuentra por debajo a 4 °C.

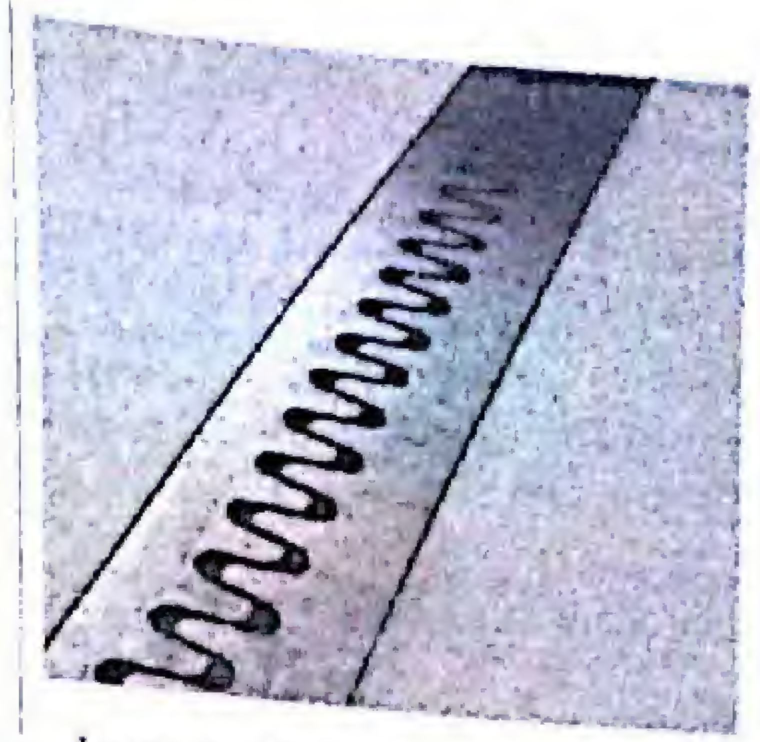


La densidad del agua alcanza un máximo a 4 °C

ESFUERZO TÉRMICO

Cuando los extremos de una viga o de una placa se les mantiene rígidamente fijos, al cambiar su temperatura quedarán sometidos a esfuerzos internos de tensión o de compresión. Si una viga de longitud L_0 tiende a expandirse (o comprimirse) en una cantidad ΔL, entonces se requiere una fuerza F para comprimir (o expandir) el material restringido en su longitud original. Según la definición del modulo de Young, podemos escribir:

$$Y = \frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L / L_0} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta L = \frac{1}{Y}\frac{FL_0}{A}$$



Junta de dilatación en un puente para evitar que se pandee el hormigón por esfuerzo térmico

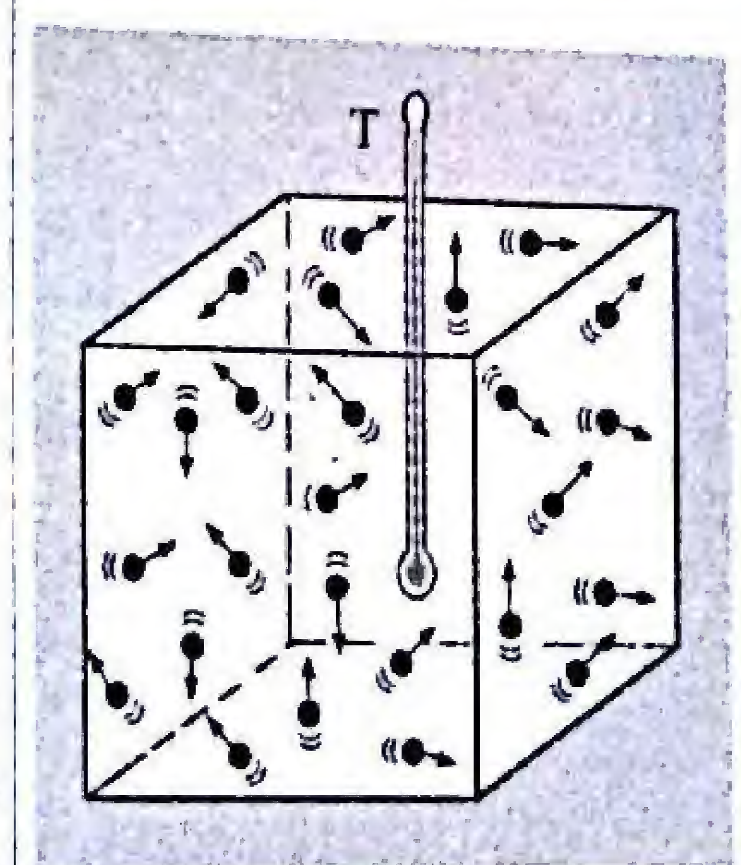
La fuerza F de deformación se determina haciendo este cambio de longitud ΔL igual al correspondiente ΔL que tendría lugar si la viga pudiese expandirse o contraerse:

$$\alpha L_0 \Delta T = \frac{1}{Y}\frac{FL_0}{A}$$

EL MODELO DE GAS IDEAL

Un gas ideal es aquel que está constituido por un número muy grande de moléculas que están en movimiento aleatorio y separadas por distancias suficientemente grandes para que interaccionen únicamente durante los choques. Los choques de las moléculas se consideran perfectamente elásticos.

Este modelo es de suma utilidad ya que su comportamiento es una buena aproximación al de los gases reales en el límite de bajas presiones y altas temperaturas.



ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL

Una ecuación de estado es una expresión matemática que relaciona las variables termodinámicas macroscópicas como, presión, volumen y temperatura:

$$f(P, V, T) = 0$$

Si se realizan observaciones experimentales en un gas diluido constituido por N moléculas, variando de manera independiente la presión P, el volumen V o la temperatura T(K) se encuentra que:

1) A temperatura constante:

$$PV = \text{constante} \qquad \text{(Ley de Boyle)}$$

2) A presión constante:

$$V/T = \text{constante} \qquad \text{(Ley de Charles)}$$

Si se combinan estas dos leyes experimentales, podemos escribir PV/T = constante. La constante está relacionada con la cantidad de materia o con el número N de moléculas presente:

$$\frac{PV}{T} = Nk \qquad \text{o} \qquad PV = NkT$$

Esta es la ecuación de *estado del gas ideal*. La constante $k = 1.38\text{x}10^{-23}$ J/K se denomina constante de Boltzmann

Ecuación de estado gas ideal

$$\boxed{PV = NkT}$$

N = Número de moléculas

$k = 1.38\text{x}10^{-23}$ J/K
La constante de Boltzmann

Alternativamente, podemos expresar la ecuación de estado en términos del número n de moles. Recordemos que un mol es una cantidad de sustancia cuya masa (en gramos) es numéricamente igual a su masa molecular. El número de moles es la masa m del gas dividida por M, la masa molar: $n = m / M$.

Un mol de cualquier sustancia pura contiene un número de moléculas igual al número de Avogadro.

$$N_A = 6.02\text{x}10^{23} \text{ moléculas/mol}$$

Por lo tanto el número total de moléculas N, se puede expresar en términos del número n de moles, es decir; $N = nN_A$. Por lo tanto:

$$Nk = n(kN_A) = nR$$

Podemos escribir la ecuación de estado como: $PV = nRT$.

Número de Avogadro
$N_A = 6.02\text{x}10^{23}$

Ecuación de estado gas ideal

$$\boxed{PV = nRT}$$

n = Número de moles

$R = kN_A = 8.31$ J/mol.K
Constante universal de los gases

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

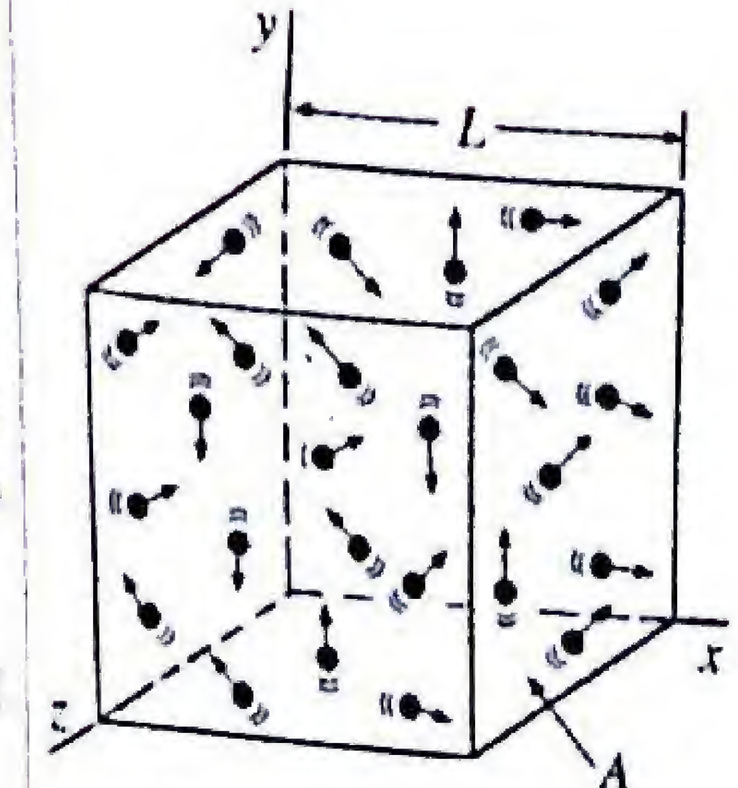
Según la teoría cinética, la materia está constituida de moléculas en continuo movimiento aleatorio. La presión que ejerce un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene es el resultado del efecto promedio de los numerosos impactos de las moléculas con las paredes del recipiente. Para calcular la presión, vamos a considerar el modelo simplificado del gas ideal realizando las siguientes suposiciones:

1) El gas está constituido de un gran número N de moléculas, cada una de masa m, que se mueven en direcciones aleatorias a diversas velocidades.

2) Las moléculas están por lo general muy alejadas entre sí, es decir, su separación promedio es mucho mayor que el tamaño de sus diámetros.

3) Se supone que las moléculas obedecen las leyes de la mecánica clásica y no interaccionan entre sí, excepto cuando chocan.

4) Los choques entre las moléculas o contra la pared del recipiente se suponen perfectamente elásticos.



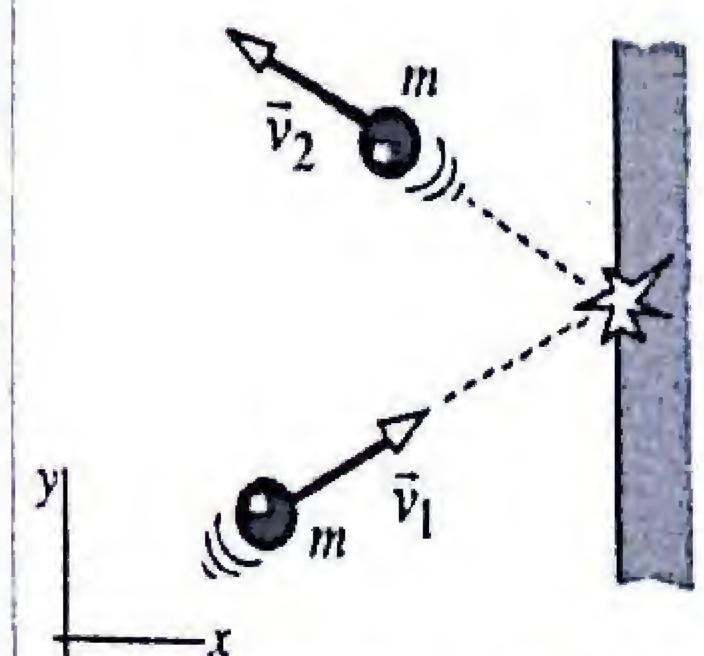
Moléculas en movimiento aleatorio en un recipiente cúbico.

Con estas suposiciones, imaginemos que las moléculas están en un recipiente cúbico cuyas caras tienen un área A y lado L. Durante el rebote elástico de una molécula con la pared lateral izquierda, el cambio en la cantidad de movimiento es:

$$\Delta p = \Delta(mv) = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

Para que la molécula choque dos veces con la misma pared debe recorrer una distancia $2L$ a lo largo de la dirección x. Por lo tanto, el intervalo entre esos dos choques es: $\Delta t = 2L/v_x$. Para hallar la fuerza promedio que ejerce la molécula aplicamos la segunda ley de Newton:

$$F_i = \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}$$



Rebote elástico de molécula en una pared lateral

La fuerza total sobre la pared debida a las N moléculas es:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = \frac{m}{L}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \ldots + v_{xN}^2)$$

Podemos expresar la fuerza en términos del valor medio del cuadrado de la componente x de la velocidad:

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \ldots + v_{xN}^2}{N}$$

Tomando en cuenta que: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, y para cualquier velocidad v se cumple: . Por lo tanto la fuerza total sobre la pared puede escribirse:

$$F = \frac{m}{L}N\overline{v_x^2} = \frac{m}{L}N\frac{\overline{v^2}}{3}$$

Entonces la presión P, sobre la pared es:

$$P=\frac{F}{A}=\frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v^2}}{AL}=\frac{N}{V}\left(\frac{1}{3}m\overline{v^2}\right)$$

Es decir, en un gas ideal la presión es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen (N/V) y al valor promedio de los cuadrados de las velocidades, $\overline{v^2}$.

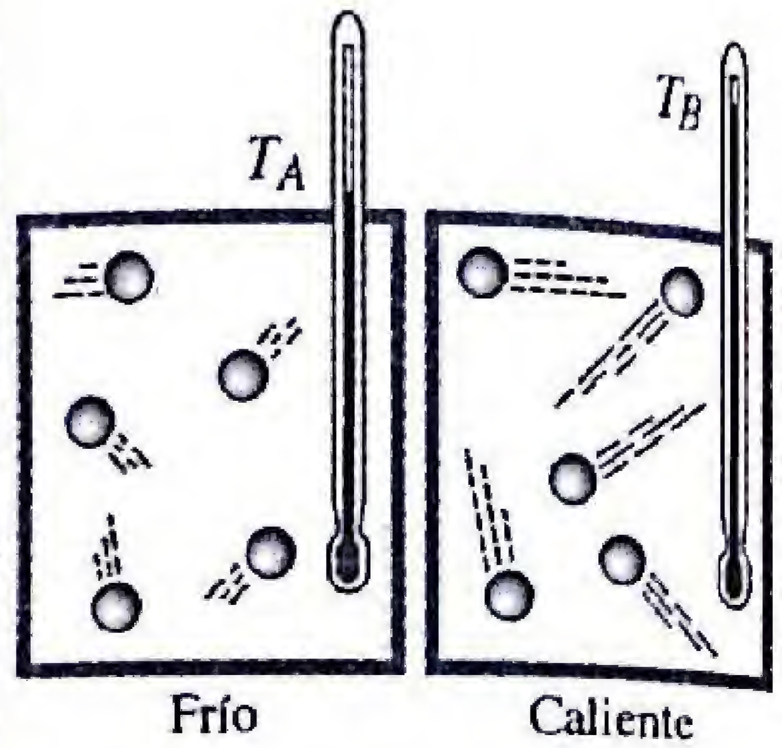
TEMPERATURA Y ENERGÍA CINÉTICA MOLECULAR

Si comparamos la expresión anterior (teórica) para la presión con la ecuación de estado (empírica), $PV=NkT$, podemos dar una interpretación cinética a la temperatura:

$$T=\frac{2}{3k}\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right)=\frac{2}{3k}\overline{E_c}$$

Siendo $\overline{E_c}$ el valor promedio de la energía cinética por molécula del gas. De acuerdo a este resultado:

La temperatura absoluta de un cuerpo es una cantidad proporcional a la energía cinética media de traslación por molécula.



En un cuerpo caliente, las moléculas tienen mayor energía cinética

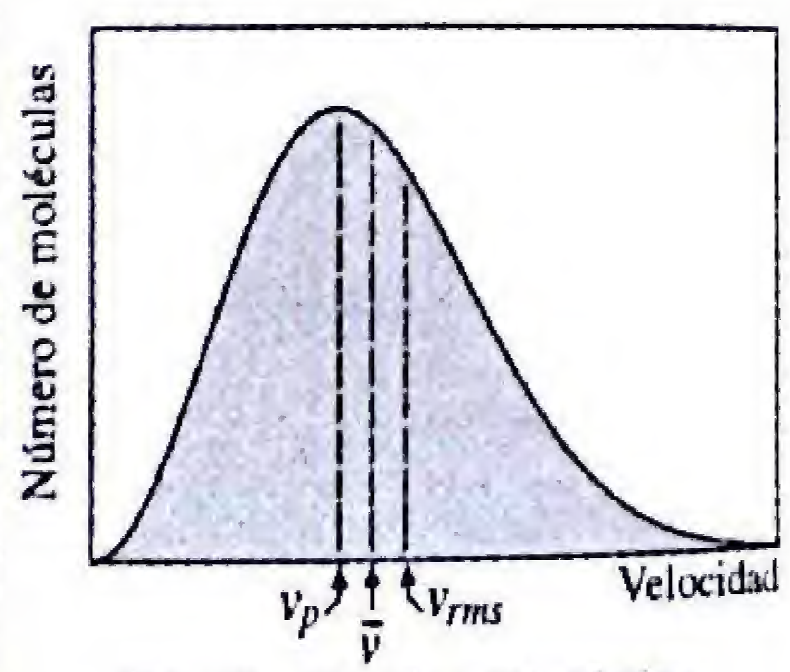
DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES MOLECULARES

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se conoce como velocidad media cuadrática de las moléculas (en inglés valor rms):

$$v_{rms}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{3kT/m}$$

Esta expresión muestra que a una dada temperatura las moléculas mas ligeras se mueven mas rápido, en promedio, que las moléculas mas pesadas.

Muchas de las moléculas de un gas tienen velocidades menores que v_{rms}, mientras que muchas otras tienen velocidades mayores. En 1859 J. C. Maxwell dedujo, basándose en la teoría cinética que, a una dada temperatura las velocidades de las moléculas se distribuyen según la gráfica de la figura. La velocidad v_p que corresponde al punto máximo de la curva se llama *velocidad mas probable*. La velocidad media $\bar{v}$ es el promedio de las magnitudes de todas las velocidades. Al aumentar la temperatura, aumentará la velocidad media cuadrática v_{rms} (y también v_p y $\bar{v}$)



Distribución de velocidades de Maxwell

Velocidad mas probable

$$\boxed{v_p=\sqrt{2kT/m}}$$

Velocidad media

$$\boxed{\bar{v}=\sqrt{8kT/\pi m}}$$

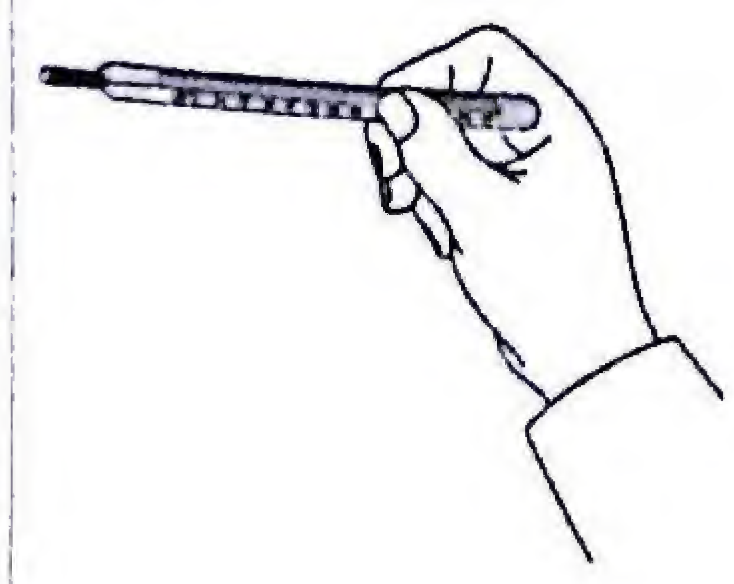
Velocidad media cuadrática

$$\boxed{v_{rms}=\sqrt{3kT/m}}$$

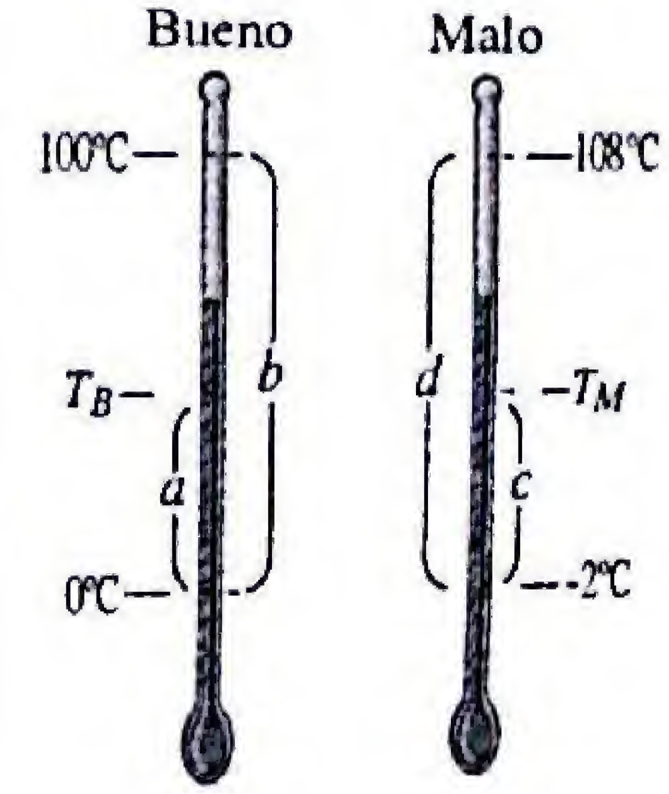
PROBLEMAS RESUELTOS

PR-3.01. *Algo anda mal con ese termómetro clínico*

El médico sospechaba que el termómetro de mercurio que usaba con sus pacientes estaba malo y mandó a revisarlo. El termómetro estaba mal calibrado ya que indicaba erróneamente un valor de −2 °C para el punto de congelación del agua y 108°C para el punto de ebullición.
a) Si este termómetro indicaba que un paciente tenía fiebre de 40 °C, ¿cuál era la verdadera temperatura?
b) ¿Cuál sería la única temperatura en la escala centígrada para la cual el termómetro indicaría un valor correcto?
c) ¿Por qué los termómetro clínicos tienen un estrechamiento en la base del tubo capilar?



Solución: a) En el esquema mostrado, las temperaturas T_M corresponden a los valores del termómetro defectuoso o *Mal* calibrado y T_B corresponden a los valores correctos de un termómetro *Bien* calibrado. Podemos establecer la relación proporcional entre estas dos graduaciones:



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{T_B-0^\circ C}{100^\circ C-0^\circ C}=\frac{T_M-(-2^\circ C)}{108^\circ C-(-2^\circ C)}$$

Por lo tanto, la relación entre las lecturas de los dos termómetros es:

$$T_B=\frac{100}{110}(T_M+2^\circ C)$$

Cuando el termómetro malo indica $T_M=40^\circ C$, la lectura verdadera sería:

$$T_B=\frac{100}{110}(40^\circ C+2^\circ C)=38{,}2^\circ C$$

b) Para que una lectura de este termómetro sea correcta, se debe cumplir: $T_M=T_B$. Reemplazando en la relación anterior, se obtiene:

$$110T_B=100(T_B+2^\circ C)\qquad\Rightarrow\qquad T_B=20^\circ C$$

c) El estrechamiento en el tubo capilar es para que la columna de mercurio no pueda regresar al depósito y siga indicando la temperatura de la persona, aunque ya no esté en contacto con ella. Al contraerse el Hg lo hará en el receptáculo, y la columna acabará por romperse en el estrechamiento. Para que el Hg baje habrá que agitarlo.

Respuesta:

a) La fiebre sólo era de 38,2°C.
b) Lectura correcta sólo a 20°C

PR-3.02. *Calibración de un termómetro electrónico*

Un termistor es un dispositivo fabricado de un material semiconductor, cuya resistencia eléctrica disminuye con la temperatura, $T(K)$, de acuerdo a la relación:

$$R(T) = A\,e^{B/T}$$

a) Si se encuentran los valores R = 7500 Ω para el punto de congelación del agua y R = 150 Ω para el punto de ebullición, determine las constantes A y B.

Suponga que cuando el termómetro de termistor se introduce en cierto líquido la resistencia es 1300 Ω.

b) ¿Cuál es la temperatura del líquido?

c) ¿Para cuál región de temperaturas será más sensible este termómetro, alrededor de 0°C o alrededor de 100°C?

Solución. a) Para las temperaturas de congelación y fusión las resistencias correspondientes son:

$$R_1 = Ae^{B/T_1} \quad \text{y} \quad R_2 = Ae^{B/T_2}$$

Dividiendo una expresión entre la otra, obtenemos:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{e^{B/T_1}}{e^{B/T_2}} = e^{B/T_1}e^{-B/T_2} = e^{B(T_2-T_1)/T_1T_2}$$

Tomando logaritmos:

$$ln(\frac{R_1}{R_2}) = B(\frac{T_2-T_1}{T_1T_2}) \quad \Rightarrow \quad B = (\frac{T_1T_2}{T_2-T_1})\ln(\frac{R_1}{R_2})$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos:

$$B = \frac{(273K)(373K)}{373K-273K}ln(\frac{7500\Omega}{150\Omega}) = 3984K$$

Para hallar la constante A, se despeja de una de las dos ecuaciones de partida y se sustituye el valor numérico de B:

$$A = R_1e^{-B/T_1} = (7500\Omega)e^{-3984K/273K} = 3{,}45x10^{-3}\Omega$$

b) La temperatura que corresponde a una resistencia de 1300Ω viene dada por la expresión:

$$R = Ae^{B/T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{B}{ln(R/A)}$$

$$T = \frac{3984K}{ln(1300\Omega/3{,}45x10^{-3}\Omega)} = 310K = 37°C$$

c) La sensibilidad del termómetro será mayor cuando, para una dada variación de temperatura, se registra una variación mayor de resistencia. Derivando la resistencia R con respecto a T, se obtiene:

$$\frac{dR}{dT} = \frac{d}{dT}Ae^{B/T} = -\frac{B}{T^2}Ae^{B/T} = -\frac{BR}{T^2}$$

$$\text{A 0°C:} \quad \left.\frac{dR}{dT}\right|_{T=273K} = -\frac{(3984K)(7500\Omega)}{(273K)^2} = -401\Omega/K$$

$$\text{A 100°C:} \quad \left.\frac{dR}{dT}\right|_{T=373K} = -\frac{(3984K)(150\Omega)}{(373K)^2} = -4{,}3\Omega/K$$

Concluimos que este termómetro será más sensible a 0°C

Respuesta:

a) $A = 3{,}45x10^{-3}\Omega$ $B = 3984K$
b) $T = 37°C$
c) Más sensible a 0°C

PR-3.03. *La ley de enfriamiento de Newton*

Observamos a diario que un objeto a una temperatura diferente de la de su entorno, terminará alcanzando una temperatura igual a la de su entorno. Newton encontró que si la diferencia de temperatura entre el cuerpo y sus alrededores ($\Delta T = T - T_0$), no es demasiado grande, la tasa de enfriamiento es proporcional a esta diferencia. Es decir:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A\Delta T$$

Siendo A la constante de proporcionalidad. El signo (-) se debe a que el cambio ΔT disminuye con el tiempo si ΔT es positiva y aumenta si ΔT es negativa. Esto se conoce como *la ley de Newton para el enfriamiento*.

Si en un instante inicial, $t = 0$ la diferencia de temperatura es ΔT_0, demuestre que en un tiempo t mas tarde, esa diferencia es.

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

Solución: Según la ley de Newton para el enfriamiento:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A\Delta T$$

Si separamos las variables ΔT y t:

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -Adt$$

Integrando:

$$\int_{\Delta T_0}^{\Delta T} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -A\int_0^t dt$$

De manera que:

$$ln\Delta T\Big|_{\Delta T_0}^{\Delta T} = -At \qquad \Rightarrow \qquad ln\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = -At$$

Esta expresión puede escribirse de la forma:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

Respuesta:

$$\boxed{\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}}$$

PR-3.04. *¿Cuál será la temperatura del café?*

Una taza de café se encuentra a una temperatura de 87 ˚C, pero, 20 minutos antes estaba a 97 ˚C. Sabiendo que la temperatura del ambiente es T_a = 27 ˚C, ¿cuál va a ser la temperatura del café, 20 minutos mas tarde?

Solución: Siendo en este caso la diferencia de temperatura inicial entre el cuerpo y su entorno:

$$\Delta T_0 = 97\text{˚C} - 27\text{˚C} = 70\text{˚C}$$

Mientras que la diferencia de temperatura al cabo de 20 minutos entre el cuerpo y su entorno será:

$$\Delta T = 87\text{˚C} - 27\text{˚C} = 60\text{˚C}$$

Si aplicamos la expresión de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

La constante A es:

$$A = -\frac{ln(\Delta T/\Delta T_0)}{t}$$

$$A = -\frac{\ln(60°C/70°C)}{20\text{min}} = 0{,}00771\text{min}$$

Después de transcurrido un tiempo total de 40 minutos la variación de temperatura es:

$$\Delta T = (70°C)e^{-(0{,}00771/\text{min})(40\text{min})} = 51.4°C$$

Por lo tanto:

$$T = \Delta T + 27°C = 51.4°C + 27°C = 78.4°C$$

Respuesta:

$$\boxed{T = 78.4°C}$$

PR-3.05. *El día que se dañó la calefacción de la casa*

Un día cuando la temperatura exterior era de –7 ℃, se descompuso el sistema de calefacción de una casa. Se observó que la temperatura en el interior de la casa cayó de 22 ℃ a 18 ℃ en 45 minutos. ¿Cuánto tiempo más habrá que esperar para que la temperatura descienda hasta 14 ℃?

Solución: La diferencia de temperatura entre la casa y el exterior, en el instante inicial t = 0 en que falla la calefacción es: $\Delta T_0 = 22°C - (-7°C) = 29°C$. Después de transcurrir 45 minutos la diferencia de temperatura es: $\Delta T = 18°C - (-7°C) = 25°C$. Aplicando la fórmula del enfriamiento:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{ln(\Delta T/\Delta T_0)}{t}$$

$$A = \frac{\ln(29°C/25°C)}{45\text{min}} = 3{,}3\text{x}10^{-3}/\text{min}$$

El instante t para el cual $\Delta T = 14°C - (-7°C) = 21°C$ será:

$$t = \frac{ln(\Delta T_0/\Delta T)}{A} = \frac{ln(29°C/21°C)}{3{,}3\text{x}10^{-3}/\text{min}} = 98\text{min}$$

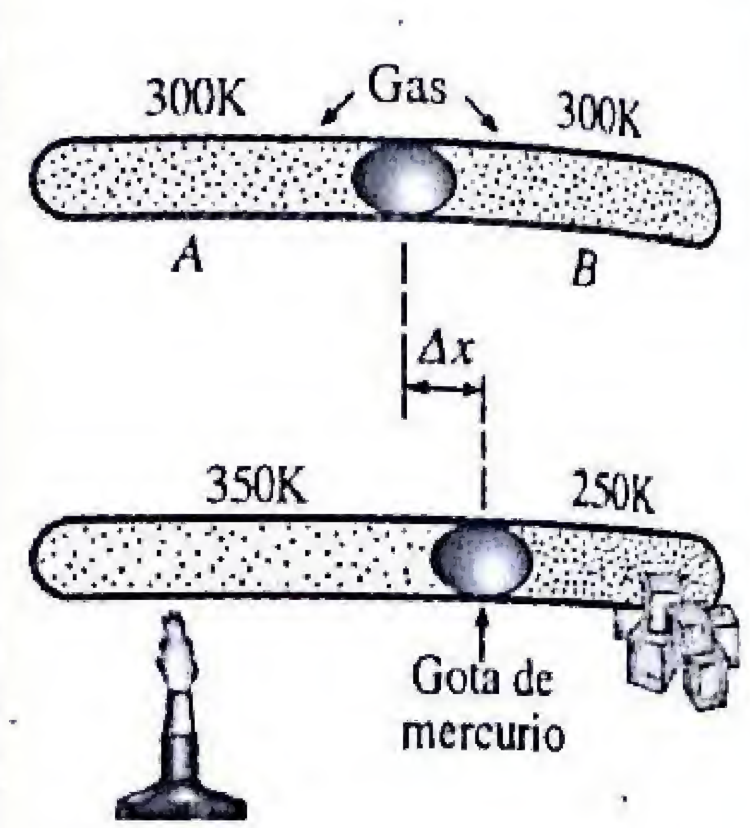
Es decir, 98 minutos después de haberse apagado la calefacción se alcanza la temperatura de 14 ℃.

Respuesta:

$$\boxed{t = 98 \text{ minutos}}$$

PR-3.06. *Un gas separado por una gota de mercurio*

En un tubo cerrado de área transversal $S = 0.1\ \text{cm}^2$ existe un gas ideal que se encuentra separado en dos compartimientos A y B por una gota de mercurio. Inicialmente, cuando la temperatura en ambas secciones es 300 K, la gota de mercurio está en el centro del tubo, siendo ambos volúmenes iguales a $V_0 = 3\ \text{cm}^3$. Si se calienta la sección A hasta 350 K y se enfría la sección B hasta 250 K, ¿Cuál será el desplazamiento Δx de la gota?



Solución. El número de moles a ambos lados de la gota se conserva ($n_A = n_B = n$) y el volumen (ΔV) que gana el gas calentado es el mismo que pierde el gas enfriado. Al establecerse el equilibrio, las presiones en los dos compartimientos son iguales $P_A = P_B$. Aplicamos la ecuación de estado del gas ideal: $PV = nRT$, se tiene:

$$\frac{V_A}{nRT_A} = \frac{V_B}{nRT_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0 + \Delta V}{nRT_A} = \frac{V_0 - \Delta V}{nRT_B}$$

Despejando el cambio de volumen ΔV:

$$(V_0 + \Delta V)T_B = (V_0 - \Delta V)T_A \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \left(\frac{T_A - T_B}{T_A + T_B}\right)V_0$$

Si A es el área entonces $\Delta V = A\Delta x$, por lo tanto el desplazamiento de la gota será:

$$\Delta x = \frac{V_0}{A}\left(\frac{T_A - T_B}{T_A + T_B}\right) = \frac{3\text{cm}^3}{0{,}1\text{cm}^2}\left(\frac{350\text{K} - 250\text{K}}{350\text{K} + 250\text{K}}\right) = 5\text{cm}$$

Respuesta:

$\boxed{\Delta x = 5\ \text{cm}}$

PR-3.07. *Es bueno revisar el aire de los neumáticos*

Una mañana cuando la temperatura ambiente es de 15 °C, se llena un neumático con aire hasta una presión manométrica de 28 psi (193 kPa). Luego, después de un largo recorrido la temperatura se eleva hasta 40 °C.

a) ¿Cuál es la presión dentro de la llanta?

b) ¿Qué fracción del aire original debe quitarse para mantener la presión original?

Solución. a) Aplicando la ecuación de estado de un gas ideal $PV = nRT$, y como el volumen permanece constante, se tiene:

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1} = \frac{nR}{V} = \text{constante}$$

La presión inicial dada es la manométrica y para obtener la presión absoluta debemos añadir la presión atmosférica: $P_1 = 193\text{kPa} + 101\text{kPa} = 294\text{kPa}$. La presión final es:

$$P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1 = \left(\frac{40°\text{C} + 273°\text{C}}{15°\text{C} + 273°\text{C}}\right)294\text{kPa} = 320\text{kPa}$$

Restando la presión atmosférica encontramos que la presión manométrica es: $320\text{kPa} - 101\text{kPa} = 219\text{kPa}$.

b) El volumen de aire final es:

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1 = \left(\frac{40°\text{C} + 273°\text{C}}{15°\text{C} + 273°\text{C}}\right)V_1 = 1{,}087V_1$$

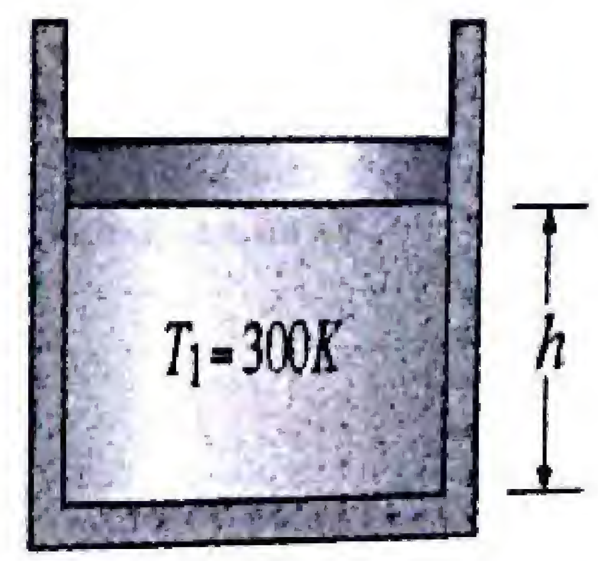
Esto significa que para mantener el volumen inicial, se debe remover 8,7% de V_1.

Respuesta:

a) $P_2 = 219\text{kPa}$
(Presión manométrica final)
b) Remover 8,7% de V_1

PR-3.08. *Calentamiento de un gas sin que se expanda*

En un cilindro vertical hay $n = 0{,}5$ moles de un gas que está sellado por un pistón móvil de área $A = 80\ \text{cm}^2$, el cual está expuesto a la presión atmosférica. Cuando el gas es calentado desde una temperatura $T_1 = 300K$ hasta una temperatura $T_2 = 360K$, al mismo tiempo se dejan caer granitos de arena encima del pistón para evitar que este se desplace. Si durante el proceso se ha colocado una masa total de arena $m = 0{,}5$ kg, ¿cuál es el volumen del gas?

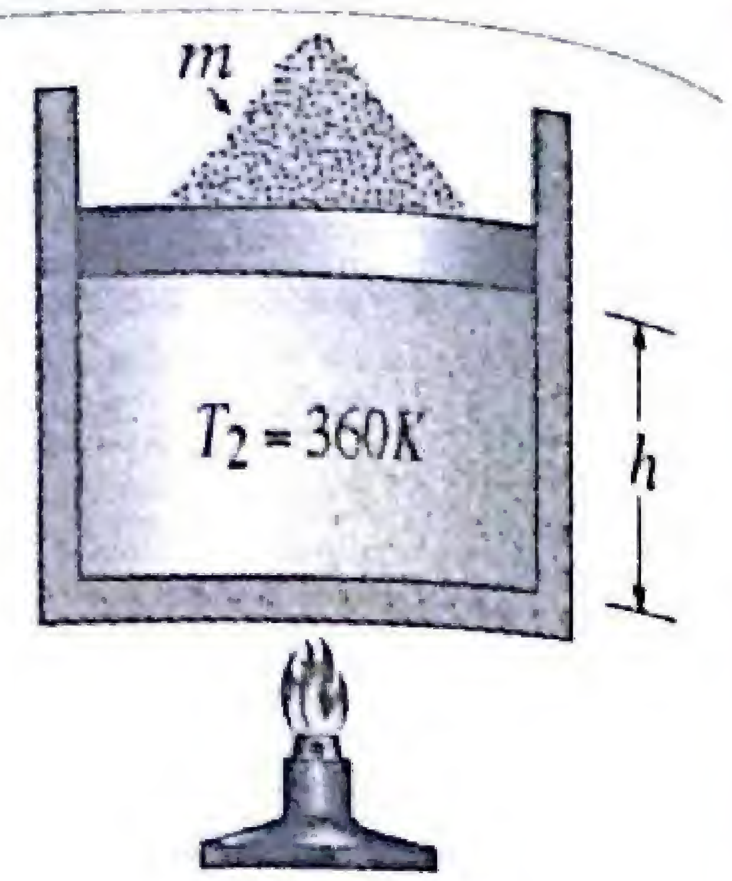


Solución. Los estados inicial y final del gas están descritos por la ecuación del gas ideal:

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{y} \quad P_2V_2 = nRT_2$$

Siendo los volúmenes iguales: $V_1 = V_2 = V$. Las presiones inicial y final del gas están relacionadas:

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$



Sustituyendo las expresiones para las presiones:

$$\frac{nRT_2}{V} = \frac{nRT_1}{V} + \frac{mg}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{nR}{V}(T_2 - T_1) = \frac{mg}{A}$$

Despejando, se obtiene el volumen final del gas:

$$V = \frac{nRA(T_2 - T_1)}{mg}$$

$$V = \frac{(0{,}5\text{mol})(8{,}314\text{J/mol.K})(8\text{x}10^{-3}\text{m}^2)(360\text{K} - 300\text{K})}{(0{,}5\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}$$

$$V = 0{,}407\text{m}^3$$

Respuesta:

$$\boxed{V = \frac{nRA(T_2 - T_1)}{mg} = 0{,}407\text{m}^3}$$

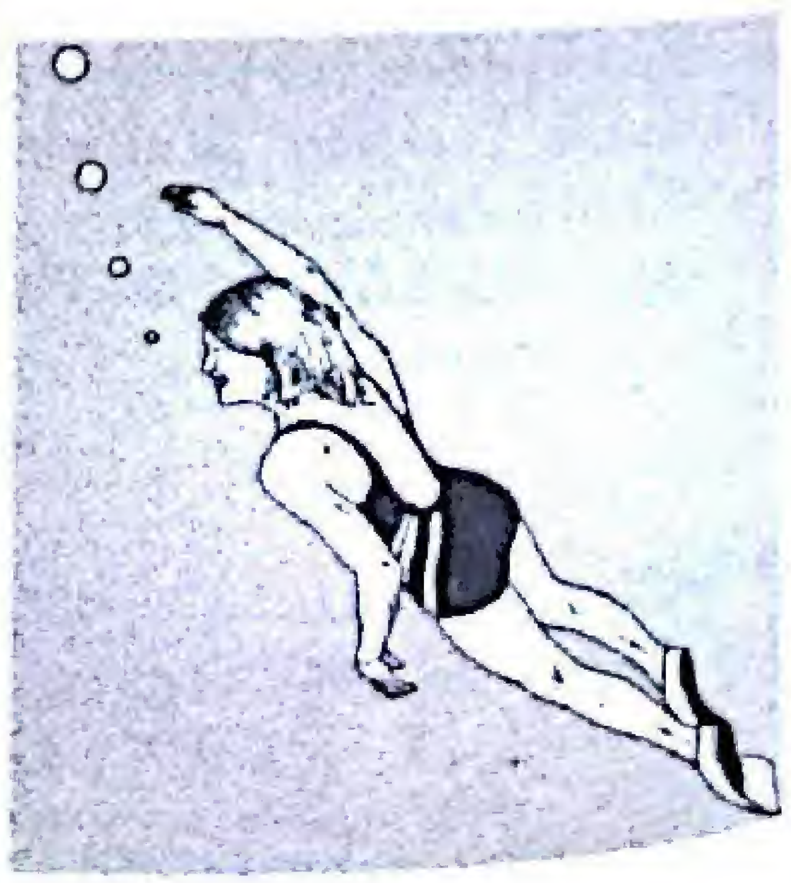
PR-3.09. *Las burbujas crecen al ascender en el agua*

Una burbuja de aire se origina en el fondo del mar a una profundidad h = 16 m. Inicialmente la burbuja tiene un volumen V_0 = 1 cm^3 y a medida que asciende su volumen va incrementándose. Si la temperatura en el fondo es 15,6 ºC y en la superficie del agua es 27 ºC, ¿cuál será el volumen de esta burbuja en el momento justo antes que alcance la superficie?

Agua de mar:
$\rho = 1025$ kg/m^3

Solución. Suponiendo que el aire en la burbuja se comporta como un gas ideal ($PV = nRT$), entonces se cumple:

$$n = \frac{P_iV_i}{RT_i} = \frac{P_fV_f}{RT_f} = \text{constante}$$



Donde el subíndice i se refiere a los valores iniciales y el subíndice f se refiere a los valores finales de presión, volumen y temperatura. La presión inicial a la profundidad h viene dada por:

$$P_i = P_0 + \rho g h$$

Donde P_0 es la presión en la superficie (presión atmosférica) y ρ la densidad del agua. Sustituyendo P_i en la expresión anterior y despejando V_f, se obtiene:

$$V_f = \frac{T_f}{T_i}\frac{P_i}{P_f}V_i = \frac{T_f}{T_i}\left(\frac{P_0 + \rho g h}{P_0}\right)V_i$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos el volumen final de la burbuja al llegar a la superficie:

$$V_f = \frac{(273+27)}{(273+15{,}6)}\left(\frac{1{,}01\text{x}10^5 + (1025)(9{,}8)(16)}{1{,}01\text{x}10^5}\right)(1\text{cm}^3)$$

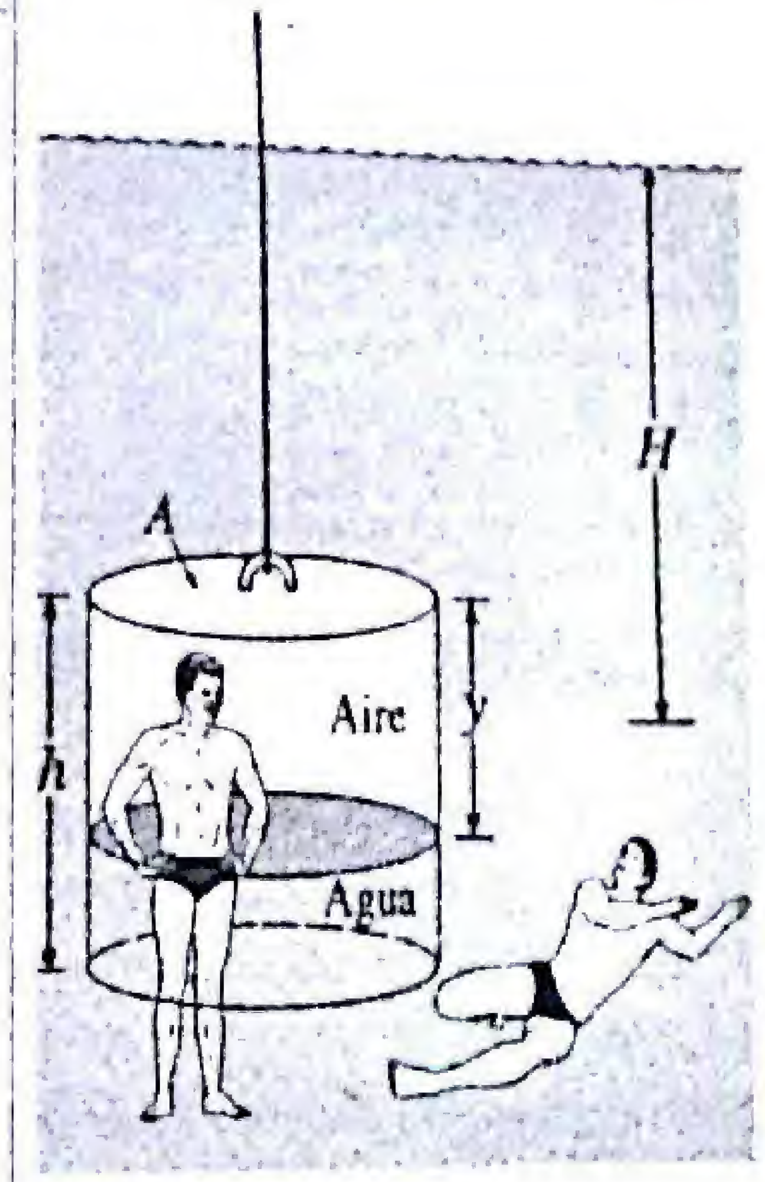
$$V_f = 2{,}69\text{cm}^3$$

Respuesta:

$$\boxed{V_f = 2{,}69\text{cm}^3}$$

PR-3.10. *La campana de buceo*

En la antigüedad, los buzos utilizaban una campana que consistía de un pesado recipiente metálico que se colocaba invertido en el agua. A medida que la campana se hunde, el aire atrapado en su interior se comprime impidiendo que el agua penetre. El buzo se puede acomodar y desde allí realizar salidas al fondo del mar y luego volver para respirar. Suponga que la campana es un cilindro de altura h = 2 m, que inicialmente se encuentra en la superficie del mar a la presión atmosférica y a la temperatura ambiente T_1 = 27 ºC. Si la campana se sumerge hasta una profundidad H = 15 m, donde la temperatura es T_2 = 7 ºC, ¿hasta qué altura y por debajo del tope de la campana penetrará el nivel del agua?



Solución. Suponemos que el aire atrapado en la campana se comporta como un gas ideal ($PV = nRT$), entonces se cumple:

$$n = \frac{P_1V_1}{RT_1} = \frac{P_2V_2}{RT_2} = \text{constante}$$

Inicialmente el volumen de aire en la campana cuando está en la superficie es: $V_1 = Ah$ y finalmente cuando está en el fondo es: $V_2 = Ay$, siendo A el área del cilindro. Sustituyendo en la relación anterior:

$$\frac{P_1Ah}{T_1} = \frac{P_2Ay}{T_2} \qquad y = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{P_1}{P_2}\right)h$$

La presión inicial del aire de la campana es la presión atmosférica ($P_1 = P_{atm}$), mientras que la presión P_2 a la profundidad H es:

$$P_2 = P_1 + \rho g H = P_{atm} + \rho g H$$

Agua de mar:
$\rho = 1025$ kg/m³

Por lo tanto:

$$y = (\frac{T_2}{T_1})(\frac{P_{atm}}{P_{atm} + \rho g H})h$$

Reemplazando los valores numéricos, tenemos:

$$y = (\frac{273+7}{273+27})(\frac{1{,}01\text{x}10^5}{1{,}01\text{x}10^5 + (1025)(9{,}8)(15)})(2\text{m})$$

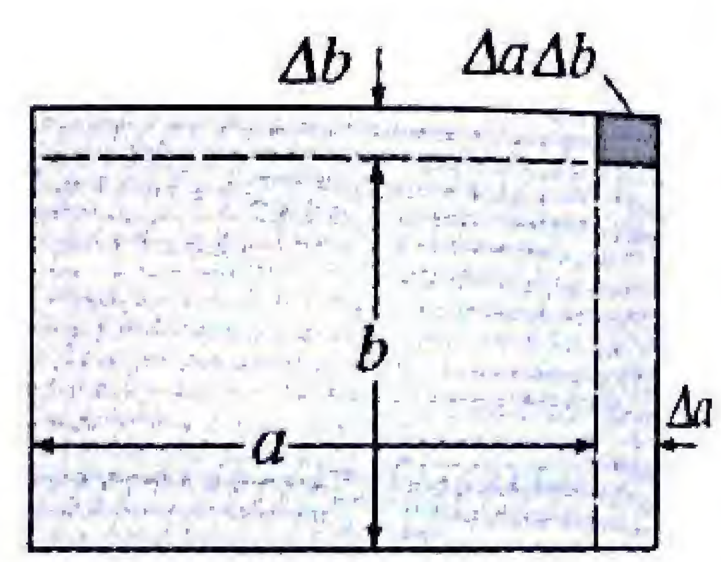
$$y = 0{,}75\text{m}$$

Respuesta:

$\boxed{y = 0{,}75\text{m}}$

Si se desea descomprimir la campana, habría que extraer aire mediante una manguera conectada a una bomba desde afuera.

PR-3.11. *Dilataciones superficial y lineal relacionadas*



El área de una placa rectangular es: $A = ab$. Su coeficiente de dilatación lineal es α. Después de un aumento de temperatura ΔT, el lado a es mas largo en Δa y el lado b es mas largo en Δb. Demuestre que con una buena aproximación, el cambio en el área superficial es:

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T$$

Solución. Bajo un incremento de temperatura el aumento en el área es:

$$\Delta A = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b$$

Donde:

$$\Delta a = a\alpha\Delta T \qquad \Delta b = b\alpha\Delta T$$

Sustituyendo estas expresiones para las dilataciones lineales, se tiene:

$$\Delta A = ba\alpha\Delta T + ab\alpha\Delta T + ab(\alpha\Delta T)^2$$

$$\Delta A = 2A\alpha\Delta T + A(\alpha\Delta T)^2 = 2A\alpha\Delta T(1 + \frac{\alpha\Delta T}{2})$$

Para los sólidos los valores de α son tan pequeños ($\alpha \approx 10^{-6}$), que en la práctica se cumple $\alpha\Delta T << 1$ y este término lo podemos despreciar. Por lo tanto:

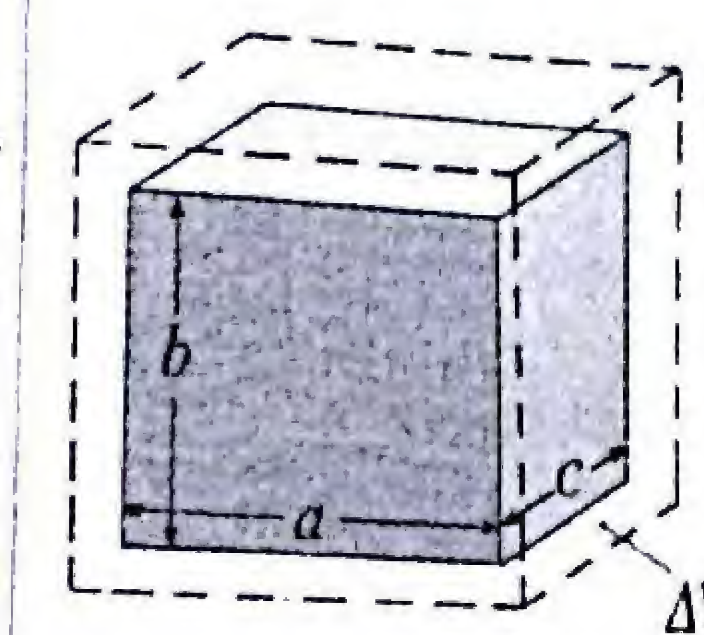
$$\Delta A = 2\alpha A\Delta T$$

Queda demostrado que el valor del coeficiente térmico de dilatación superficial es el doble que el correspondiente a la dilatación lineal α.

Respuesta:

$\boxed{\Delta A = 2\alpha A\Delta T}$

PR-3.12. *Dilataciones cúbica y lineal relacionadas*



Demuestre que el cambio de volumen de un sólido después de un aumento de temperatura ΔT, si despreciamos cantidades extremadamente pequeñas está dado por:

$$\Delta V = 3\alpha V\Delta T$$

Solución. Si el volumen inicial a la temperatura T es $V = abc$, a la temperatura ($T + \Delta T$) el volumen vale:

$$V + \Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)$$

$$= (a + a\alpha\Delta T)(b + b\alpha\Delta T)(c + c\alpha\Delta T)$$

$$V + \Delta V = abc(1 + \alpha\Delta T)^3$$

Por lo tanto:

$$\Delta V = V[\,3\alpha\Delta T + 3(\alpha\Delta T)^2 + (\alpha\Delta T)^3\,]$$

Tomando en cuenta que $\alpha\Delta T << 1$ podemos despreciar los términos cuadrático y cúbico, y se obtiene:

$$\Delta V = 3\alpha V\Delta T$$

Esto es equivalente a obtener el coeficiente de dilatación cúbica, por un paso al límite:

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} (\frac{\Delta V / V}{\Delta T}) = \lim_{\Delta T \to 0} [\,3\alpha + 3\alpha^2\Delta T + \alpha^3\Delta T^2\,] = 3\alpha$$

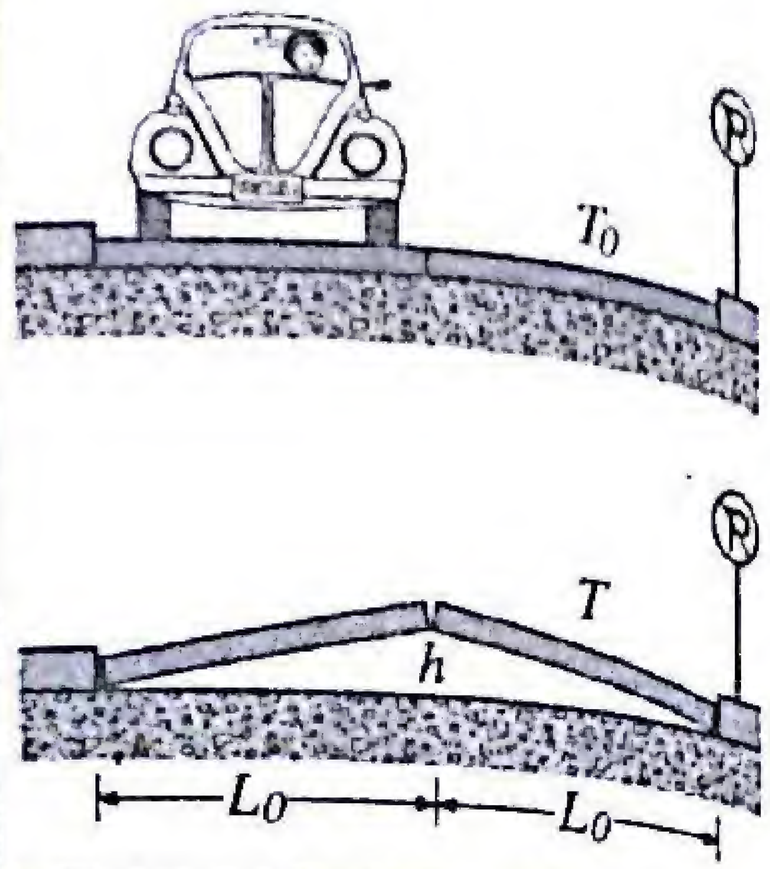
Respuesta:

$\boxed{\Delta V = 3\alpha V\Delta T}$

Es decir, para un material dado el coeficiente de dilatación cúbica es el triple que el de dilatación lineal α.

PR-3.13. *Placas de concreto sin junta de dilatación*

Las placas de concreto de una calle fueron construidas sin tomar la previsión de dejar un espacio entre ellas que permitiera la libre expansión (junta de dilatación). El ancho inicial de cada placa es $L_0 = 5$ m y el concreto fue vaciado y curado cuando la temperatura ambiente era de 10 °C. Suponiendo que la acera lateral permanece rígida, ¿a qué altura h subirán las puntas de las placas cuando la temperatura ambiente se eleve hasta 40°C.?



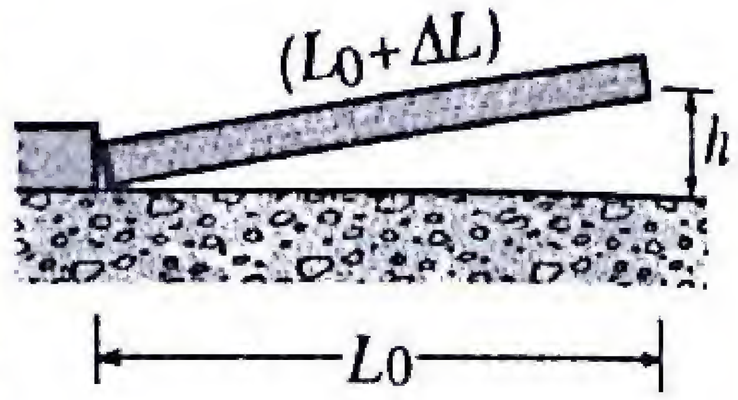
Coeficiente de dilatación del concreto: $\alpha = 10^{-5}/°C$

Solución. Una placa en posición original (longitud L_0) forma con su nueva posición (longitud $L_0 + \Delta L$) y la elevación h, los lados de un triángulo rectángulo que están relacionados por el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(L_0 + \Delta L)^2 - L_0^2}$$

$$h = \sqrt{L_0^2 + 2L_0\Delta L + \Delta L^2 - L_0^2}$$

$$h = \sqrt{2L_0\Delta L + \Delta L^2} \approx \sqrt{2L_0\Delta L} \quad (\text{ya que } \Delta L^2 << 2L_0\Delta L)$$



Por otra parte, el cambio de longitud por expansión térmica es:

$$\Delta L = L_0\alpha\Delta T$$

Sustituyendo ΔL en la expresión anterior se tiene:

$$h \approx \sqrt{2L_0(L_0\alpha\Delta T)} = L_0\sqrt{2\alpha(T - T_0)}$$

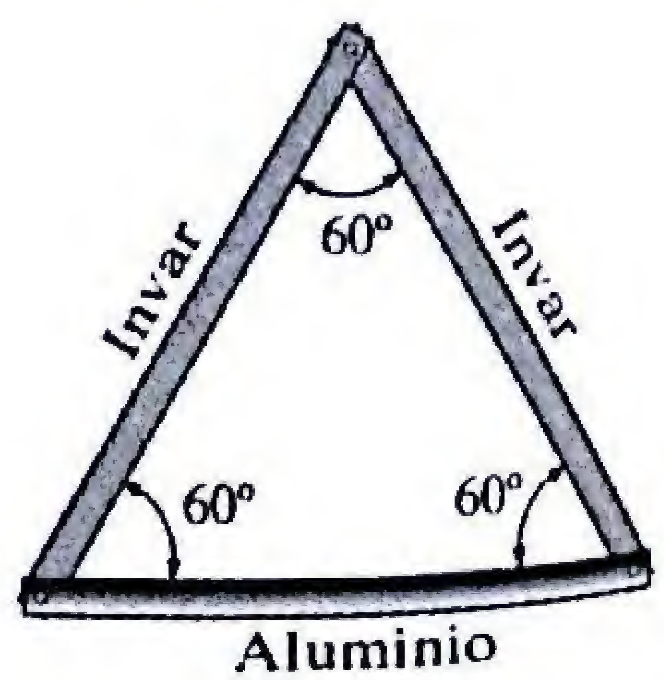
$$h = (5\text{m})\sqrt{2(10^{-5}/°C)(40°C - 10°C)} = 12{,}2\text{cm}$$

Respuesta:

$\boxed{h = 12{,}2 \text{ cm}}$

PR-3.14. *Barras en un triángulo en expansión*

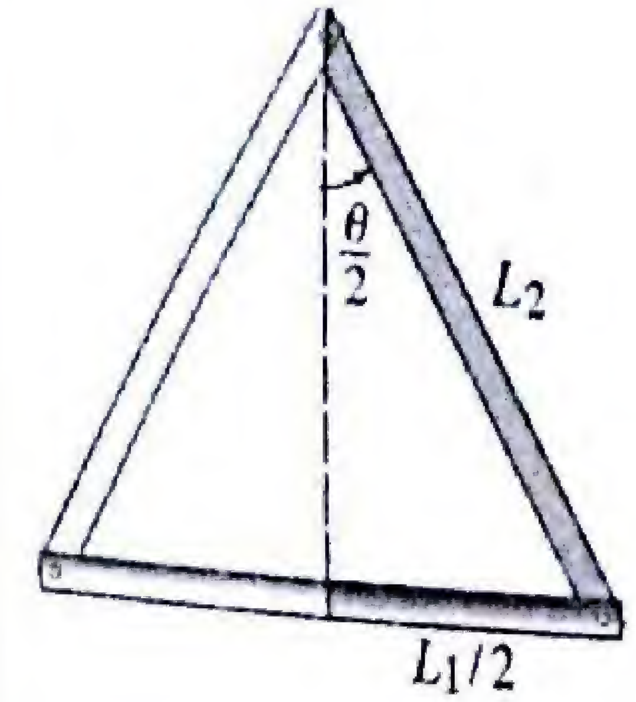
Tres barras de igual longitud inicial a la temperatura de 0°C están unidas por remaches en sus extremos, formando un triángulo equilátero. Una de las barras es de aluminio (α_1 =24x10^{-6} °C^{-1}) y las otras dos son de Invar, una aleación Ni-Fe, (α_2 = 9x10^{-7} °C^{-1}). ¿Cuál será el nuevo ángulo θ formado entre las dos barras de invar, cuando se eleva la temperatura hasta 100 °C ?



Solución. Si L es la longitud original de cada barra, al calentarlas las longitudes finales serán:

Aluminio: $L_1 = L(1 + \alpha_1\Delta T)$

Invar: $L_2 = L(1 + \alpha_2\Delta T)$



Considerando el nuevo triángulo que forman las barras, las longitudes L_1 y L_2 están relacionadas con el ángulo θ:

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{L_1/2}{L_2}$$

Sustituyendo las expresiones de L_1 y L_2, encontramos θ:

$$\theta = 2arcsen(\frac{L_1}{2L_2}) = 2arcsen[\frac{1 + \alpha_1\Delta T}{2(1 + \alpha_2\Delta T)}]$$

Reemplazando los valores numéricos en esta expresión, encontramos el nuevo ángulo que forman las dos barras de Invar:

$$\theta = 2arcsen\frac{(1 + 24x10^{-6}/°C)(100 - 0°C)}{2(1 + 9x10^{-7}/°C)(100 - 0°C)} = 60{,}1°C$$

Respuesta:

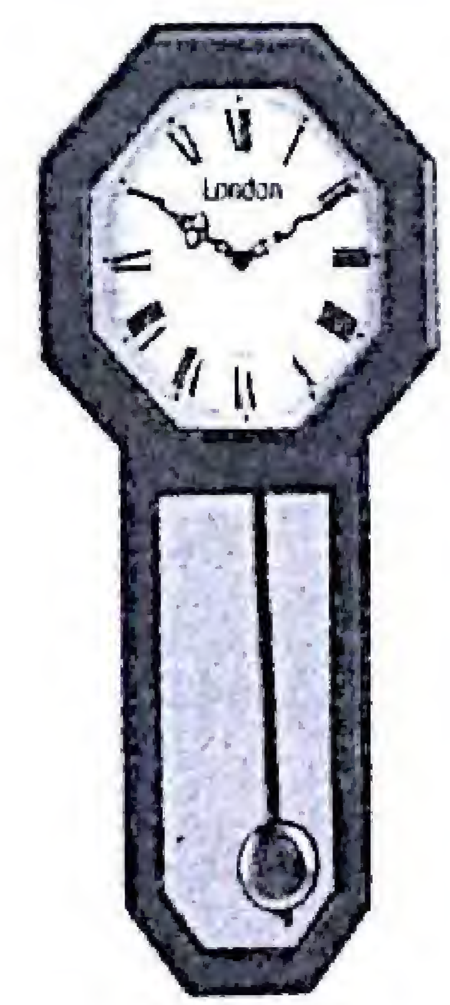
$\boxed{\theta = 60{,}1°}$

PR-3.15. *¿Se adelanta o se atrasa ese reloj de péndulo?*

Una barra delgada y liviana que soporta un peso mucho mas grande que su propio peso y concentrado en en extremo, es una buena aproximación a un péndulo simple. Suponga un reloj de péndulo metálico de coeficiente de dilatación lineal α = 16x10^{-6} °C^{-1}, que tiene un período de un segundo cuando la temperatura ambiente es 20°C.

a) ¿ En cuánto cambiará su período cuando la temperatura se eleve a 40 °C ?

b) ¿Cuánto tiempo ganará o perderá el reloj en el transcurso de una semana?



Solución. a) El período P de un péndulo simple depende únicamente de su longitud L y de la aceleración de gravedad g:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si se incrementa la temperatura en ΔT, la varilla se dilata y su nueva longitud será:

$$L = L_0(1+\alpha\Delta T)$$

Reemplazando, esta expresión en la expresión del período del péndulo, se obtiene:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L_0(1+\alpha\Delta T)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}\sqrt{1+\alpha\Delta T} \cong P_0(1+\frac{1}{2}\alpha\Delta T)$$

Siendo P_0 el período inicial del péndulo. Hemos hecho la aproximación binomial:

$$(1+x)^{1/2} \cong 1 + x/2 \qquad \text{para } x = \alpha\Delta T << 1$$

La variación del período será:

$$\Delta P = P - P_0 = P_0(1+\frac{1}{2}\alpha\Delta T) - P_0 = \frac{1}{2}\alpha\Delta T P_0$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$\Delta P = \frac{1}{2}(16\text{x}10^{-6}/°\text{C})(40-20°\text{C})(1\text{s}) = 1{,}6\text{x}10^{-4}\text{s}$$

b) A la temperatura T = 20 °C el número de oscilaciones en una semana es:

$$N_0 = (7\text{dias}\text{x}24\frac{\text{hor}}{\text{dia}}\text{x}60\frac{\text{min}}{\text{hor}}\text{x}60\frac{\text{seg}}{\text{min}})/1\frac{\text{seg}}{\text{osc}} = 604800$$

Mientras que a T = 40 °C el número de oscilaciones será:

$$N = (7\text{dias}\text{x}24\frac{\text{hor}}{\text{dia}}\text{x}60\frac{\text{min}}{\text{hor}}\text{x}60\frac{\text{seg}}{\text{min}})/1{,}00016\frac{\text{seg}}{\text{osc}} = 604703$$

La diferencia en el número de oscilaciones es:

$$\Delta N = N - N_0 = 604703 - 604800 = -97 \text{ oscilaciones}$$

Por lo tanto, encontramos que cada semana este reloj *pierde* 97 segundos.

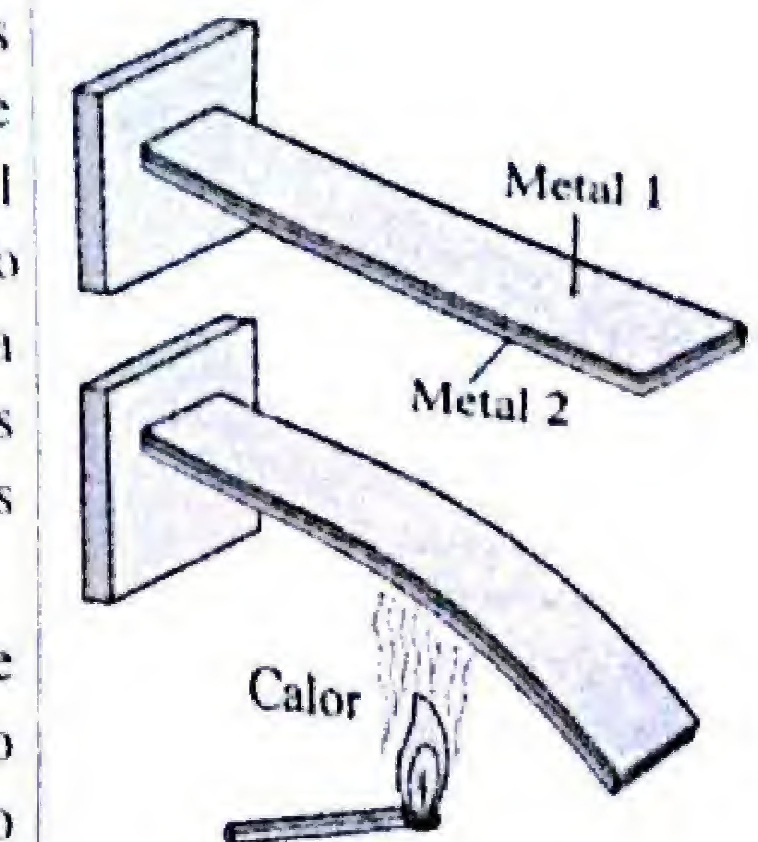
Respuesta:

a) $\Delta P = 0{,}00016$ s
b) Se retrasa en 97 s

PR-3.16. *Cinta bimetálica para control de temperatura*

Una barra bimetálica está formada por dos metales distintos, de igual longitud L y espesor b, que se encuentran unidos. Al calentarlo, el metal que tiene el mayor coeficiente α, se dilata más que el otro, haciendo que la barra tome la forma de un arco. Deduzca una expresión para el radio de curvatura medio en términos del cambio de temperatura ΔT, del espesor b y de los coeficientes de dilatación α_1 y α_2.

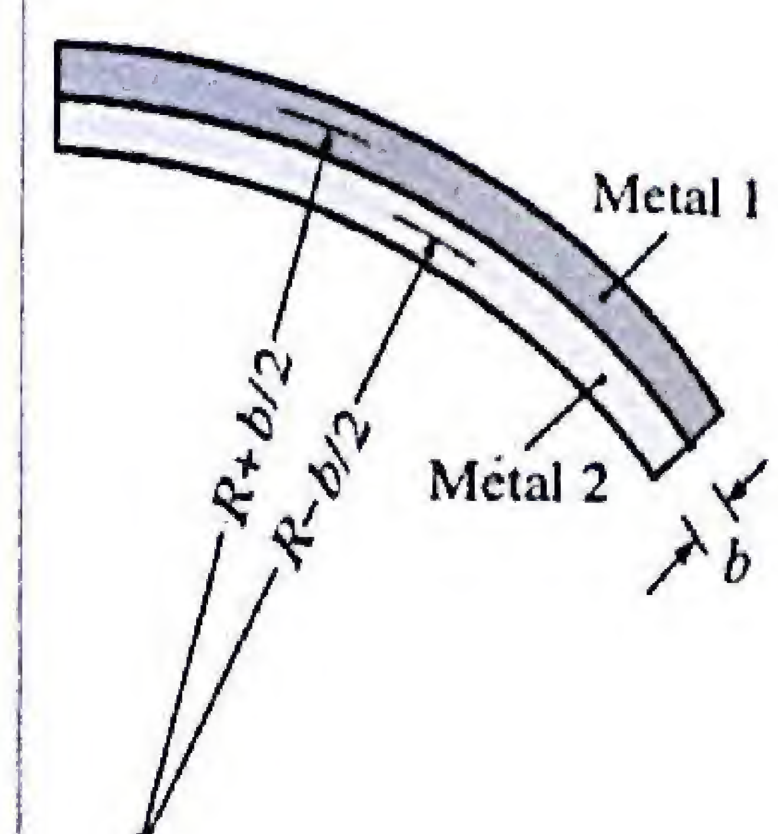
Este dispositivo suele usarse como *termostato* ya que permite activar o desactivar un aparato eléctrico, cuando la temperatura varía. Por ejemplo, para cerrar el circuito eléctrico en las alarmas de incendio.



Solución. Suponiendo que $\alpha_1 > \alpha_2$, las longitudes y radios de curvatura finales de las tiras serán, respectivamente:

$$L_1 = L_0(1+\alpha_1\Delta T) \qquad r_1 = R + b/2$$

$$L_2 = L_0(1+\alpha_2\Delta T) \qquad r_2 = R - b/2$$



Siendo R el radio medio de la unión bimetálica. Como las tiras son solidarias, abarcan un ángulo θ común:

$$\theta = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}} = \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$$

Reemplazando los valores de L y de r, se tiene:

$$\frac{L_0(1+\alpha_1\Delta T)}{R+b/2} = \frac{L_0(1+\alpha_2\Delta T)}{R-b/2}$$

$$(1+\alpha_1\Delta T)(R-b/2) = (1+\alpha_2\Delta T)(R+b/2)$$

Despejando, obtenemos el radio de curvatura medio:

$$R = \frac{b}{2}\left[\frac{2+(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T}{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}\right]$$

Observe que, de acuerdo a este resultado:

a) Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces $R \to \infty$ (la barra no se dobla)

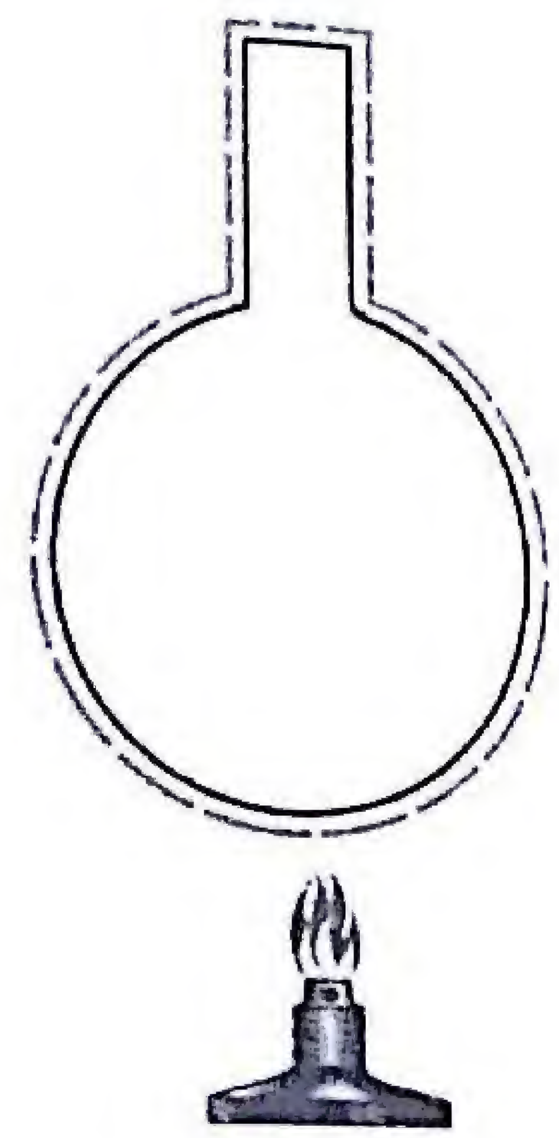
b) Si $\alpha_2 > \alpha_1$ entonces $R < 0$ (la concavidad se invierte)

Respuesta

$$R = \frac{b}{2}\left[\frac{2+(\alpha_1+\alpha_2)\Delta T}{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}\right]$$

PR-3.17. *Derrame de agua de un frasco al calentarlo*

Un frasco de vidrio Pyrex, cuyo coeficiente de expansión lineal es $\alpha = 3\text{x}10^{-6}$ /°C, contiene un litro de agua (coeficiente de expansión volumétrica $\beta = 21\text{x}10^{-5}$/°C). El nivel del agua llega justamente al borde del frasco cuando la temperatura es 20 °C. ¿Qué cantidad de agua se derrama si se eleva la temperatura a 38 °C?



Solución. A medida que el vidrio se expande, el volumen encerrado por el frasco aumenta de la misma manera que si el hueco fuera un cuerpo sólido hecho del mismo material. Por lo tanto, el aumento de volumen "interno" del frasco de vidrio es:

$$\Delta V_v = V_o(3\alpha)\,\Delta T$$

Por otra parte, el aumento de volumen del agua es:

$$\Delta V_a = V_o\beta\,\Delta T$$

El volumen de agua que se derrama es justamente la diferencia entre estas dos cantidades:

$$V_{derr} = \Delta V_a - \Delta V_v = V_o(\beta - 3\alpha)\Delta T$$

Reemplazando los valores numéricos, encontramos:

$$V_{derr} = (1l)[(21\text{x}10^{-5}/°\text{C}) - 3(3\text{x}10^{-6}/°\text{C})](38°\text{C} - 20°\text{C})$$

$$V_{derr} = 3{,}62\text{ml}$$

Respuesta

$$\boxed{V_{derr} = 3{,}62\text{ml}}$$

PR-3.18. *La arandela no entra en el tornillo*

Sean un tornillo de bronce que tiene un diámetro exterior de 3,002 cm y una arandela de acero que tiene un diámetro interior de 3,000 cm, ambos a la temperatura de 20 °C.

a) ¿A qué temperatura habría que calentar la arandela para insertarla en el tornillo?

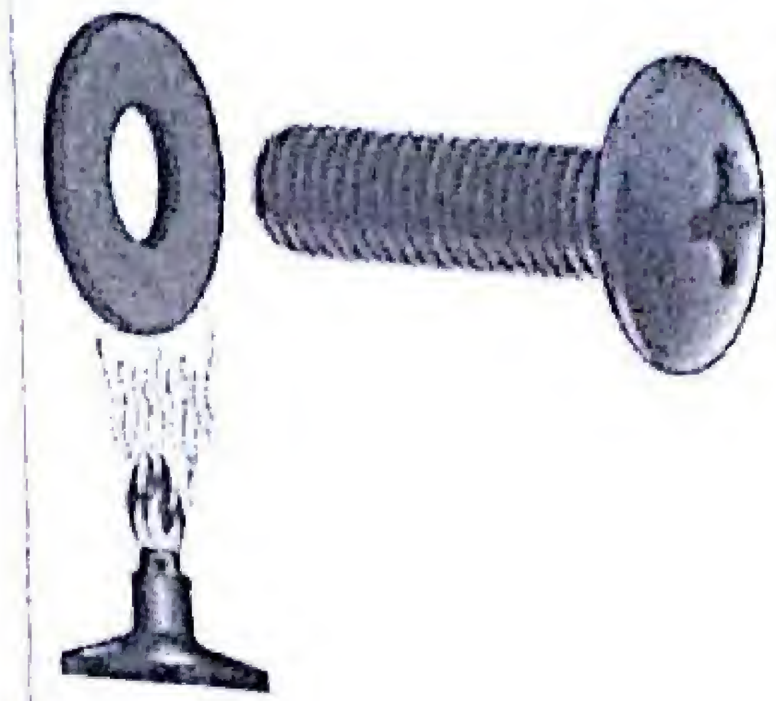
b) Suponga que se desea sacar la arandela del tornillo, ambos inicialmente a 20 °C, ¿a qué temperatura habrá que enfriarlos?

Bronce: $\alpha_B = 2\text{x}10^{-5}$ /°C

Acero: $\alpha_A = 12\text{x}10^{-6}$/°C

Solución. a) Para insertarla, habría que calentar la arandela hasta provocar un aumento de 0,002 cm en su diámetro interno.

$$\Delta d_A = d_A^0\alpha_A\Delta T$$



Donde d_A^0 es el diámetro inicial. Despejando ΔT tenemos:

$$\Delta T = \frac{\Delta d_A}{d_A^0\alpha_A} = \frac{0{,}002\text{cm}}{(3{,}000\text{cm})(12\text{x}10^{-6}/°\text{C})} = 55{,}6°\text{C}$$

$$T = T_o + \Delta T = 20°\text{C} + 55.6°\text{C} = 75{,}6°\text{C}$$

b) Para sacar la arandela del tornillo hay que enfriarlos hasta que la disminución del diámetro del tornillo exceda a la disminución del diámetro de la arandela, justamente en la cantidad 0,002 cm.

$$\Delta d_B - \Delta d_A = -0{,}002\text{cm}$$

Note que ambos variaciones, Δd_B y Δd_A, son cantidades negativas. Por otra parte:

$$\Delta d_B - \Delta d_A = d_B^0\alpha_B\Delta T - d_A^0\alpha_A\Delta T = d_0(\alpha_B - \alpha_A)\Delta T$$

Donde hemos aproximado $d_0 \approx d_B^0 \approx d_A^0$. Despejando ΔT:

$$\Delta T = \frac{\Delta d_B - \Delta d_A}{d_0(\alpha_B - \alpha_A)}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\Delta T = \frac{-0{,}002\text{cm}}{3{,}000\text{cm}(2\text{x}10^{-5}/°\text{C} - 12\text{x}10^{-6}/°\text{C})} = -83.3\text{cm}$$

$$T = T_o + \Delta T = 20°\text{C} + (-83.3°\text{C}) = -\underline{63.3°\text{C}}$$

Respuesta:

a) $T = 75.6$ °C
b) $T = -63.3$ °C

PR-3.19. *¿Al calentar, se hundirá más el cubo?*

En un recipiente grande que contiene mercurio líquido a 0 °C está flotando un cubo de aluminio de 2 cm de lado. ¿Cuál será el cambio en la profundidad sumergida del cubo si se eleva la temperatura hasta 50 °C?

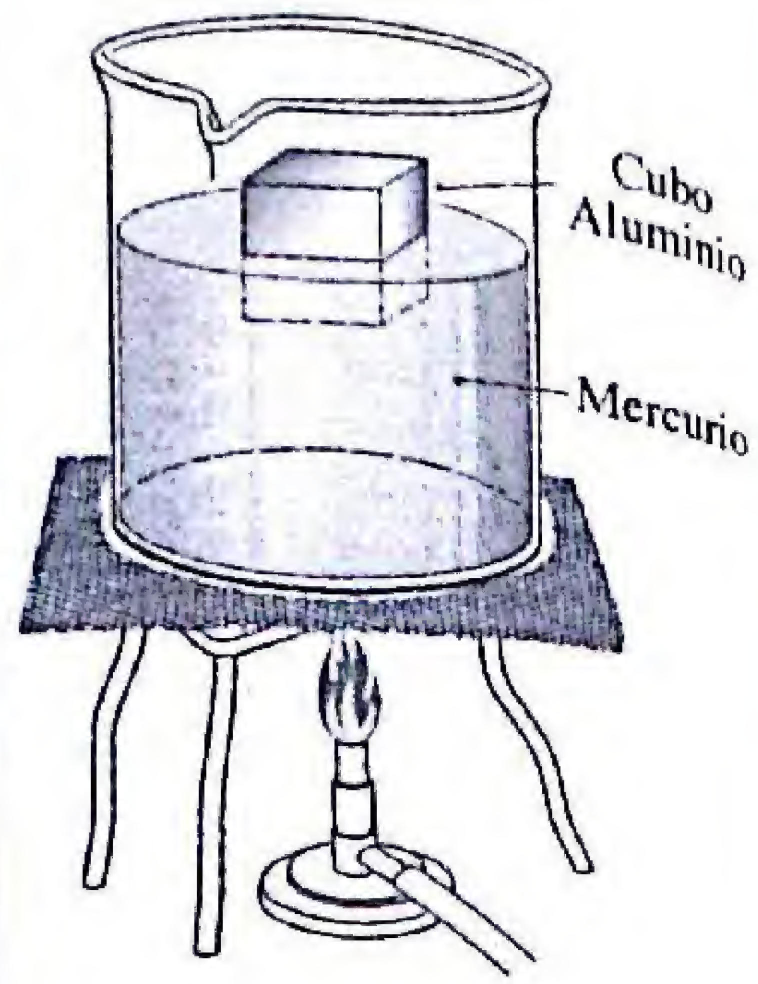
Aluminio: $\rho_a = 2.7\text{x}10^3\text{kg/ m}^3$ $\quad \alpha_a = 23\text{x}10^{-6}/°\text{C}$

Mercurio: $\rho_m = 13.6\text{x}10^3\text{kg/m}^3$ $\quad \beta_m = 1.8\text{x}10^{-4}/°\text{C}$

Solución. a) La fuerza de gravedad sobre el cubo de aluminio es:

$$M_a g = \rho_a V_a g = \rho_a L^3 g$$

donde L es el lado del cubo y ρ_a la densidad del aluminio. La fuerza de empuje del mercurio sobre el cubo es igual al peso del mercurio desalojado:



$$F_e = \rho_m g A h = \rho_m g L^2 h$$

Siendo ρ_m la densidad del mercurio, L^2 el área del cubo y h la profundidad sumergida. Si el cubo está en equilibrio la fuerza de gravedad es igual a la fuerza de empuje, por tanto:

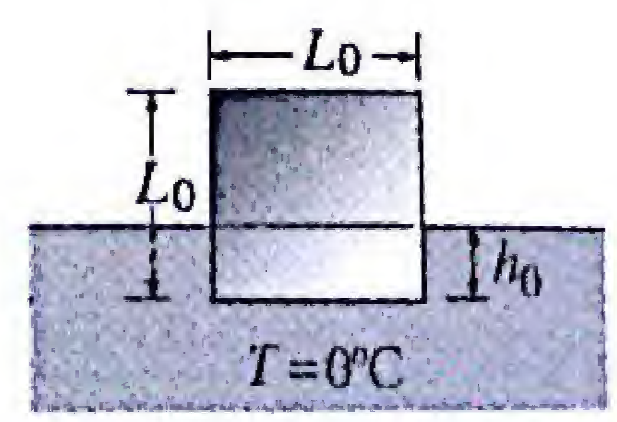
$$\rho_a L^3 g = \rho_m L^2 h g \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\rho_a}{\rho_m} L \qquad (1)$$

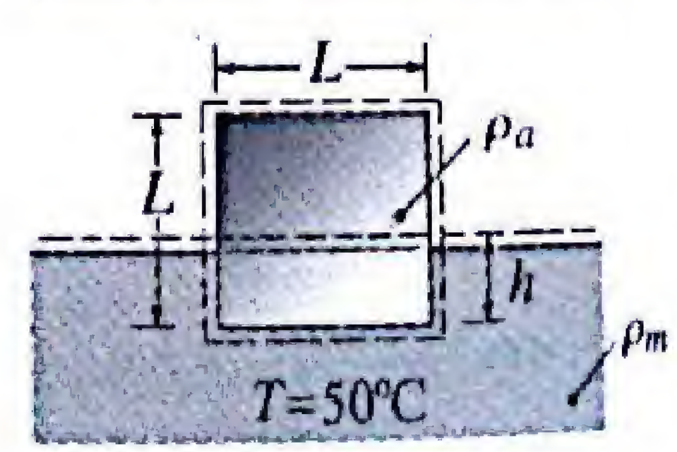
Cuando se eleva la temperatura, las tres cantidades en esta expresión varían. La longitud del cubo aumenta de acuerdo a la relación:

$$L = L_0(1 + \alpha_a \Delta T)$$

Además, como la masa permanece constante pero el volumen varía de la forma: $V = V_0(1 + \beta \Delta T)$, la densidad en función de la temperatura (tanto del mercurio como del aluminio) es:

$$\rho(T) = \frac{M}{V} = \frac{M}{V_0(1 + \beta \Delta T)} = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta T}$$





Siendo $\rho_0 = M / V_0$, la densidad inicial. Reemplazando en la ecuación (1) las expresiones correspondientes de L y $\rho(T)$, tenemos:

$$h = \frac{\rho_a}{\rho_m} L = \frac{\rho_a^0}{\rho_m^0} \left(\frac{1 + \beta_m \Delta T}{1 + 3\alpha_a \Delta T}\right)(1 + \alpha_a \Delta T) L_0$$

Siendo ρ_m^0 y ρ_a^0 las densidades iniciales respectivas del mercurio y del aluminio. Para el aluminio hemos reemplazado el coeficiente volumétrico en términos del coeficiente lineal, $\beta_a = 3\alpha_a$. En la situación inicial a 0 °C, la profundidad sumergida del bloque era:

$$h_0 = \left(\frac{\rho_a^0}{\rho_m^0}\right) L_0 = h_0 = \left(\frac{2{,}7\text{x}10^3 \text{kg/m}^3}{13{,}6\text{x}10^3 \text{kg/m}^3}\right)(2\text{cm}) = 0{,}397 \text{ cm}$$

En la situación final a 50 °C, la profundidad sumergida sería

$$h = \left(\frac{2700}{13600}\right)\left(\frac{1 + 1{,}8x10^{-4}x50}{1 + 3x23x10^{-6}x50}\right)(1 + 23x10^{-6}x50)x2\text{cm}$$

$$h = 0{,}400 \text{ cm}$$

Por lo tanto la variación Δh en la profundidad sumergida del cubo es:

$$\Delta h = h - h_o = 0.400 \text{ cm} - 0.397 \text{ cm} = 0.003 \text{ cm}$$

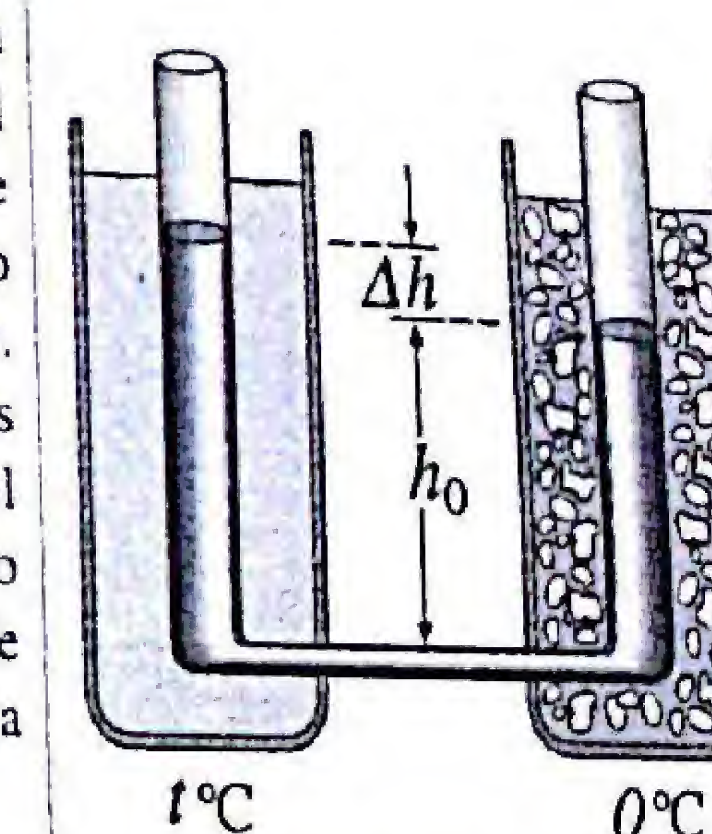
Respuesta:

El cubo se hunde más, en una cantidad: $\Delta h = 0{,}003$ cm

PR-3.20. *Expansión volumétrica de un líquido*

Para determinar el coeficiente de expansión volumétrica de un líquido, hay que tomar en cuenta la expansión del propio recipiente. El *aparato de Dulong y Petit* permite medir el coeficiente de expansión volumétrica verdadero de un líquido, sin necesidad de conocer el del recipiente. El líquido está en dos tubos de vidrio verticales conectados por debajo mediante un tubo horizontal delgado. El tubo de la derecha está rodeado por un baño frío que contiene hielo y agua en equilibrio (0 °C), y, el de la izquierda está rodeado por un baño de agua caliente (a temperatura t °C).

Halle el coeficiente de expansión térmica β en términos de la diferencia de alturas del líquido en las dos columnas, Δh, y de la altura h_0 de la columna a 0° C.



Aparato de Dulong y Petit para medir el coeficiente de expansión volumétrica

Solución. El equilibrio hidrostático en el tubo horizontal implica que las presiones a cada lado son iguales:

$$\rho_t(h_0 + \Delta h)g = \rho_0 h_0 g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_0}{\rho_t} = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0}$$

Siendo ρ_t la densidad del líquido en la columna caliente y ρ_0 la densidad en la columna fría. Para una dada variación de temperatura: $\Delta t = (t - 0°C)$, los volúmenes de una dada masa del líquido están relacionados por:

$$v_t = v_0(1 + \beta t)$$

y como $\rho = m / v$, la relación entre sus densidades es:

$$\rho_0 = \rho_t(1+\beta t)$$

Combinando esta expresión con la anterior, encontramos:

$$\frac{\rho_0}{\rho_t} = (1+\beta t) = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0}$$

Por lo tanto, el coeficiente β de dilatación volumétrica del líquido es:

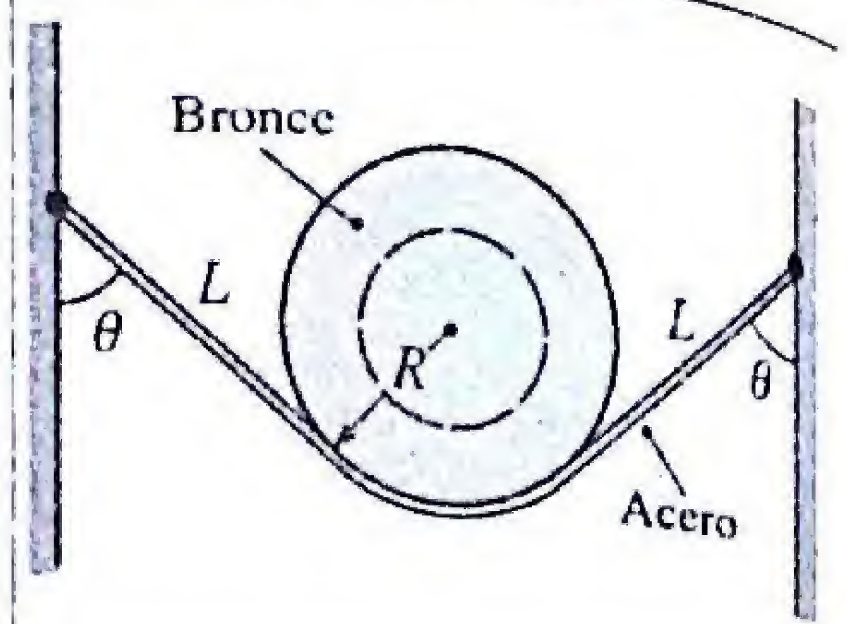
$$\beta = \frac{\Delta h}{h_0 t}$$

Respuesta:

$$\beta = \frac{\Delta h}{h_0 t}$$

PR-3.21. *Cilindro sólido suspendido sobre una cinta*

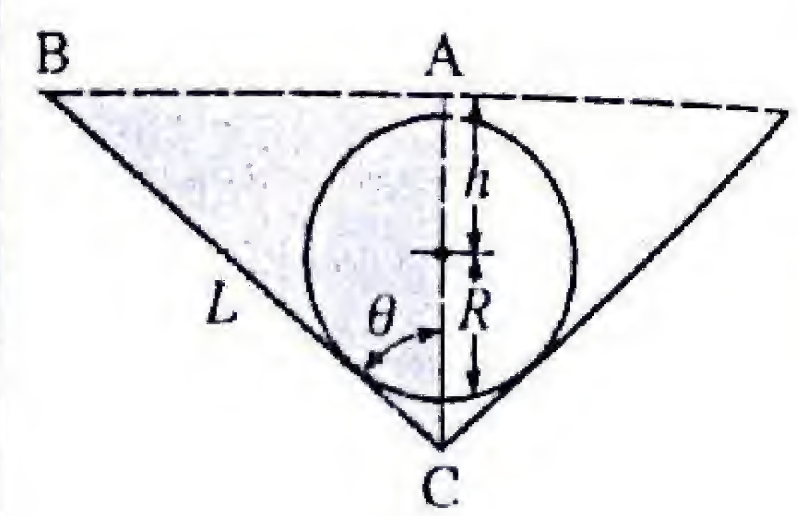
Un cilindro sólido de bronce de radio R, está suspendido sobre una banda flexible de acero. Cuando el sistema está a la temperatura ambiente, la longitud de la cinta es $2L$ = 0,5 m. y el ángulo que forma la cinta con la vertical es θ = 53,1°. Determine el radio del cilindro para que su eje no se desplace por efecto de expansiones o de compresiones térmicas de la banda y del cilindro



Bronce: $\alpha_B = 20\times10^{-6}$ /°C

Acero: $\alpha_A = 12\times10^{-6}$ /°C

Solución: Si consideramos el triángulo rectángulo ABC mostrado en la figura, podemos hacer las siguientes aproximaciones:



$$\overline{AC} = \overline{BC}\cos\theta \cong L\cos\theta \qquad \overline{AC} \cong h + R$$

Por lo tanto, podemos tomar como distancia vertical del centro del cilindro:

$$h = L\cos\theta - R$$

Suponiendo que el ángulo θno varía apreciablemente, para que su eje no se desplace se debe cumplir:

$$\Delta h = \Delta L\cos\theta - \Delta R = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta L\cos\theta = \Delta R$$

$$L\alpha_A \Delta T\cos\theta = R\alpha_B \Delta T$$

Por lo tanto, el radio del cilindro debe ser:

$$R = (\frac{\alpha_A}{\alpha_B})L\cos\theta$$

$$R = (\frac{12\times10^{-6}/°C}{20\times10^{-6}/°C})(0{,}25\text{m})\cos53{,}1° = 0{,}0901\text{m}$$

Respuesta:

$$R = (\frac{\alpha_A}{\alpha_B})L\cos\theta = 0{,}0901\text{m}$$

PR-3.22. *Escape del aire en una habitación*

Un cuarto cuyo volumen es V = 75 m^3 contiene aire a la temperatura T_1 = 7,0 °C. Si la temperatura del cuarto se eleva a T_2 = 27,0 °C, ¿qué masa de aire (en kg) saldrá del cuarto? Suponga que la presión del aire en el cuarto se mantiene constante e igual a la presión atmosférica (P_{atm} = 1,01x10^5 Pa) y tome como masa molar promedio del aire M = 29,0 g/mol.

Solución: Tanto la presión como el volumen se mantienen constantes. Considerando el aire como un gas ideal, para los estados inicial y final tenemos:

$$PV = n_1RT_1 \quad \text{y} \quad PV = n_2RT_2$$

La diferencia entre los números de moles inicial y final es:

$$n_1 - n_2 = \frac{PV}{RT_1} - \frac{PV}{RT_2} = \frac{PV}{R}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})$$

$$T_1 = (273+7)\text{K} = 280\text{K} \quad \text{y} \quad T_2 = (273+27)\text{K} = 300\text{K}$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$n_1 - n_2 = \frac{(1{,}01\times10^5\text{Pa})(75\text{m}^3)}{(8{,}314\text{J/mole.K})}(\frac{1}{280\text{K}} - \frac{1}{300\text{K}})$$

$$\Delta n = n_1 - n_2 = 217 \text{ moles}$$

Por lo tanto, la masa de aire que ha salido del cuarto es:

$$m = \Delta nM = (217\text{moles})(29\text{g/mole}) = 6{,}29\text{kg}$$

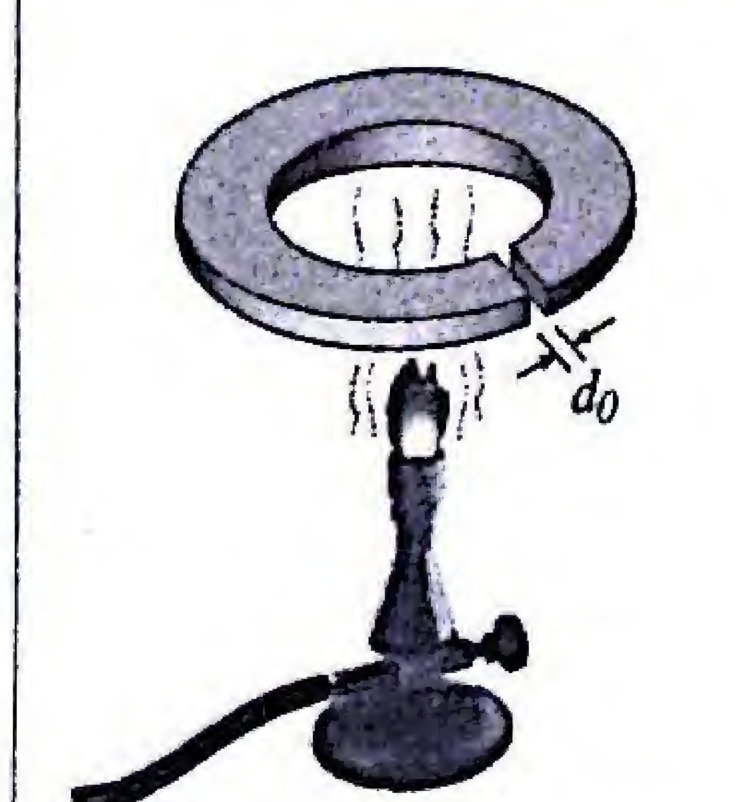
Respuesta::

m = 6,29 kg

PR-3.23. *¿Aumenta o disminuye la abertura del aro?*

Una arandela plana de acero tiene una abertura de ancho d_0 = 8 mm a la temperatura ambiente, T_0 = 27 °C. Si se calienta esta arandela hasta una temperatura T = 595 °C, ¿cuál será el nuevo ancho de la abertura?

Coeficiente de dilatación lineal del acero: $\alpha_a = 11\times10^{-6}$/°C



Solución: La abertura aumenta linealmente con la temperatura, de la misma manera que lo haría el pedazo de material que falta. El incremento en la separación es:

$$\Delta d = \alpha_a d_0 (T - T_0)$$

$$\Delta d = (11x10^{-6}/^{o}C)(8mm)(595°C - 27°C) = 0{,}05\ mm$$

El nuevo ancho de la abertura es:

$$d = d_0 + \Delta d = 8mm + 0{,}05mm = 8{,}05mm$$

Respuesta:

$$\boxed{d = 8.05\ mm}$$

PR-3.24. *¿Cómo asciende un globo de aire caliente?*

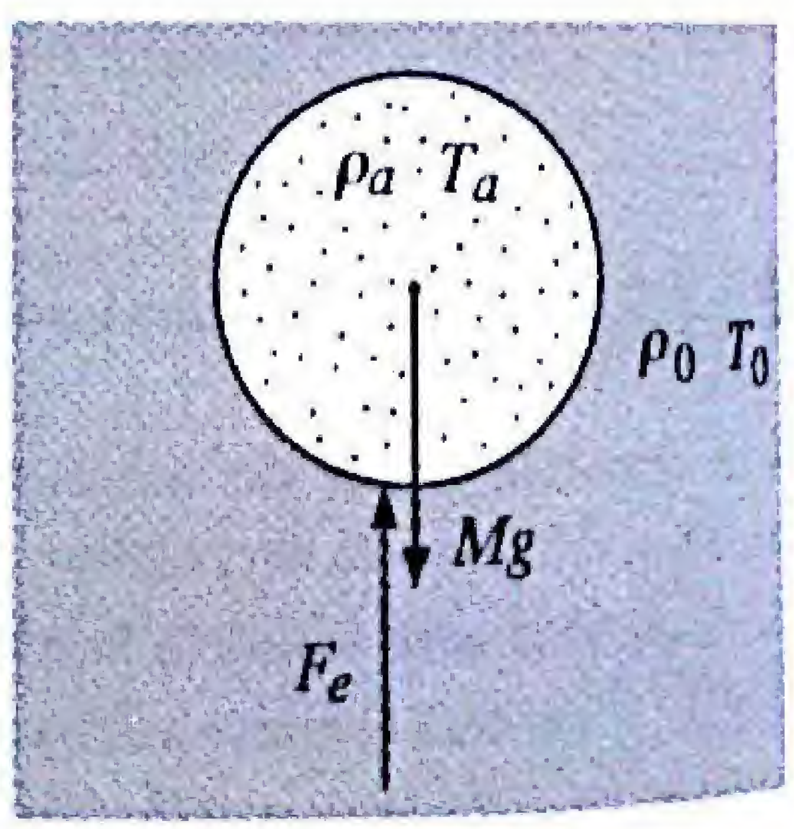
Un globo de aire caliente consigue su empuje ascendente porque el calentamiento del aire en su interior lo hace menos denso que el aire circundante. Suponga un globo que tiene un volumen de 2500 m^3 y lleva una masa total de 600 kg (incluyendo la envoltura del globo, el tanque de gas propano y la cabina con los pasajeros). Si el aire circundante está a una temperatura T_0 = 17,0 °C, ¿cuál debe ser la temperatura mínima del aire caliente confinado, para conseguir que el globo ascienda?
Tome la densidad del aire circundante: ρ_0 = 1,22 kg/m^3.

Solución: La fuerza ascensional ejercida por el aire circundante sobre el globo, $F_e = \rho_0 g V$, debe equilibrar el peso total del sistema.

$$F_e = Mg \quad \Rightarrow \quad \rho_0 g V = (m_a + m_g) g$$

Siendo ρ_0 la densidad del aire exterior y m_a la masa del aire caliente dentro del globo. Despejando:

$$m_a = \rho_0 V - m_g$$



La densidad del aire caliente dentro del globo es:

$$\rho_a = \frac{m_a}{V} = \frac{\rho_0 V - m_g}{V} = \rho_0 - \frac{m_g}{V}$$

$$\rho_a = 1{,}22kg/m^3 - \frac{600kg}{2500m^3} = 0{,}98kg/m^3$$

En términos de la masa molecular M (kg/mol), el número de moles de un gas es: $n = m/M = \rho V/M$. La ecuación de estado del gas ideal puede escribirse en la forma:

$$PV = nRT = (\frac{\rho V}{M})RT \quad \Rightarrow \quad \rho T = \frac{PM}{R}$$

La presión P del aire caliente dentro del globo es igual a la presión del aire exterior. Por lo tanto, las temperaturas en los dos estados del gas están relacionadas:

$$\rho_a T_a = \rho_0 T_0$$

Por lo tanto, la temperatura del aire caliente debe ser:

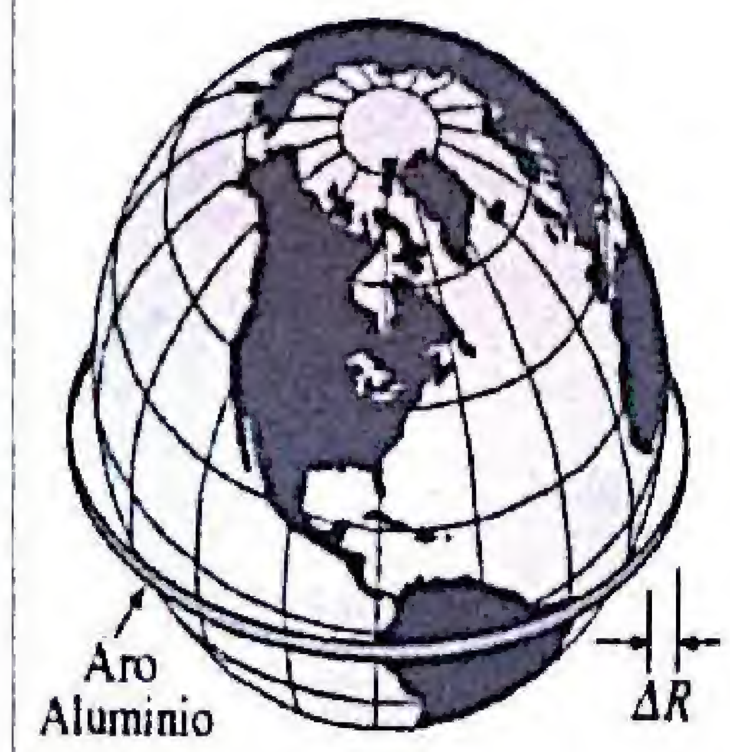
$$T_a = \frac{\rho_0}{\rho_a} T_0 = \frac{1{,}22kg/m^3}{0{,}98kg/m^3}(290K) = 361K = 88°C$$

Respuesta::

$$\boxed{T_a = 88\ °C}$$

PR-3.25. *Un aro metálico alrededor de la Tierra*

Suponga que se pudiese colocar una cinta de aluminio en forma ajustada sobre la superficie terrestre en la región del ecuador. Si la temperatura de la cinta se eleva por tan sólo 1 °C, sin que la temperatura de la Tierra cambie, ¿a qué altura sobre la superficie terrestre quedaría levantada la cinta?
Coeficiente de dilatación del aluminio: $\alpha_a = 23x10^{-6}/°C$



Solución: Al aumentar la temperatura, todas las dimensiones lineales del aro se incrementan, en particular el incremento del radio es:

$$\Delta R = \alpha_a R_0 \Delta T$$

Tomando en cuenta que el radio medio de la Tierra es $R_0 = 6{,}4x10^6$m y que ΔT = 1 °C, resulta:

$$\Delta R = (23x10^{-6}/^{o}C)(6{,}4x10^6 m)(1°C)$$

$$\Delta R = 147\ m$$

¡Esto sería equivalente a la altura de un edificio de unos cincuenta pisos!

Respuesta:

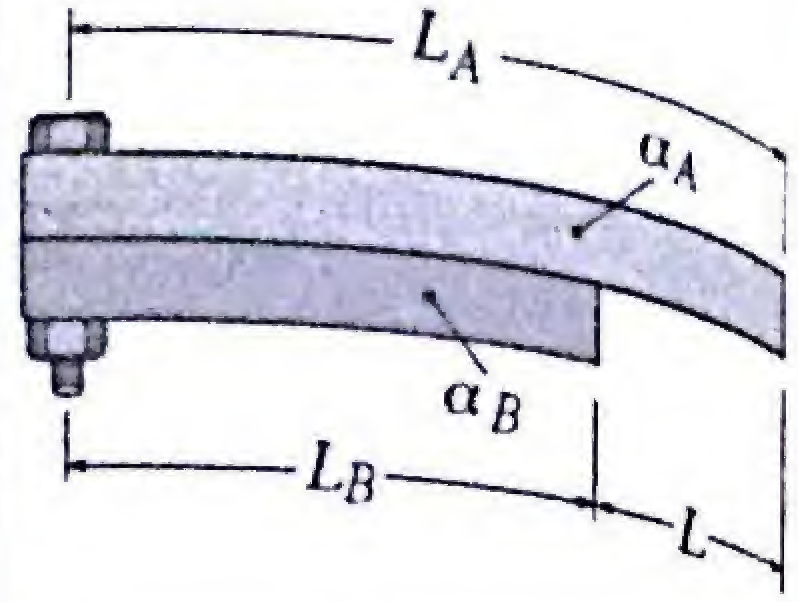
ΔR = 147 m
¡Aunque Ud. no lo crea!

PR-3.26. *Un dispositivo de separación constante*

Dos barras con diferentes coeficientes de dilatación lineal, de largos apropiados y unidas por un extremo, constituyen un dispositivo cuya separación L entre sus puntos extremos permanece constante, independientemente de que ocurran variaciones de temperatura.

a) Demuestre que la separación L no variará con la temperatura si las longitudes L_A y L_B se eligen de modo que: $L_A / L_B = \alpha_B / \alpha_A$

b) Si la barra A es de acero y la B es de latón, ¿cuáles deben ser sus longitudes a 0°C, para tener $L = 10$ cm?



A acero: $\alpha_A = 11 \times 10^{-6}/°C$
B latón: $\alpha_B = 19 \times 10^{-6}/°C$

Solución: a) Si L_A^0 y L_B^0 son las longitudes iniciales de las barras respectivas, al variar la temperatura en ΔT, las longitudes que alcanzan son:

$$L_A = L_A^0(1+\alpha_A \Delta T) \qquad L_B = L_B^0(1+\alpha_B \Delta T)$$

Como la separación L debe ser constante a cualquier temperatura se debe cumplir la condición:

$$L_A - L_B = L_A^0 - L_B^0$$

Por lo tanto:

$$L_A^0(1+\alpha_A \Delta T) - L_B^0(1+\alpha_B \Delta T) = L_A^0 - L_B^0$$

Simplificando, se obtiene:

$$L_A^0 \alpha_A - L_B^0 \alpha_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{L_A^0}{L_B^0} = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$$

b) La distancia L es:

$$L = L_A^0 - L_B^0 = L_A^0\left(1 - \frac{L_B^0}{L_A^0}\right) = L_A^0\left(1 - \frac{\alpha_A}{\alpha_B}\right)$$

$$L_A^0 = \frac{19 \times 10^{-6}/°C}{19 \times 10^{-6}/°C - 11 \times 10^{-6}/°C}(10\text{cm}) = 23{,}8\text{cm}$$

Como $L_B^0 + L = L_A^0$, se tiene:

$$L_B^0 = L_A^0 - L = 23{,}8\text{cm} - 10\text{cm} = 13{,}8\text{cm}$$

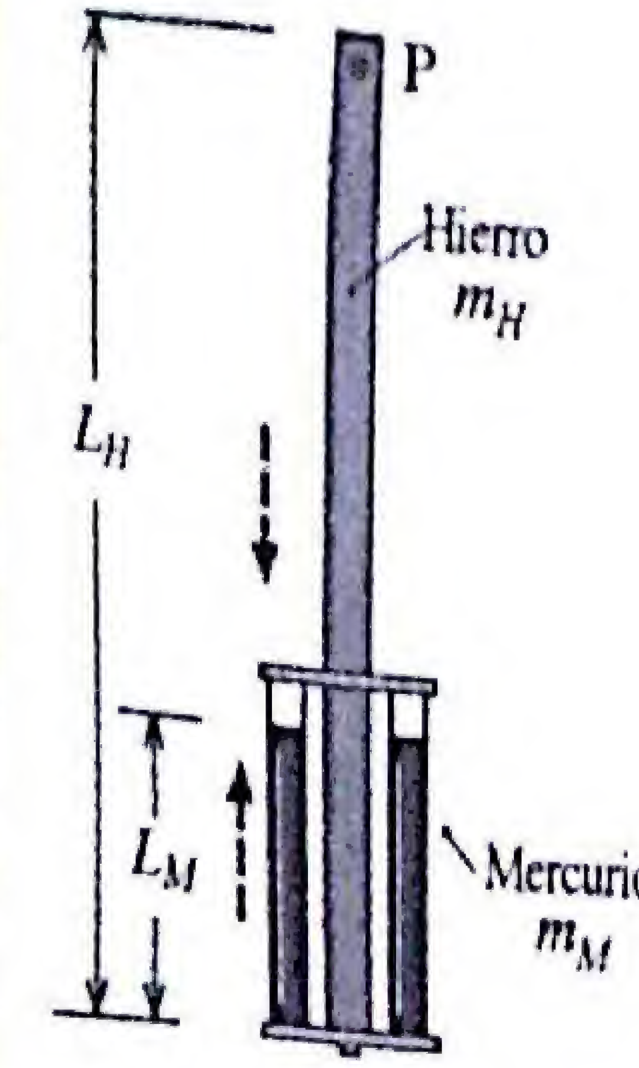
Respuesta:

a) $\dfrac{L_A}{L_B} = \dfrac{\alpha_B}{\alpha_A}$
b) $L_A = 23{,}8$ cm
$L_B = 13{,}8$ cm

PR-3.27. *Un reloj que no lo afecta la dilatación térmica*

Para corregir los efectos de la dilatación térmica de un reloj de péndulo, se colocan unos tubos de vidrio con mercurio en la base de la barra. A medida que aumenta la temperatura, el centro de gravedad de la barra desciende, mientras que el centro de gravedad de las columnas de mercurio ascienden. Si la barra es de hierro y tiene una longitud $L_H = 1$ m, determine la altura que deben tener las columnas de mercurio para que la distancia desde el punto de suspensión al centro de gravedad del péndulo, sea invariable con la temperatura. Suponga que el peso del mercurio es el predominante e ignore la expansión del vidrio.

Hierro: $\alpha_H = 12 \times 10^{-6}/°C$ Mercurio: $\beta_M = 18 \times 10^{-5}/°C$



Solución: A la temperatura inicial, T_0, la distancia vertical desde el pivote P hasta el centro de gravedad es: $(L_H^0 - L_M^0/2)$. A la temperatura T la nueva distancia será: $(L_H - L_M/2)$. Para la barra de hierro, la expansión lineal es:

$$L_H = L_H^0(1+\alpha_H \Delta T)$$

Para el mercurio, la expansión volumétrica es:

$$V_M = V_M^0(1+\beta_M \Delta T)$$

Si ignoramos la expansión del recipiente de vidrio, el área A de la sección transversal no cambia y la longitud de la columna de mercurio es:

$$L_M = \frac{V_M^0}{A}(1+\beta_M \Delta T) = L_M^0(1+\beta_M \Delta T)$$

Para que el funcionamiento del reloj no sea afectado por la temperatura se debe cumplir la condición:

$$L_H - \frac{1}{2}L_M = L_H^0 - \frac{1}{2}L_M^0$$

$$L_H^0(1+\alpha_H \Delta T) - \frac{1}{2}L_M^0(1+\beta_M \Delta T) = L_H^0 - \frac{1}{2}L_M^0$$

Simplificando:

$$L_H^0 \alpha_H - \frac{1}{2} L_M^0 \beta_M = 0$$

Por lo tanto, la altura original de la columna de mercurio debe ser:

$$L_M^0 = 2L_H^0 (\frac{\alpha_H}{\beta_M}) = 2(1\text{m})(\frac{12\text{x}10^{-6}/°\text{C}}{18\text{x}10^{-5}/°\text{C}}) = 0{,}13 \text{ m}$$

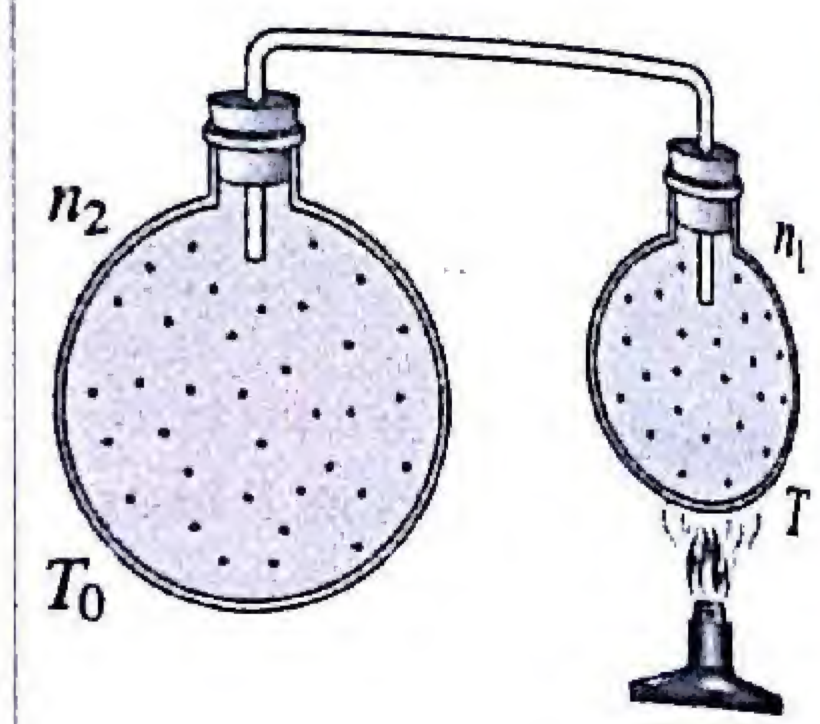
Respuesta:

$$\boxed{L_M^0 = 0{,}13 \text{ m}}$$

PR-3.28. *¿Cómo se redistribuye el gas?*

Dos recipientes con volúmenes $V_1 = 0{,}1$ m^3 y $V_2 = 0{,}3$ m^3 respectivamente, se encuentran conectados mediante un tubo delgado de paredes aislantes, que permite que estén siempre a la misma presión. Los dos recipientes contienen en total, un mol de un gas ideal e inicialmente ambos están a una temperatura $T_0 = 300$ K. Posteriormente, se calienta el recipiente de volumen menor hasta alcanzar una temperatura $T = 500$ K, permaneciendo el recipiente de volumen mayor a la temperatura inicial T_0.

a) ¿Cuál será el número final de moles en cada recipiente?
b) ¿Cuál será la presión final del sistema?



Solución: a) En la situación final, la presión que alcanza el gas en los dos recipientes está dada por las ecuaciones de estado $PV = nRT$:

$$P = \frac{n_2 R T_0}{V_2} = \frac{n_1 R T}{V_1}$$

La relación de número final de moles es:

$$\frac{n_1}{n_2} = (\frac{V_1}{V_2})(\frac{T_0}{T}) = (\frac{0{,}1\text{m}^3}{0{,}3\text{m}^3})(\frac{300\text{K}}{500\text{K}}) = \frac{1}{5}$$

Tomando en cuenta que el número de moles se conserva:

$$n_1 + n_2 = 1$$

Se tiene:

$$n_1 = 1/6 \text{ mol}, \quad n_2 = 5/6 \text{ mol}$$

b) La presión final se obtiene de la ecuación de estado:

$$P = \frac{n_1 R T}{V_1} = \frac{(1/6\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})(500)}{0{,}1\text{m}^3} = 6{,}93\text{x}10^3 \text{Pa}$$

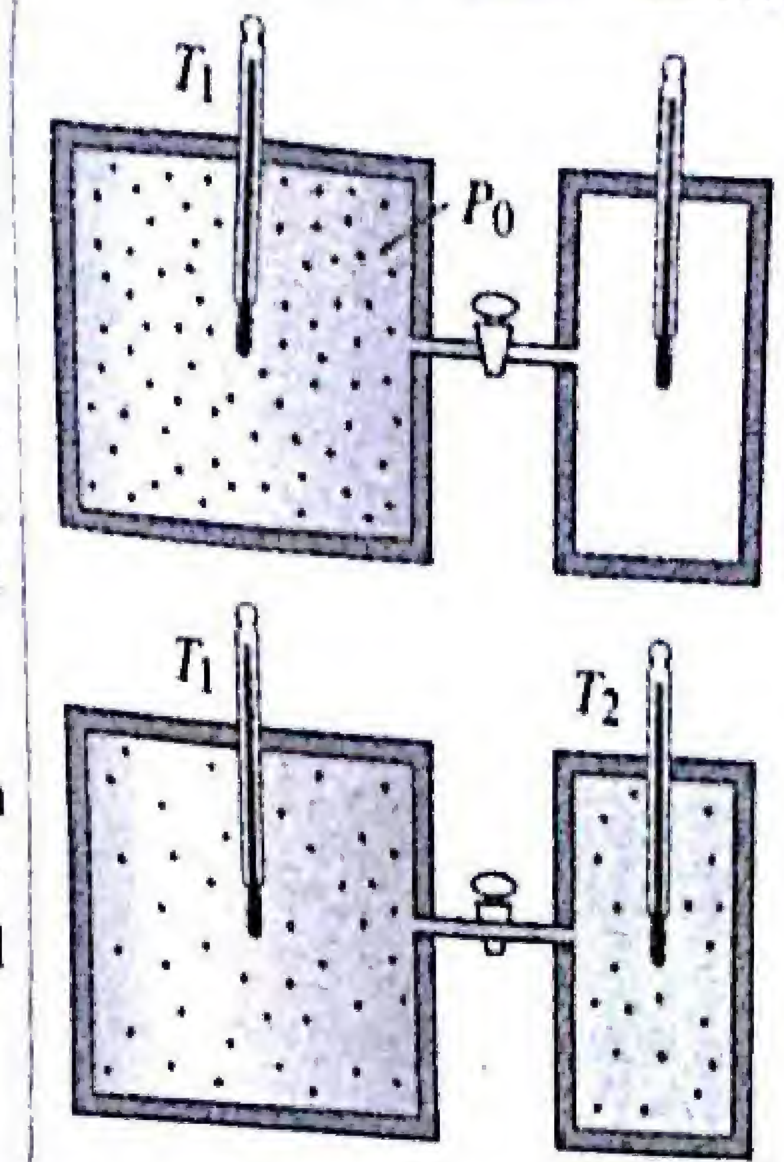
Respuesta:

a) $n_1 = 1/6$ mol, $n_2 = 5/6$ mol
b) $P = 6{,}93\text{x}10^3$ Pa

PR-3.29. *Expansión de un gas ideal*

Un gas ideal está contenido en un recipiente de volumen V a la temperatura T_1 y presión P_0. El recipiente está conectado con un segundo recipiente de volumen $V/2$, mediante un tubo delgado y a través de una válvula. Los dos recipientes se encuentran aislados térmicamente. Inicialmente el segundo recipiente está evacuado y la válvula está cerrada (Fig. a).

Cuando la válvula se abre, la temperatura del gas que va al segundo recipiente cambia a T_2, mientras que el gas en el primer recipiente es mantenido a su temperatura inicial T_1 (Fig. b). Determine la presión final que alcanza el gas.



Solución: El número de moles está dado por la ecuación del estado inicial:

$$P_0 V = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{P_0 V}{RT_1}$$

Después de abrir la válvula y una vez que se alcanza el estado de equilibrio final, el número total n de moles queda repartido entre los dos recipientes: $n = n_1 + n_2$. Sustituyendo: $n_1 = PV / RT_1$ y $n_2 = PV / 2RT_2$, se tiene:

$$\frac{P_0 V}{RT_1} = \frac{PV}{RT_1} + \frac{P(V/2)}{RT_2}$$

Simplificando, se obtiene la presión final:

$$\frac{P_0}{T_1} = P(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{2T_2}) \quad \Rightarrow \quad P = (\frac{2T_2}{T_1 + 2T_2})P_0$$

Respuesta:

$$\boxed{P = (\frac{2T_2}{T_1 + 2T_2})P_0}$$

PR-3.30. *Presiones parciales de componentes del aire*

a) Demuestre la ley de Dalton de las presiones parciales: "La presión total en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es la suma de las presiones que cada gas ejercería si él solo llenara el recipiente"

b) En una muestra de 100 gramos de aire seco a 27 °C, tomada al nivel del mar se encuentran los siguientes componentes: nitrógeno (75,58 %), oxígeno (23,08%), argón (1,28%) y dióxido de carbono (0,06%), y además trazas despreciables de neón, helio, metano y otros gases. ¿Cuál es la densidad del aire en estas condiciones?

Ley de Dalton de las presiones parciales

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$$

Solución: a) Aplicamos la ecuación de estado para cada gas individual considerado como ideal:

$$P_1V_1 = n_1RT \qquad P_2V_2 = n_2RT \qquad P_3V_3 = n_3RT$$

Podemos escribir:

$$P_1V_1 + P_2V_2 + P_3V_3 + ... = (n_1 + n_2 + n_3 + ...)RT$$

Tomando en cuenta que:

$$V_1 = V_2 = V_3 = ... = V \qquad n_1 + n_2 + n_3 + ... = n$$

Por lo tanto: $(P_1 + P_2 + P_3 + ...)V = nRT$

Para el aire como un todo se tiene: $PV = nRT$, por consiguiente:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$$

b) Utilizando los valores de las masas moleculares dadas por la tabla periódica, encontramos los respectivos números de moles:

$$n(N_2) = (\frac{m}{M})_{N_2} = \frac{75{,}58\text{g}}{28{,}01\text{g/mol}} = 2{,}698\text{mol}$$

$$n(O_2) = (\frac{m}{M})_{O_2} = \frac{23{,}08\text{g}}{32{,}00\text{g/mol}} = 0{,}7213\text{mol}$$

$$n(Ar) = (\frac{m}{M})_{Ar} = \frac{1{,}28\text{g}}{39{,}95\text{g/mol}} = 0{,}0320\text{mol}$$

$$n(CO_2) = (\frac{m}{M})_{CO_2} = \frac{0{,}06\text{g}}{44{,}01\text{g/mol}} = 0{,}0014\text{mol}$$

	moles	Presión (Pa)
N_2	2,698	$7{,}916x10^4$
O_2	0,7213	$2{,}116x10^4$
Ar	0,0320	$0{,}0939x10^4$
CO_2	0,0014	$0{,}0041x10^4$
	$n = 3{,}4527$	$P = 1{,}013x10^5$Pa

El número total de moles es la suma:

$$n = n(N_2) + n(O_2) + n(Ar) + n(CO_2) = 3{,}4527 \text{ moles}$$

A la presión al nivel del mar, $P = 1{,}013x10^5$ Pa, el volumen ocupado por el aire es:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(3{,}4527)(8{,}314\text{J/mol})(300\text{K})}{1{,}013x10^5\text{Pa}} = 0.085\text{m}^3$$

Por lo tanto, la densidad de esta muestra de aire es:

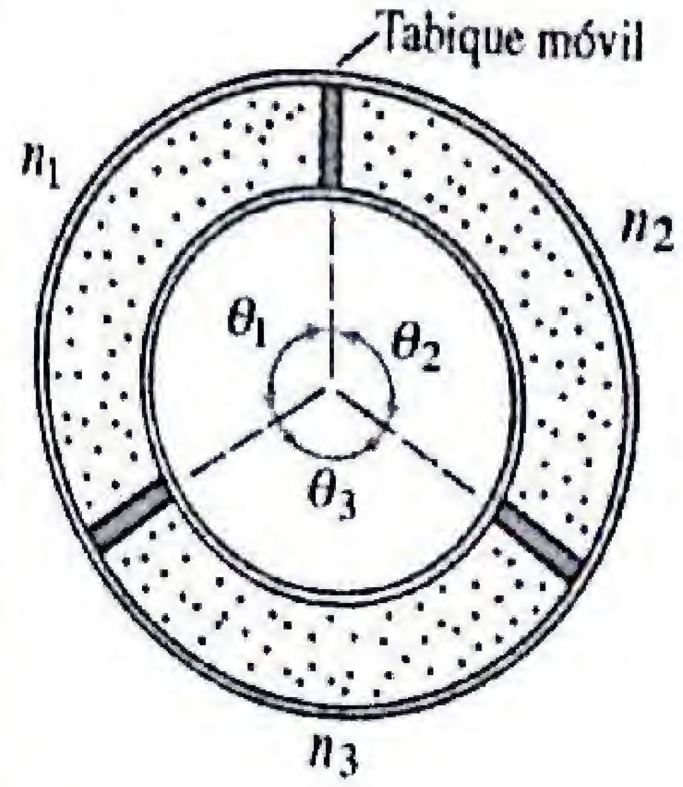
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{0{,}100\text{kg}}{0.0850\text{m}^3} = 1{,}18\text{kg/m}^3$$

Respuesta:

a) $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$
b) $\rho = 1{,}18\text{kg/m}^3$

PR-3.31. *Tres gases empujándose mutuamente*

En un tubo hueco con forma de toroide se hallan tres compartimientos separados por tabiques, los cuales pueden desplazarse sin fricción. En los compartimientos hay gases ideales en equilibrio a la misma temperatura con un número de moles n_1, n_2, y n_3 respectivamente. Determine los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 que quedan formando las paredes de los tabiques.



Solución: Para cada gas ideal se cumple la ecuación de estado: $P_iV_i = nRT_i$. Cuando se alcanza el equilibrio las presiones y temperaturas de los tres gases serán iguales y podemos escribir:

$$\frac{P}{T} = \frac{n_1R}{V_1} = \frac{n_2R}{V_2} = \frac{n_3R}{V_3}$$

Además, los volúmenes son proporcionales a los ángulos subtendidos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{k\theta_1}{k\theta_2} \qquad \frac{n_2}{n_3} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{k\theta_2}{k\theta_3}$$

Siendo k una constante. Como la suma de los tres ángulos es 360°, escribimos:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$$

Sustituyendo los ángulo θ_1 y θ_3 de las expresiones anteriores en términos de θ_2, se obtiene:

$$\theta_2\frac{n_1}{n_2} + \theta_2 + \theta_2\frac{n_3}{n_2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \theta_2(n_1 + n_2 + n_3) = 2\pi n_2$$

$$\theta_2 = 2\pi(\frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3})$$

Similarmente, se obtienen los ángulos θ_1 y θ_3:

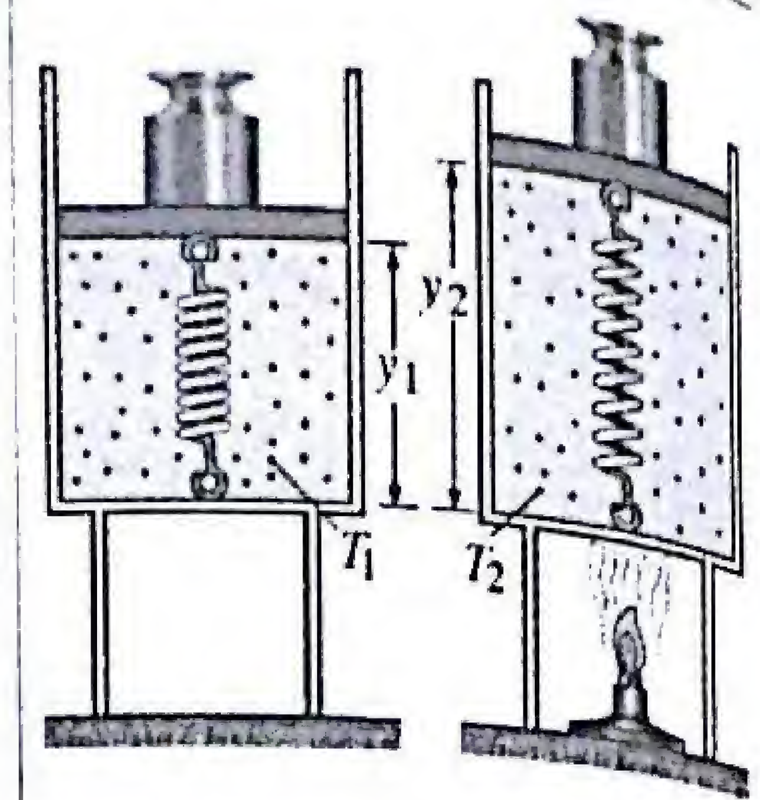
$$\theta_1 = 2\pi(\frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3}) \qquad \theta_3 = 2\pi(\frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3})$$

Respuesta:

$$\theta_1 = 2\pi(\frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3})$$
$$\theta_2 = 2\pi(\frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3})$$
$$\theta_3 = 2\pi(\frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3})$$

PR-3.32. *Calentamiento del gas para estirar el resorte*

Un cilindro vertical de área transversal A contiene n moles de un gas ideal. El cilindro está provisto de un émbolo móvil ligero que tiene encima una pesa de masa M. El émbolo está atado al fondo del recipiente mediante un resorte de constante elástica k. Inicialmente el gas está a la temperatura T_1 y el émbolo se encuentra a una altura y_1. ¿A qué temperatura T_2 habrá que calentar el gas para que el émbolo se eleve hasta una altura mayor, y_2?



Solución: La condiciones de equilibrio para los estados inicial y finál son:

$$\sum F_y = P_1 A - P_{atm} A - Mg - ky_1 = 0$$

$$\sum F_{y'} = P_2 A - P_{atm} A - Mg - ky_2 = 0$$

Combinando estas dos ecuaciones:

$$(P_2 - P_1)A = k(y_2 - y_1) \qquad (1)$$

Si aplicamos la ecuación, $PV = nRT$ los estados inicial y final:

$$P_1 A y_1 = nRT_1 \qquad P_2 A y_2 = nRT_2$$

$$(P_2 - P_1)A = nR\left(\frac{T_2}{y_2} - \frac{T_1}{y_1}\right) \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) de $(P_2 - P_1)A$, se obtiene :

$$k(y_2 - y_1) = nR\left(\frac{T_2}{y_2} - \frac{T_1}{y_1}\right)$$

Por consiguiente, la temperatura T_2 a la que habrá que calentar el gas para que el émbolo se eleve hasta una altura mayor, y_2, es:

$$T_2 = T_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \frac{ky_2}{nR}(y_2 - y_1)$$

Respuesta:

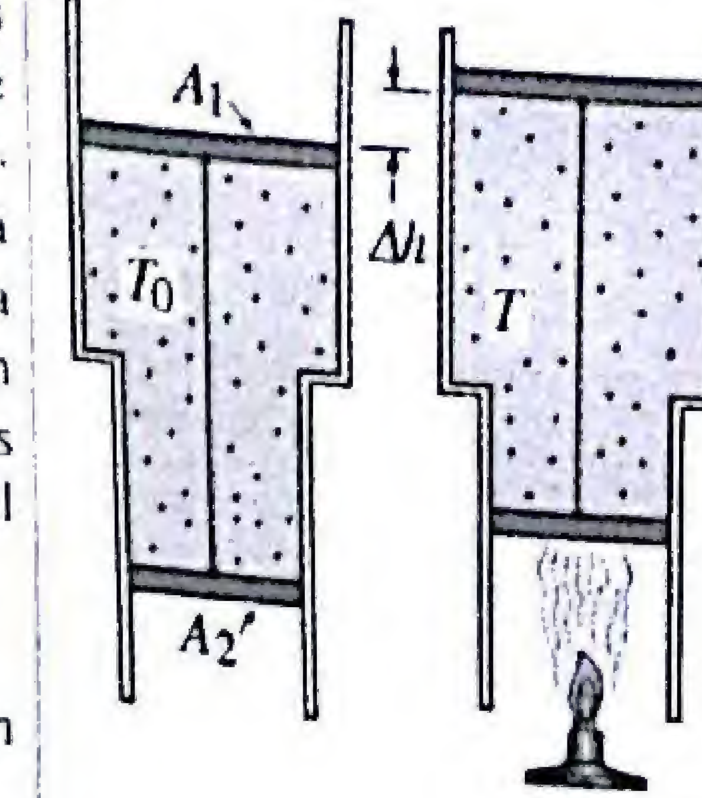
$$\boxed{T_2 = T_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \frac{ky_2}{nR}(y_2 - y_1)}$$

PR-3.33. *Elevación térmica de un sistema de pistones*

Un tubo cilíndrico hecho de un material aislante tiene dos secciones diferentes, en las cuales se insertan pistones de áreas $A_1 > A_2$, y se conectan mediante un hilo inextensible. Los pistones pueden deslizar sin fricción en los tubos. La masa combinada de los dos pistones y el hilo es m. En la parte exterior a los pistones hay aire a la presión atmosférica y en la región comprendida entre los dos pistones existe un gas ideal a una presión $P > P_{atm}$, el cual ocupa un volumen V_0 a la temperatura T_0.

a) ¿Cuál es la presión del gas contenido en el cilindro?

b) Determine la elevación Δh de los pistones en función del aumento ΔT en la temperatura del gas.



Solución: a) Si P es la presión del gas, la condición de equilibrio para el sistema constituido por los dos pistones y el hilo es:

$$\sum F_y = (P - P_{atm})A_1 + (P_{atm} - P)A_2 - mg = 0$$

$$P(A_1 - A_2) - P_{atm}(A_1 - A_2) = mg$$

Despejando la presión:

$$P = P_{atm} + \frac{mg}{A_1 - A_2} = \text{constante}$$

b) Al incrementar la temperatura en ΔT la presión no varía:

$$P = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{T_0}{V_0} = \frac{T}{V} = \frac{T_0 + \Delta T}{V_0 + \Delta V}$$

$$\Delta V = \frac{(T_0 + \Delta T)V_0 - T_0 V_0}{T_0} = V_0 \frac{\Delta T}{T_0}$$

Como la variación de volumen es: $\Delta V = (A_1 - A_2)\Delta h$, si igualamos con la expresión anterior podemos determinar el desplazamiento vertical Δh:

$$(A_1 - A_2)\Delta h = V_0 \frac{\Delta T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{V_0}{(A_1 - A_2)} \frac{\Delta T}{T_0}$$

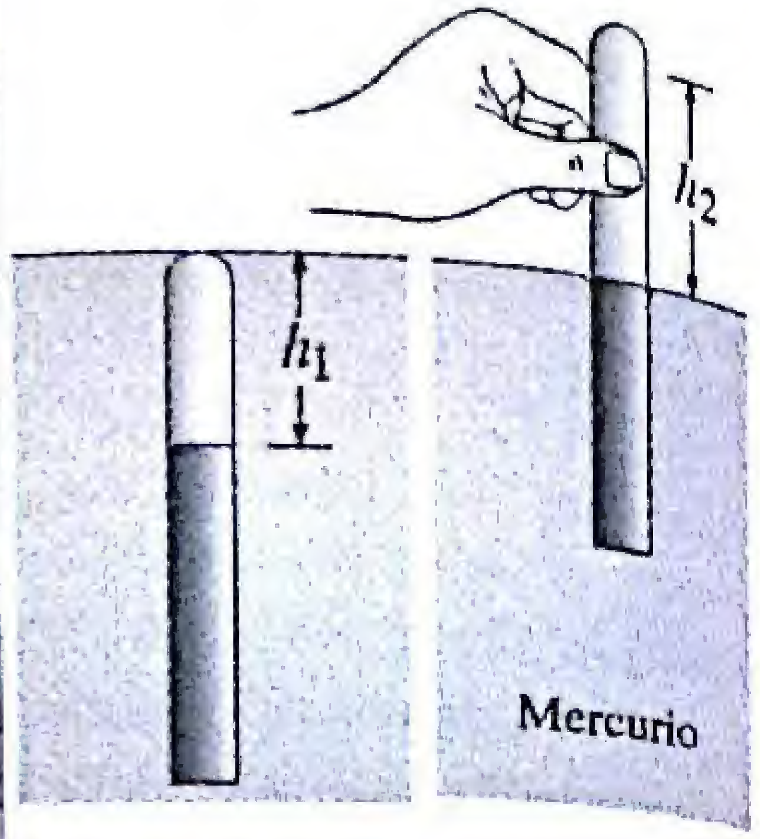
Respuesta:

a) $P = P_{atm} + \dfrac{mg}{A_1 - A_2}$

b) $\Delta h = \dfrac{V_0}{(A_1 - A_2)} \dfrac{\Delta T}{T_0}$

PR-3.34. *Al levantar la probeta sumergida en mercurio*

Una probeta de vidrio se coloca verticalmente boca abajo en un recipiente conteniendo mercurio, de modo que el extremo sellado quede al ras del nivel de mercurio. En esta situación el mercurio penetra en la probeta quedando una columna de aire atrapado de altura $h_1 = 10$ cm. ¿a qué altura h_2 sobre el nivel de mercurio hay que levantar el extremo superior de la probeta para que el mercurio dentro de ésta quede a igual nivel que el mercurio en el recipiente? Suponga que la temperatura del sistema se mantiene constante.



Solución: Como la temperatura es constante y considerando al aire encerrado como un gas ideal:

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

En el primer estado, la presión es:

$$P_1 = P_{atm} + \rho g h_1$$

El segundo estado está a la presión atmosférica: $P_2 = P_{atm}$

Los volúmenes inicial y final son, respectivamente:

$$V_1 = h_1 A \quad \text{y} \quad V_2 = h_2 A$$

Siendo A el área transversal de la probeta. Sustituyendo se obtiene:

$$(P_{atm} + \rho g h_1)h_1 A = P_{atm} h_2 A$$

Por lo tanto, la altura sobre el nivel de mercurio debe ser:

$$h_2 = h_1\left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_{atm}}\right)$$

$$h_2 = (0{,}1\text{m})\left[1 + \frac{(13600\text{kg/m}^3)(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}1\text{m})}{1{,}01\text{x}10^5\text{Pa}}\right]$$

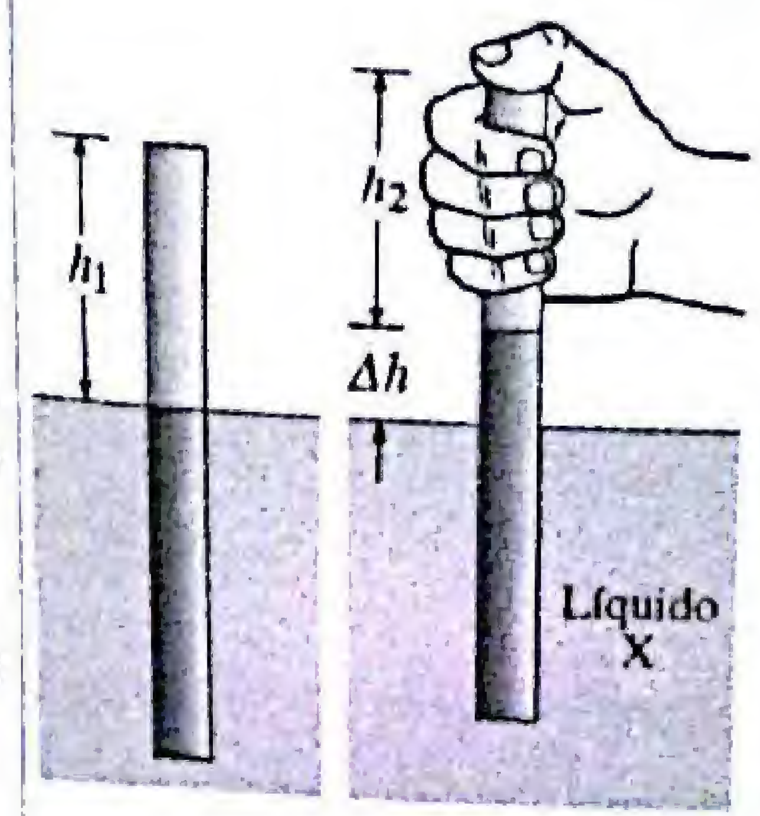
$$h_2 = 0{,}113\text{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{h_2 = 11{,}3 \text{ cm.}}$$

PR-3.35. *Un método sencillo para hallar la densidad*

Para determinar la densidad de un líquido desconocido X, se sumerge verticalmente un tubo de vidrio de área de sección transversal constante, A, en el líquido, hasta que quede una columna de aire de altura h_1. A continuación se tapa con el dedo el extremo libre y, se levanta poco a poco hasta que el nivel del líquido en el tubo quede a una altura Δh y así el aire atrapado ocupe una columna de longitud mayor, h_2. Halle la densidad del líquido, suponiendo que la temperatura del aire en el tubo durante este proceso permanece constante.



Solución: Considerando al aire encerrado como un gas ideal y dado que la temperatura es constante, podemos escribir:

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

En el estado inicial, la presión del aire es la atmosférica: $P_1 = P_{atm}$. En el estado final la presión es:

$$P_2 = P_{atm} - \rho_x g \Delta h$$

Los volúmenes inicial y final son: $V_1 = h_1 A$ y $V_2 = h_2 A$. Siendo A el área transversal de la probeta. Sustituyendo, se obtiene:

$$P_{atm} h_1 A = (P_{atm} - \rho_x g \Delta h) h_2 A$$

Por lo tanto, la densidad desconocida es:

$$\rho_x = \frac{P_{atm}}{g\Delta h}\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right)$$

Respuesta:

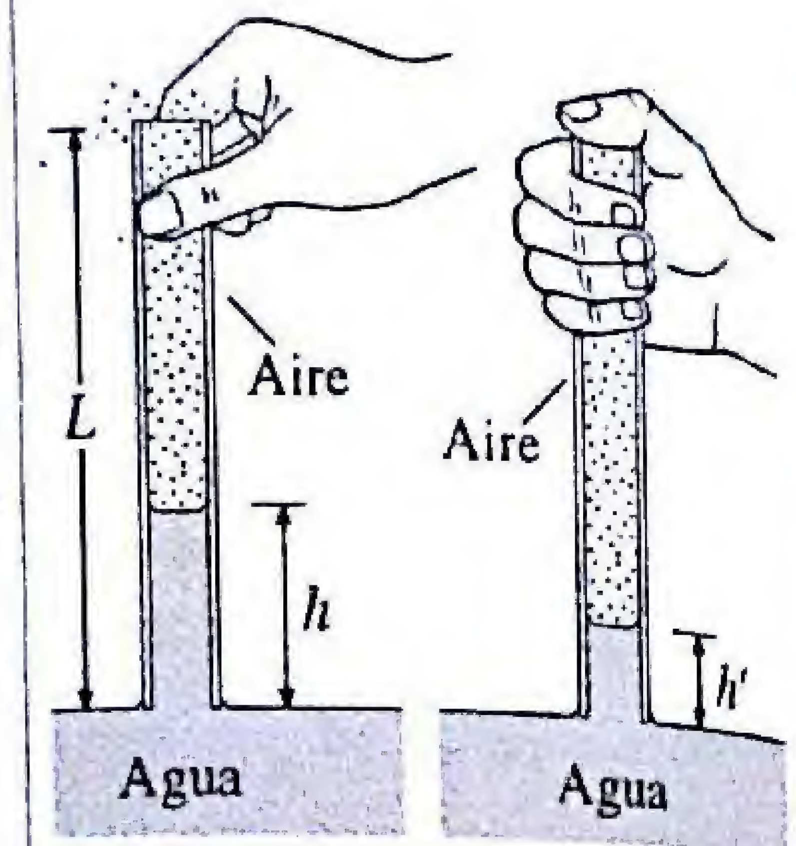
$$\boxed{\rho_x = \frac{P_{atm}}{g\Delta h}\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right)}$$

PR-3.36. *Columna de agua en un tubo capilar*

Un tubo de vidrio de radio interno r muy pequeño y de longitud $L = 25$ cm, está abierto en ambos extremos. Se coloca verticalmente sobre un recipiente con agua y al tocar ligeramente la superficie, se forma por acción capilar una columna de agua de altura $h = 1$ cm. ¿Halle la altura h' de la columna de agua si le cerramos la boca superior al tubo antes de colocarlo en el agua?

Solución: En la situación inicial, las superficies inferior y superior de la columna de agua de altura h están a la presión atmosférica, P_{atm}. El peso $mg = \rho(\pi r^2 hg)$ de la columna de agua está equilibrado por la fuerza capilar F_{cap}, debida a la adhesión entre el agua y el vidrio que actúa en dirección vertical alrededor de la circunferencia de radio r.

$$F_{cap} = \rho(\pi r^2 hg)$$



Cuando se cierra el extremo superior del tubo antes de colocarlo en el agua, la columna de aire de altura L a la presión inicial P_{atm}, quedará comprimida hasta una altura $(L - h')$ a la presión P'. Considerando al aire como un gas ideal y que el proceso es isotérmico, se cumple:

$$P_{atm}(\pi r^2 L) = P'\pi r^2 (L - h')$$

La presión final es:

$$P' = \left(\frac{L}{L - h'}\right) P_{atm}$$

En equilibrio, sobre la columna de agua actúan cuatro fuerzas: 1) La fuerza capilar: $F_{cap} = \rho(\pi r^2 hg)$, 2) La fuerza aplicada desde arriba por el aire atrapado: $P'\pi r^2$, 3) La fuerza aplicada desde abajo por el agua: $P_{atm}\pi r^2$ y 4) El peso de la columna de agua: $m'g = \rho\pi r^2 h' g$:

$$\sum F_y = F_{cap} + P_{atm}\pi r^2 - P'\pi r^2 - m'g = 0$$

$$\rho(\pi r^2 hg) + P_{atm}\pi r^2 - \left(\frac{L}{L - h'}\right) P_{atm}\pi r^2 - \rho\pi r^2 h' g = 0$$

$$\rho hg + P_{atm} - \left(\frac{L}{L - h'}\right) P_{atm} - \rho h' g = 0$$

$$\rho hg - \left(\frac{h'}{L - h'}\right) P_{atm} - \rho h' g = 0$$

En las condiciones del problema se cumple $h' < h << L$ y por lo tanto, podemos aproximar en la expresión anterior:

$$\rho hg = \left(\frac{h'}{L}\right) P_{atm} + \rho h' g \qquad \Rightarrow \qquad h' = \frac{h}{(1 + P_{atm}/\rho g L)}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

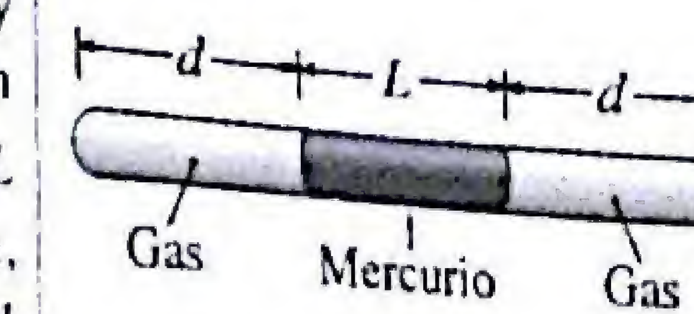
$$h' = \frac{10^{-2}\text{m}}{1 + \dfrac{1{,}01\text{x}10^5 \text{N/m}^2}{10^3 \text{kg/m}^3 \text{x} 9{,}8 \text{m/s}^2 \text{x} 0{,}25\text{m}}} = 2{,}4\text{x}10^{-4}\text{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{h' = \frac{h}{(1 + P_{atm}/\rho g L)} = 0{,}24\text{mm}}$$

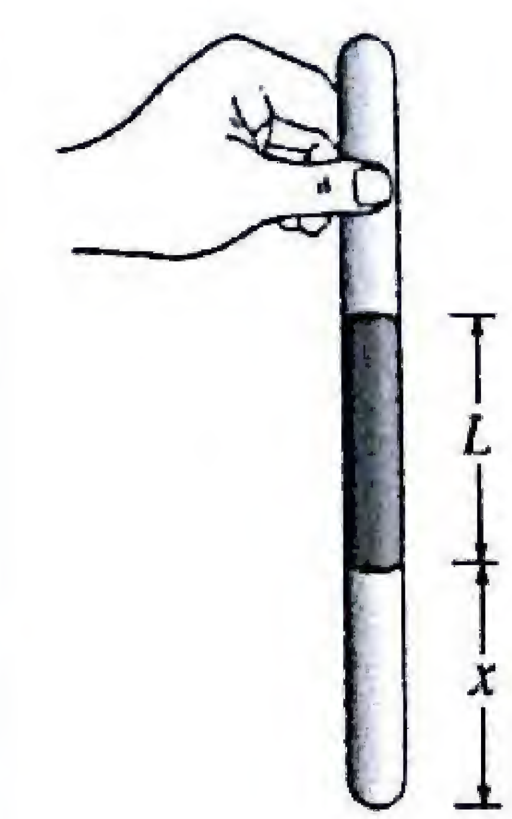
PR-3.37. *De posición horizontal a posición vertical*

Una probeta de vidrio está sellada en ambos extremos y contiene un gas ideal a la presión $P_0 = 1{,}2\text{x}10^5$ Pa. En medio del tubo hay una porción de mercurio de longitud $L = 13$ cm, separando dos cámaras de longitud $d = 11$ cm, que contienen igual cantidad de gas. Cuando se pasa el tubo de la posición horizontal a la vertical, ¿cuál será la altura x de la columna de gas en la parte inferior? Suponga que la temperatura se mantiene constante.



Mercurio: $\rho = 13600$ kg/m^3

Solución: Si aplicamos a los gases ideales en cada compartimiento la condición $PV =$ constante, encontramos las presiones finales en términos de las iniciales:



$$P_2(Ax) = P_0(Ad) \qquad \Rightarrow \qquad P_2 = P_0\left(\frac{d}{x}\right)$$

$$P_1 A(2d - x) = P_0(Ad) \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = P_0\left(\frac{d}{2d - x}\right)$$

En la posición vertical, la relación entre las presiones en la parte superior e inferior es:

$$P_2 = P_1 + \rho g L$$

Sustituyendo las respectivas presiones en esta expresión se obtiene una ecuación cuadrática:

$$P_0\left(\frac{d}{x}\right) = P_0\left(\frac{d}{2d - x}\right) + \rho g L$$

$$P_0 d(2d - x) = P_0 dx + \rho g L x(2d - x)$$

$$\rho g L x^2 - 2(P_0 d + \rho g L d)x + 2P_0 d^2 = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\rho g L = 13600x9{,}8x0{,}13 = 17300$$

$$2P_0 d^2 = 2x1{,}2x10^5 x0{,}11^2 = 2900$$

$$2(P_0 d + \rho g L d) =$$
$$= 2[1{,}2x10^5 x0{,}11 + 13600x9{,}8x0{,}13x0{,}11] = 30200$$

Se obtiene la ecuación cuadrática:

$$17300x^2 - 30200x + 2900 = 0$$

Cuya solución es aproximadamente:

$$x \approx 0{,}102\text{m} \approx 10{,}2\text{cm}$$

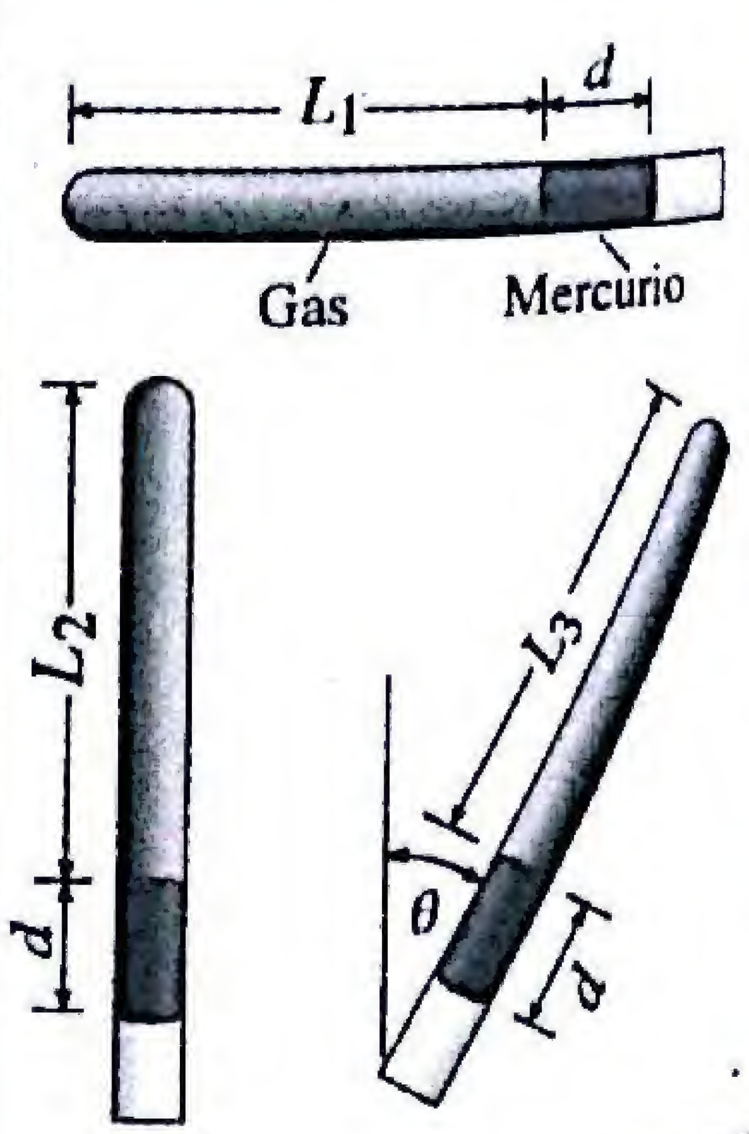
Respuesta:

$$\boxed{x \approx 10{,}2\text{ cm}}$$

PR-3.38. *Columna de gas cambia al inclinar la probeta*

En una probeta de sección transversal pequeña, hay un gas ideal separado del aire exterior por medio de una columna de mercurio de longitud d. Cuando la probeta está en posición horizontal, la columna de gas en su interior tiene una longitud $L_1 = 10$ cm. Si se coloca en la posición vertical dicha columna de gas ocupa una longitud $L_2 = 8$ cm. ¿Cuál será la longitud L_3 de la columna de gas cuando la probeta está inclinada a un ángulo $\theta = 60°$ con la vertical?

Solución: En la posición horizontal, la presión del gas dentro del tubo es igual a la presión atmosférica. En la posición vertical la presión atmosférica es equilibrada por la presión del gas dentro del tubo y la columna de mercurio, por lo tanto $P_2 = P_{atm} - \rho g d$. Como la temperatura es constante, aplicamos la ley de Boyle ($P_1V_1 = P_2V_2$) y podemos escribir:



$$P_{atm}(L_1 A) = (P_{atm} - \rho g d)(L_2 A)$$

Despejando, la presión atmosférica es:

$$P_{atm} = (\frac{L_2}{L_2 - L_1})\rho g d$$

En la posición inclinada la presión del gas resulta:

$$P_3 = P_{atm} - \rho g d\cos\theta$$

Por lo tanto:

$$P_1V_1 = P_3V_3 \quad \Rightarrow \quad P_{atm}(L_1 A) = (P_{atm} - \rho g d\cos\theta)(L_3 A)$$

$$P_{atm} = (\frac{L_3}{L_3 - L_1})\rho g d\cos\theta$$

Igualando las dos expresiones para P_{atm}:

$$(\frac{L_3}{L_3 - L_1})\cos\theta = \frac{L_2}{L_2 - L_1}$$

Se obtiene así la longitud L_3 de la columna del gas cuando la probeta está en la posición inclinada:

$$L_3 = \frac{L_2 L_1}{L_2 - (L_2 - L_1)\cos\theta}$$

$$L_3 = \frac{8\text{cm}x10\text{cm}}{10\text{cm} - (10\text{cm} - 8\text{cm})\cos 60°} = 8{,}90\text{cm}$$

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{c} L_3 = \dfrac{L_2 L_1}{L_2 - (L_2 - L_1)\cos\theta} \\ L_3 = 8{,}9\text{cm} \end{array}}$$

PR-3.39. *La velocidad v_{rms} es siempre mayor que la $\bar{v}$*

Considere un sistema que consiste de dos partículas con velocidades distintas, $v_1 \neq v_2$. Demuestre que la velocidad cuadrática media v_{rms} es siempre mayor que la velocidad media, $\bar{v}$. Este resultado es de validez general para cualquier sistema de N partículas.

Solución: La velocidad media es:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Mientras que la velocidad cuadrática media es:

$$v_{rms}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Por lo tanto:

$$v_{rms}^2 - \bar{v}^2 = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) - \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2)$$

$$v_{rms}^2 - \bar{v}^2 = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2) = \frac{1}{4}(v_1 - v_2)^2$$

Esto significa que si $v_1 \neq v_2$, entonces: $v_{rms} > \bar{v}$.

Respuesta:

$\boxed{v_{rms} > \bar{v}}$

PR-3.40. *Veinte partículas confinadas en un volumen*

Veinte partículas idénticas de masa m están confinadas en un volumen V y tienen las velocidades indicadas en la tabla mostrada. Determine:
a) La velocidad media, la velocidad media cuadrática y la velocidad mas probable.
b) La presión que ejercen sobre las paredes del recipiente.
c) La energía cinética promedio por partícula.

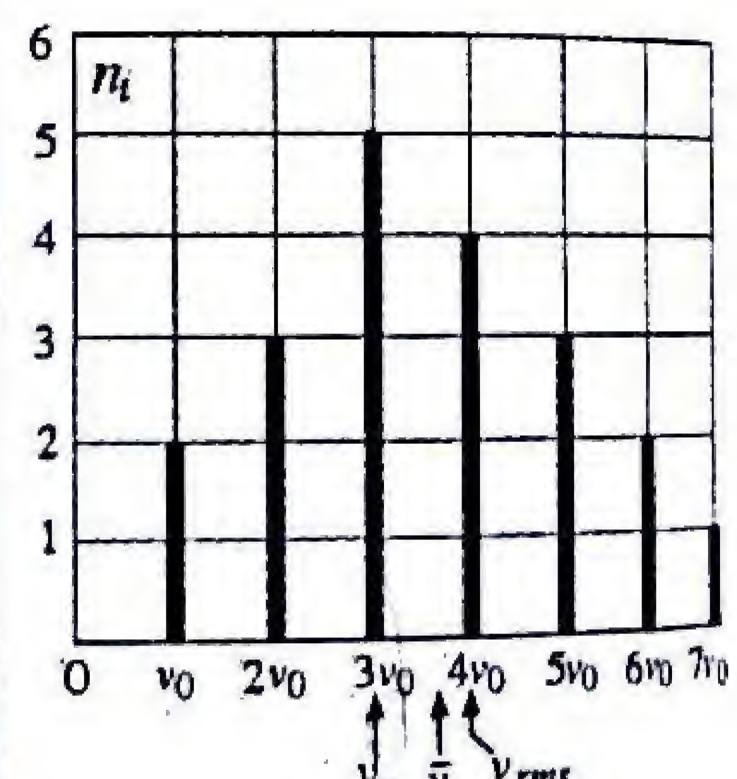
n_i	v_i
2	v_0
3	$2v_0$
5	$3v_0$
4	$4v_0$
3	$5v_0$
2	$6v_0$
1	$7v_0$

Solución: a) La velocidad media de las 20 partículas es:

$$\bar{v} = \sum_{i=1} n_i v_i \Big/ \sum_{i=1} n_i$$

$$\bar{v} = \frac{2v_0 + 3(2v_0) + 5(3v_0) + 4(4v_0) + 3(5v_0) + 2(6v_0) + 1(7v_0)}{2+3+5+4+3+2+1}$$

$$\bar{v} = 3{,}65v_0$$



La velocidad cuadrática media es:

$$v_{rms}^2 = \sum_{i=1} n_i v_i^2 \Big/ \sum_{i=1} n_i =$$

$$\frac{2(v_0)^2 + 3(2v_0)^2 + 5(3v_0)^2 + 4(4v_0)^2 + 3(5v_0)^2 + 2(6v_0)^2 + 1(7v_0)^2}{2+3+5+4+3+2+1}$$

$$v_{rms}^2 = 15.95v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_{rms} = 3{,}99v_0$$

La velocidad mas probables es aquella que poseen el mayor numero de partículas :

$$v_p = 3v_0$$

b) La presión que ejercen sobre las paredes del recipiente

$$P = \frac{N}{V}\left(\frac{1}{3}m\overline{v^2}\right) = \frac{20}{V}\left(\frac{1}{3}m15.95v_0^2\right) = 106\frac{mv_0^2}{V}$$

c) La energía cinética promedio por partícula es:

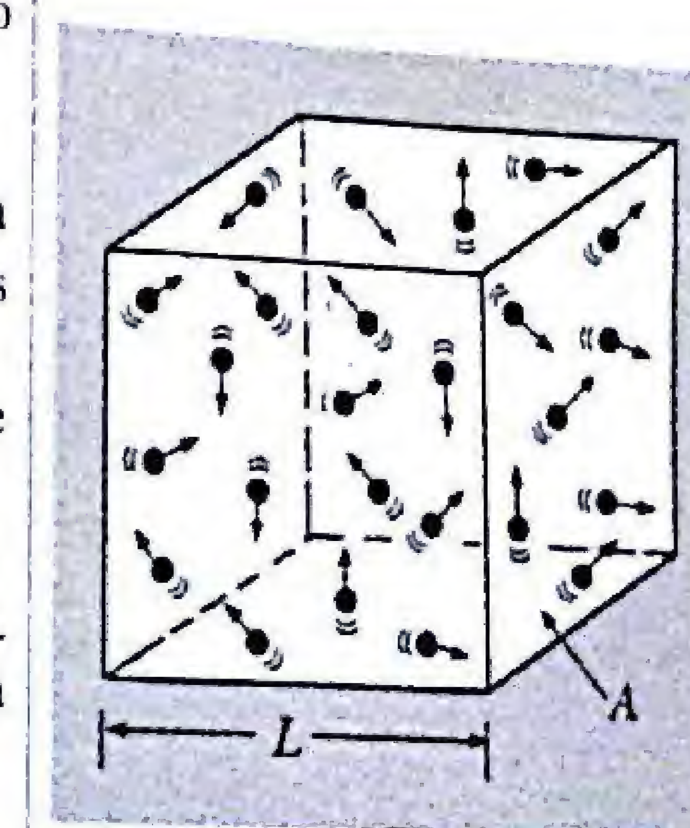
$$\overline{E_c} = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{1}{2}m15.95v_0^2 = 7{,}98mv_0^2$$

Respuesta:

a) $\bar{v} = 3{,}65v_0$, $v_p = 3v_0$
$v_{rms} = 3{,}99v_0$
b) $P = 106\dfrac{mv_0^2}{V}$
c) $\overline{E_c} = 7{,}98mv_0^2$

PR-3.41. *Moléculas de nitrógeno en una caja*

Un gas de nitrógeno se encuentra en un recipiente cúbico de lados $L = 0{,}1$ m, a la temperatura $T = 300$ K. Calcule:
a) El valor de la velocidad eficaz (o cuadrática media).
b) La fuerza media que ejerce una molécula N_2 que viaja con esa velocidad cuando rebota entre dos lados opuestos del recipiente.
c) El número de moléculas viajando a esa velocidad que se necesitan para producir una presión media de 1 atm.
d) El numero de moléculas de N_2 que realmente deben existir en el recipiente a 300 K y a la presión atmosférica.
e) ¿Por qué la respuesta en (d) resulta tres veces la obtenida en (c)?



Solución: a) De acuerdo a la distribución de velocidades de Maxwell la velocidad cuadrática media es:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K})}{28\text{x}10^{-3}\text{kg/mol}}} = 517\text{m/s}$$

Masa molecular del nitrógeno
$M = 28{,}0$ g/mol

b) La fuerza promedio es el cambio de momentum de la molécula dividida por el tiempo entre colisiones:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_{rms}}{2L/v_{rms}} = \frac{(M/N_A)v_{rms}^2}{L} = \frac{Mv_{rms}^2}{N_A L}$$

$$\bar{F} = \frac{(28\text{x}10^{-3}\text{kg/mol})(517\text{m/s})^2}{(6{,}023\text{x}10^{23}\text{moleculas/mol})(0{,}1\text{m})} = 1{,}24\text{x}10^{-19}\text{N}$$

b) La presión media ejercida por la molécula contra la pared es:

$$\bar{p} = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\bar{F}}{L^2} = \frac{1{,}24\text{x}10^{-19}\text{N}}{(0{,}1\text{m})^2} = 1{,}24\text{x}10^{-17}\text{Pa}$$

c) El número de moléculas que se necesitan para producir una presión media de 1 atm es:

$$N' = \frac{P}{p} = \frac{1{,}01x10^5\,\text{Pa}}{1{,}24x10^{-17}\,\text{Pa}} = 8{,}15x10^{21} \text{ moléculas}$$

d) El numero de moléculas que realmente deben existir es:

$$N = nN_A = (\frac{PV}{RT})N_A$$

$$N = (\frac{(1{,}01x10^5\,\text{Pa})(0{,}1\,\text{m})^3(6{,}023x10^{23}/\text{mol})}{(8{,}31\,\text{J/mol.K})(300\,\text{K})} = 2{,}44x10^{22}$$

e) Comparando, vemos que:

$$N / N' = 2{,}44x10^{22} / 8{,}15x10^{21} = 3$$

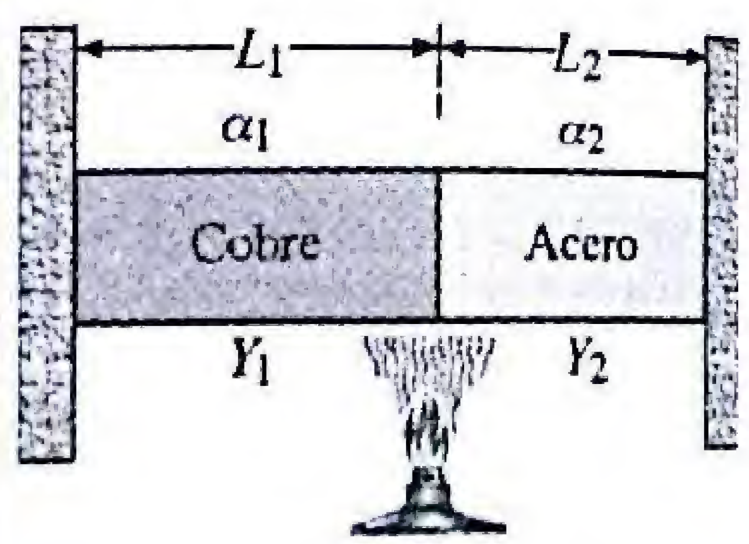
La razón de este resultado es que hemos supuesto que todas las moléculas se mueven en la misma dirección y que se ejerce fuerza solamente sobre dos lados del cubo.

Respuesta:

a) $v_{rms} = 517\,\text{m/s}$,
b) $\overline{F} = 1{,}24x10^{-19}\,\text{N}$
c) $N' = 8{,}15x10^{21}$ moléculas
d) $N = 2{,}44x10^{22}$ moléculas

PR-3.42. *Esfuerzo térmico de barras entre paredes*

Entre dos paredes rígidas se hallan dos barras, una de cobre ($\alpha_1 = 1{,}7x10^{-5}$ /°C, $Y_1 = 11x10^{10}$ Pa) y la otra de acero ($\alpha_2 = 1{,}2x10^{-5}$ /°C, $Y_2 = 20x10^{10}$ Pa). Las barras tienen igual sección transversal $A = 20$ cm^2 y longitudes diferentes, $L_1 = 40$ cm y $L_2 = 30$ cm. ¿Si la temperatura se eleva en $\Delta T = 60$ °C, cuál será la fuerza con que las barras actúan la una sobre la otra?



Solución: Si durante el calentamiento las barras no estuviesen restringidas por las paredes su longitud total aumentaría en:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\Delta T$$

El esfuerzo de compresión de las barras provocado por las paredes en el mismo valor ΔL conducirá a la disminución de las longitudes de las barras en $\Delta L_1'$ y $\Delta L_2'$, siendo:

$$\Delta L = \Delta L_1' + \Delta L_2'$$

Para ello hace falta una fuerza:

$$F = Y_1 \frac{\Delta L_1'}{L_1} A = Y_2 \frac{\Delta L_2'}{L_2} A$$

Combinando esta relación con las dos ecuaciones anteriores podemos escribir:

$$\frac{FL_1}{Y_1 A} + \frac{FL_2}{Y_2 A} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\Delta T$$

Por lo tanto, la fuerza con que las barras actúan la una sobre la otra es:

$$F = \frac{(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\Delta T}{\frac{L_1}{Y_1 A} + \frac{L_2}{Y_2 A}} = \frac{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2}{\frac{L_1}{Y_1} + \frac{L_2}{Y_2}} A\Delta T$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos:

$$F = \frac{1{,}7x10^{-5}x0{,}4 + 1{,}2x10^{-5}x0{,}3}{\frac{0{,}4}{11x10^{10}} + \frac{0{,}3}{20x10^{10}}}(20x10^{-4}x60)$$

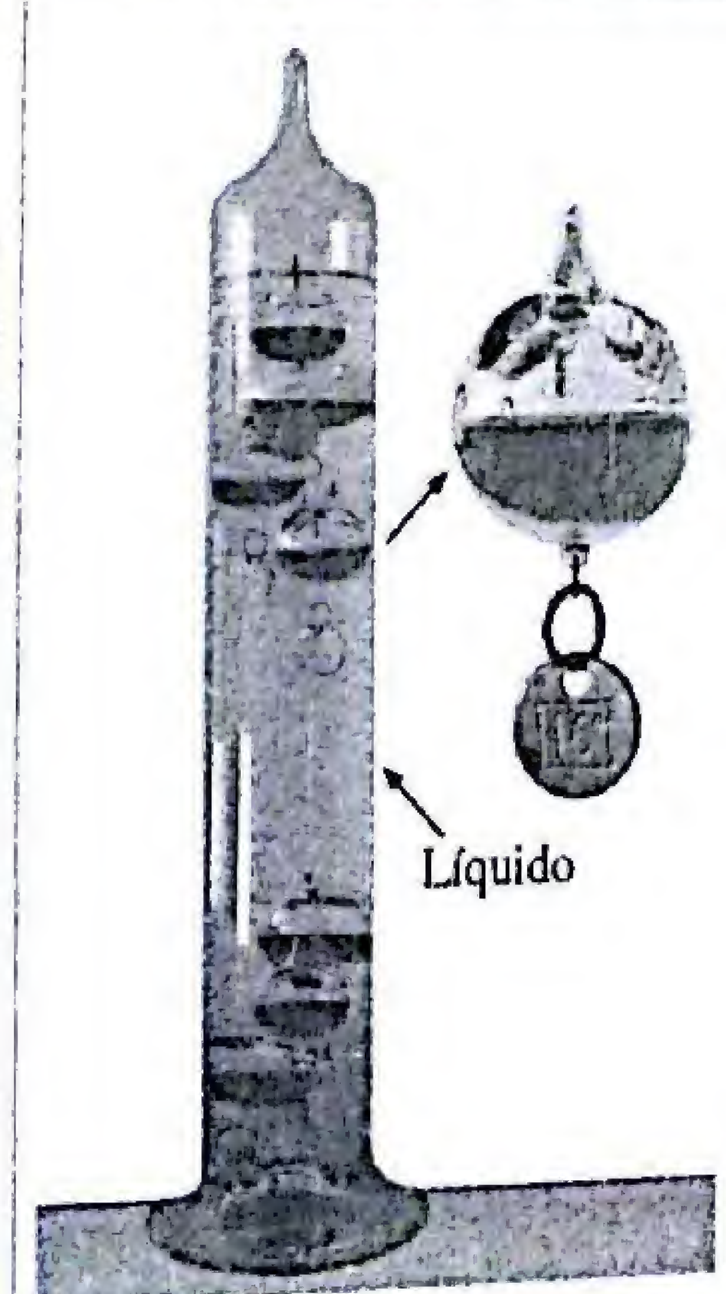
$$F = 2{,}43x10^5 N$$

Respuesta:

$$F = (\frac{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2}{L_1/Y_1 + L_2/Y_2})A\Delta T$$
$$F = 2{,}43x10^5 N$$

PR-3.43. *El termómetro de Galileo*

Este ingenioso termómetro de uso decorativo, consiste en un tubo vertical cerrado de vidrio, que contiene un líquido en el que hay una serie de esferas de vidrio que a su vez contienen agua coloreada. Las esferas tienen etiquetas con valores de temperatura y se desplazan hacia arriba o hacia abajo, según la temperatura baje o suba.



a) ¿En qué se fundamenta su funcionamiento?
b) Suponga que el líquido en el tubo es alcohol etílico, ¿cuál debe ser la masa de una esfera de radio $r = 1$ cm para que flote en equilibrio en la parte superior a 20 °C?
c) Si la temperatura se eleva a 30 °C, la esfera anterior desciende, qué fuerza ejerce sobre el fondo del tubo?

Solución: a) Su funcionamiento esta basado en la variación del volumen de un líquido al variar su temperatura, con la consiguiente variación de la densidad, $\rho = m / v$:

$$\rho(t) = \rho_0 /(1 + \beta\Delta t)$$

Siendo β el coeficiente de expansión térmica. Con ello, la temperatura determina el empuje de Arquímedes del líquido desalojado que equilibra el peso de una esfera.

Supongamos que inicialmente la temperatura del líquido es menor a un cierto valor y las esferas flotan todas en la parte superior. Si ahora la temperatura del líquido aumenta, y la esfera más pesada (con mas agua en su interior) puede llegar a experimentar una fuerza ascensional menor que su peso y se hunde debido a que la densidad del agua se ha hecho menor, mostrando que la temperatura ha sobrepasado la cifra que ella tiene colgada en su plaquita. Si la temperatura sigue aumentando, la siguiente esfera desciende hasta alcanzar a la anterior, y así en secuencia las otras esferas van descendiendo por la misma falta de empuje del líquido.

Si por el contrario, la temperatura disminuye, las esferas ascienden cuando el empuje sea mayor a su peso. El valor de la temperatura del líquido (y de la ambiental), viene indicado por el numero impreso en el flotador más bajo del conjunto posicionado en la parte superior.

b) El peso $m_1 g$ de la esfera está equilibrado por la fuerza de empuje:

$$\sum F_y = \rho V g - m_1 g = 0$$

La masa total de la esfera es:

$$m_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (789{,}45\text{kg/m}^3)(10^{-2}\text{m})^3 = 3{,}307x10^{-3}\text{kg}$$

Alcohol etílico:

$\rho(20°C) = 789{,}45$ kg/m^3

$\rho(30°C) = 780{,}97$ kg/m^3

c) Cuando la esfera descansa en el fondo del tubo, este ejerce una fuerza normal N hacia arriba y en equilibrio:

$$\sum F_y = N + \rho V g - m_1 g = 0$$

Despejando, se obtiene la fuerza que ejerce la esfera sobre el fondo:

$$N = m_1 g - \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g$$

$$N = 3{,}307x10^{-3}\text{kg}x9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{4}{3}\pi(780{,}97\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(10^{-2}\text{m})^3 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$N = 3{,}5x10^{-4}\text{N}$$

Respuesta:

b) $m_1 = 3{,}307$ g
c) $N = 3{,}5x10^{-4}$N

PE-3.01. ***Dos sistemas están a la misma temperatura...***

a) Cuando se enfrían en la misma proporción.

b) Cuando tienen la misma cantidad de calor.

c) Cuando tienen la misma presión y el mismo volumen.

d) Cuando se encuentran en equilibrio térmico entre sí.

e) Cuando al ponerlos en contacto la energía que pierde uno es igual a la energía que gana el otro.

PE-3.02. ***¿Cuál de estas afirmaciones no es verdad?***

a) Para saber si dos sistemas están a la misma temperatura no es necesario que los dos estén en contacto térmico.

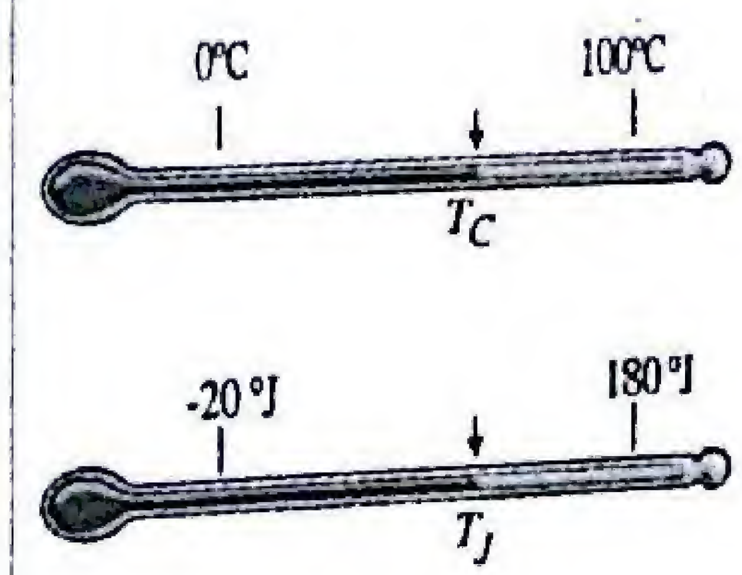
b) Si se ponen en contacto dos sistemas, la temperatura fluye del más caliente al más frío.

c) Un cambio de temperatura de un kelvin es igual a un cambio de un grado Celsius o 9/5 partes de un grado Fahrenheit.

d) La temperatura kelvin de un sistema es proporcional a la energía cinética media de traslación de sus moléculas.

PR-3.03. ***Proponiendo nueva escala de temperaturas***

A Juanita no le gusta ninguna de las escalas de temperatura conocidas y propone una escala en la que asigna al punto de fusión del hielo el valor -20 °J mientras que al de ebullición del agua le atribuyó 180 °J. ¿Cuál será la expresión para convertir una temperatura T_J (escala Juanita) en la correspondiente T_C (escala Celsius).



a) $T_C = 2T_J - 20$

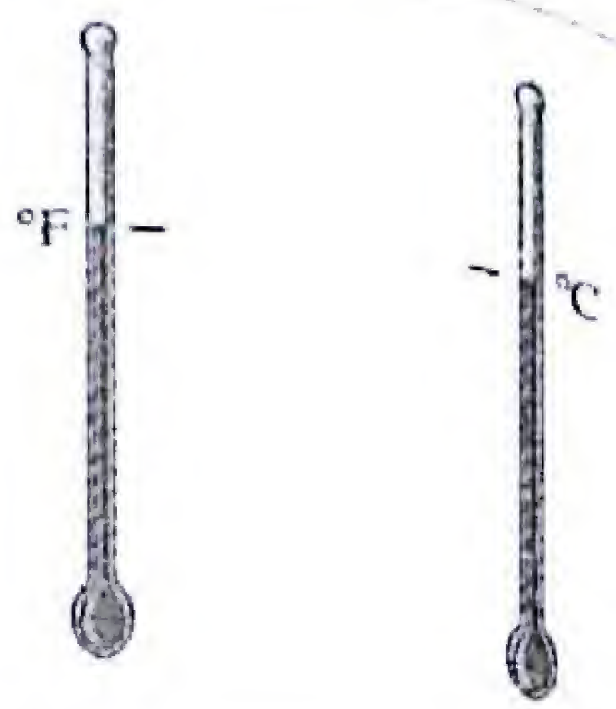
b) $T_C = 4T_J - 180$

c) $T_C = (T_J + 20)/2$

d) $T_C = T_J/2 + 20$

e) $T_C = (T_J - 180)/2$

PE-3.04. *Fahrenheit y Celsius se ponen acuerdo*



Existe una temperatura en la cual un termómetro Celsius y un termómetro Fahrenheit marcan el mismo valor. ¿Cuál es esa temperatura?

a) -40 b) -32 c) +32 d) +9/5 e) -5/9

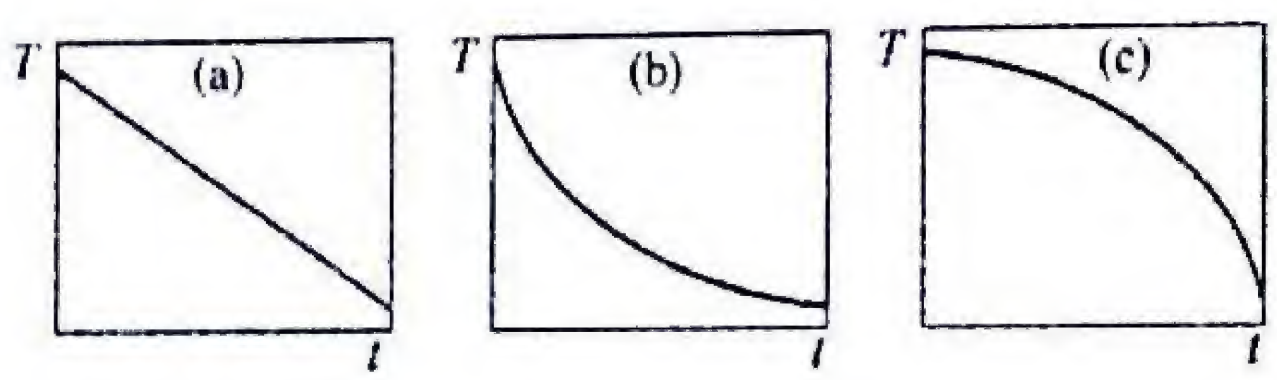
PE-3.05. *¿Cómo se interpreta esta noticia de prensa?*

En una noticia de prensa encontramos la siguiente información: "*Una cápsula espacial será enviada a Plutón, el planeta mas alejado del Sol, allí la temperatura puede alcanzar 380 grados bajo cero*". ¿A qué escala de temperaturas podría estarse refiriendo el periodista que redactó ese texto?

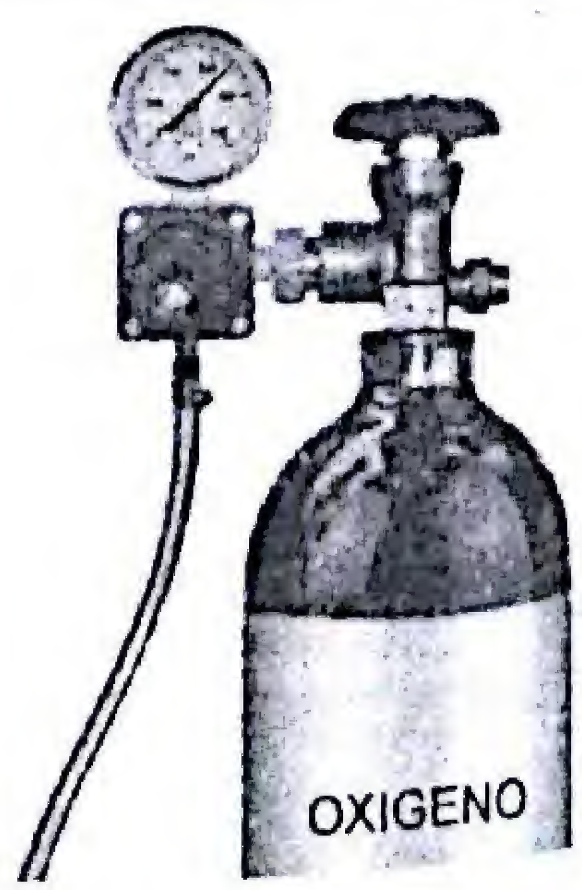
a) La centígrada
b) La Fahrenheit
c) La Kelvin
d) Ninguna de estas tres escalas.

PE-3.06. *Gráfico del enfriamiento del café*

Se sirve café caliente en una taza y se espera que se enfría hasta alcanzar la temperatura ambiente. ¿Cuál de los siguientes gráficas puede representar la temperatura en función del tiempo?



PE-3.07. *¿En cuánto aumenta la presión?*

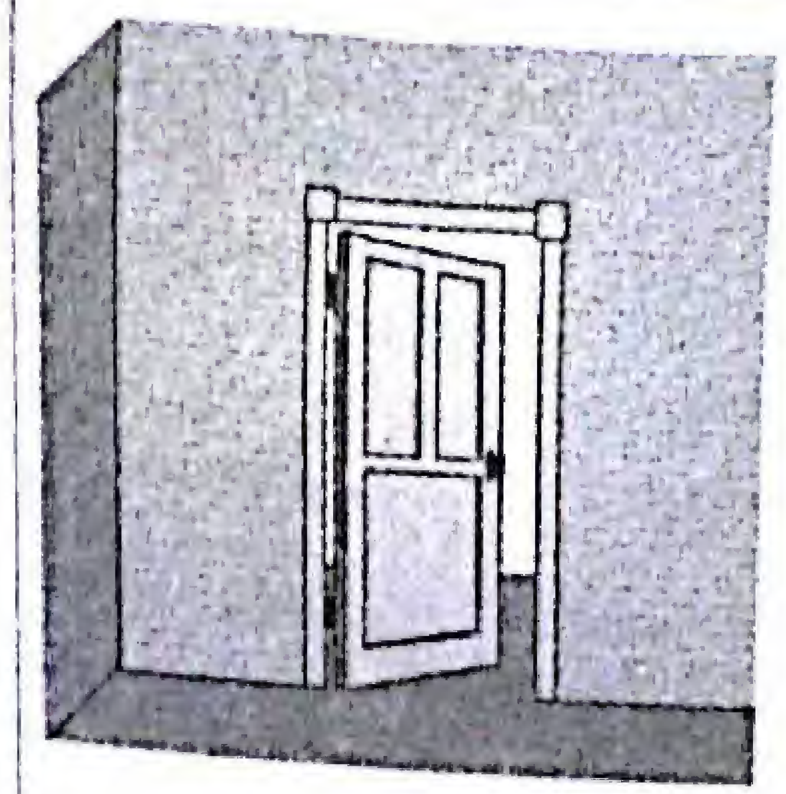


Un cilindro de acero contiene un gas ideal a la temperatura ambiente de 27 °C. ¿En cuánto aumentaría la presión del gas si la temperatura se llegase a incrementar hasta 100 °C?

a) 24 % b) 50 % c) 73 %

d) 100 % e) 370 %

PE-3.08. *¿En cuál habitación hay más cantidad de aire?*



Dos habitaciones idénticas, y sin ventanas están conectadas por una puerta abierta. La temperatura en los dos ambientes es mantenida a diferentes valores. ¿Cuál de las dos habitaciones contiene más aire?

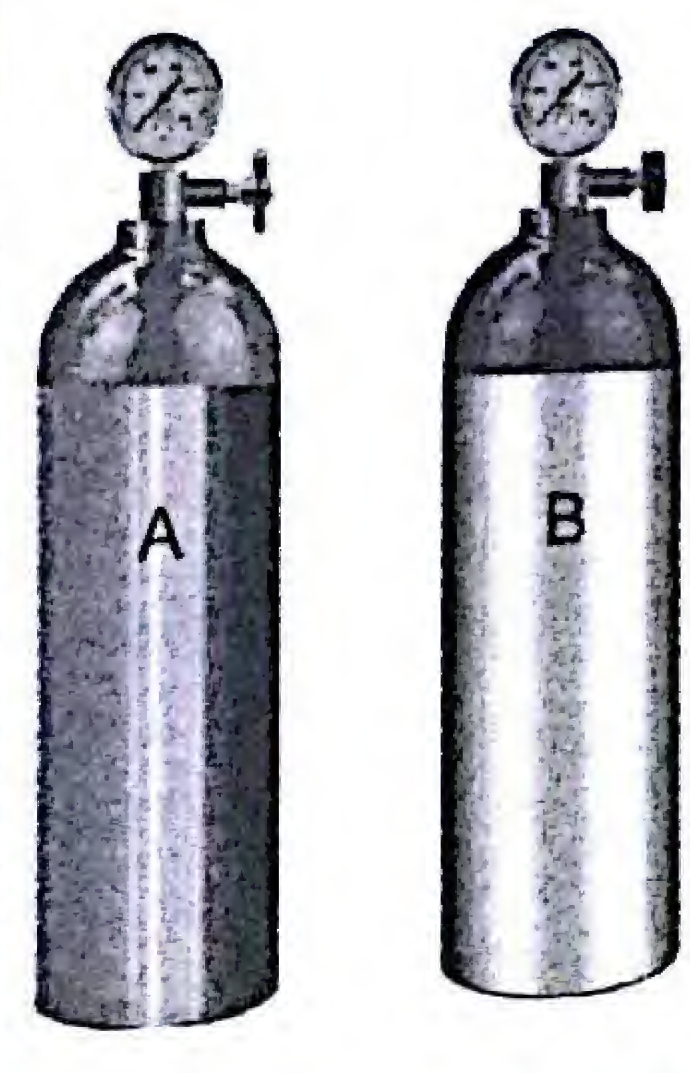
a) La habitación que está a menor temperatura
b) La que está a mayor temperatura
c) La que está a mayor presión.
d) Tienen igual cantidad porque tienen la misma presión.
e) Tienen igual cantidad porque tienen el mismo volumen.

PE-3.09. *Helio e hidrogeno: ¿Cuál está más caliente?*

Si las moléculas en un globo lleno de helio tienen igual rapidez cuadrática media que las moléculas dentro de un globo lleno de hidrógeno, podemos asegurar que:

a) Las temperaturas de los globos son iguales.
b) Las presiones son iguales
c) El hidrógeno está a mayor temperatura.
d) El hidrógeno está a mayor presión.
e) El helio está a mayor temperatura.

PE-3.10. *Comparación entre gases diferentes*



Sean dos recipientes de igual volumen, uno contiene N moléculas de un gas A y el otro contiene $2N$ moléculas de un gas B. Se sabe que las moléculas A son más pesadas que las B y que los dos recipientes están a la misma temperatura. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Las moléculas de A son en promedio más rápidas que las de B
b) Las moléculas de A tienen igual rapidez promedio que las de B.
c) La energía cinética total de las moléculas en A y en B son iguales.
d) La presión del gas A es igual a la del gas B.
e) La presión del gas A es la mitad que la del gas B.

PE-3.11. *¡Dos veces más caliente!*

Un objeto de metal está a la temperatura 0 °C del hielo fundente. Para que el metal esté dos veces más caliente, es decir, que sus átomos dupliquen su energía cinética media, la nueva temperatura debe ser:

a) 0 °C b) 2 °C c) 273 °C

d) 373 °C e) 556 °C

PE-3.12. *Un error en la cinta métrica*

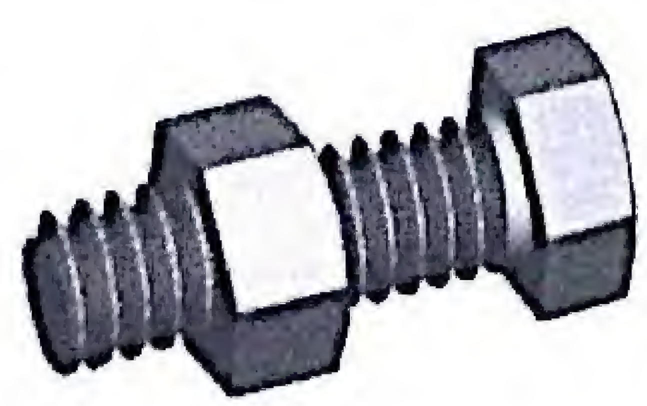
Una cinta métrica de acero fue elaborada con alta precisión a la temperatura de 20°C. Un día fue utilizada para medir una longitud de 100 metros cuando la temperatura era de 38 °C. Por lo tanto, habría que tomar en cuenta que su lectura ha sido incrementada en cerca de:

Acero: $\alpha = 11x10^{-6}/°C$

a) 20 cm, b) 1 cm, c) 2 cm, d) 10 cm, e) 2 mm

PE-3.13. *¿Qué hay que hacer para aflojar esa tuerca?*

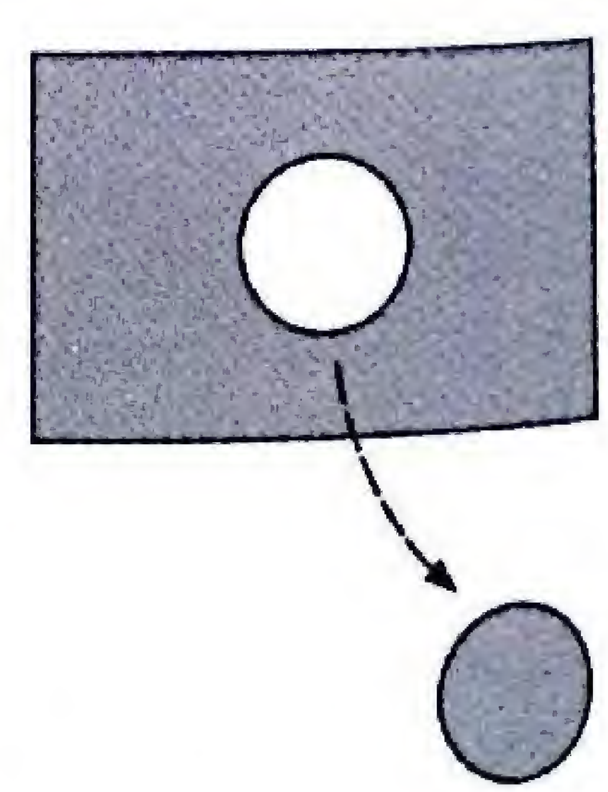
Una tuerca se encuentra muy apretada en un tornillo. La tuerca y el tornillo están hechas del mismo material. ¿Con cuál de las siguientes operaciones será más fácil sacar la tuerca del tornillo?



a) enfriando
b) calentando
c) ni calentando ni enfriando
d) calentando o enfriando.

PE-3.14. *¿Qué sucederá al agujero de la placa?*

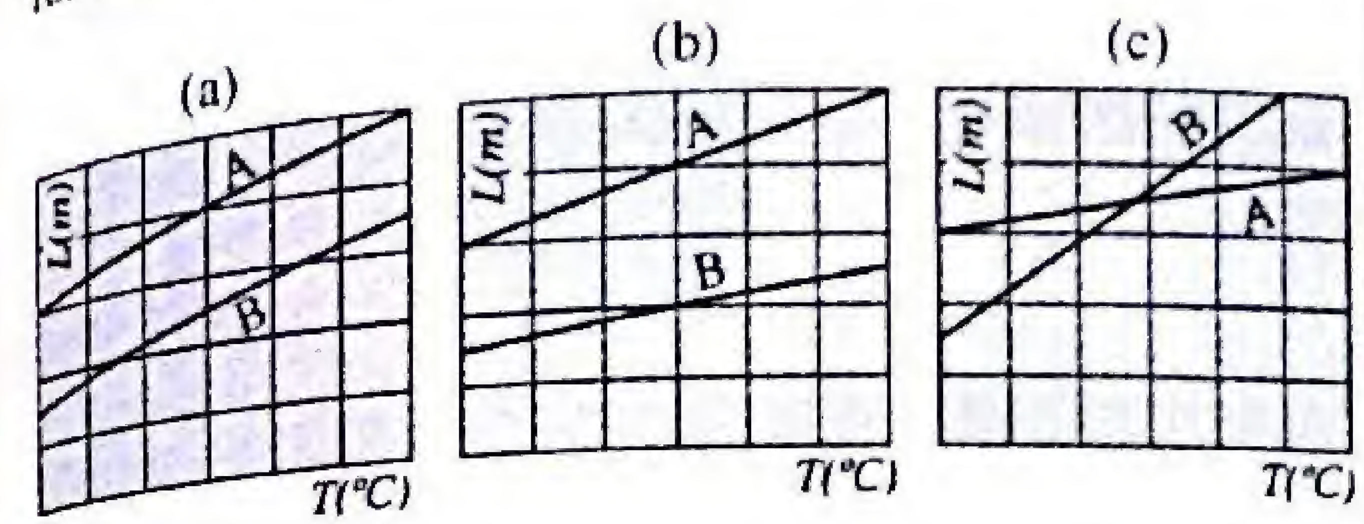
A una placa metálica se le hace un orificio circular. Cuando calentamos la placa desde 25°C hasta 50°C, ¿qué le sucede al diámetro del orificio?



a) permanece igual.
b) se duplica.
c) se reduce a la mitad
d) aumenta un poco.
e) disminuye un poco.

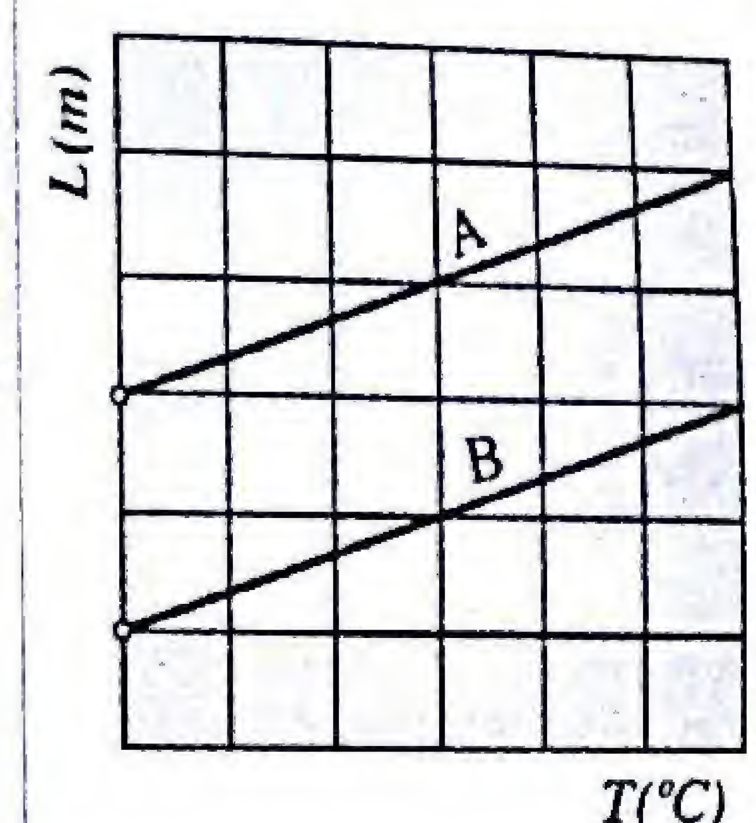
PE-3.15. *¿Cuál sería el gráfico correcto?*

Sean dos barras metálicas A e B que están hechas del mismo material (es decir, $\alpha_A = \alpha_B$) son calentadas a partir de 0 °C. ¿Cuál de los tres gráficos muestra correctamente cómo varía la longitud de las barras en función de la temperatura?



PE-3.16. *Comparación de coeficientes de dilatación*

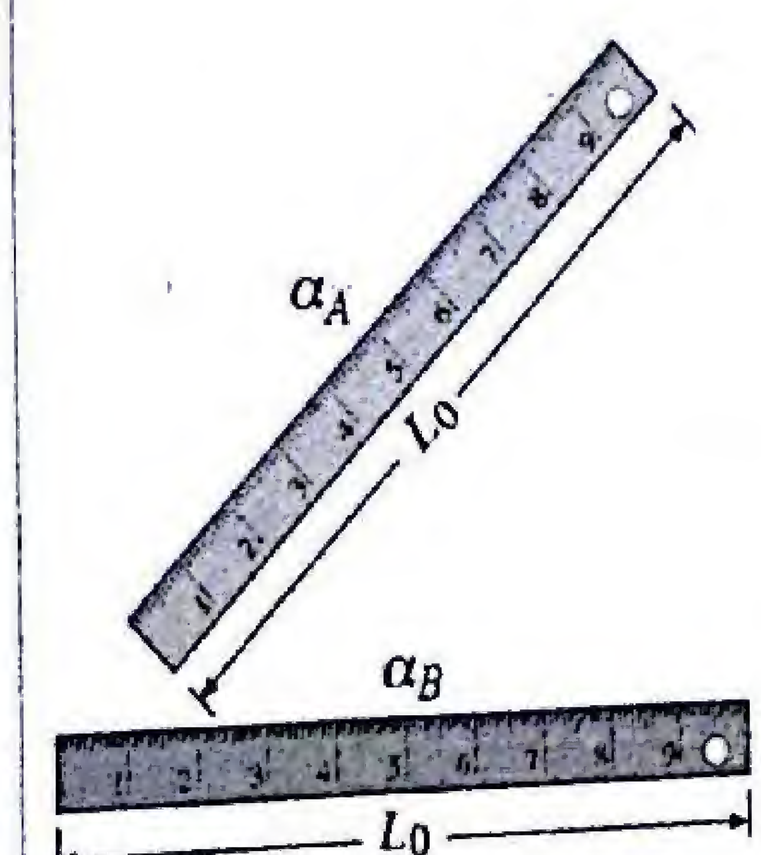
La gráfica muestra la longitud en función de la temperatura correspondientes a dos barras metálicas diferentes A y B. Si comparamos los coeficientes de dilatación lineal de estas barras, podemos concluir que:



a) $\alpha_A = \alpha_B$ b) $\alpha_A > \alpha_B$ c) $\alpha_A < \alpha_B$

PE-3.17. *Reglas metálicas con distintas dilataciones*

Sean dos reglas de materiales diferentes que tienen la misma longitud L_0 a la temperatura T_0. Cuando a ambas se les incrementa la temperatura en ΔT, la longitud de la regla B se hace mayor que la de la regla A en una cantidad ΔL. ¿Cómo están relacionados sus coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B?



a) $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{\Delta L \Delta T}{L_0}$ b) $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{L_0 \Delta T}{\Delta L}$ c) $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{\Delta L}{L_0 \Delta T}$

d) $\alpha_B - \alpha_A = \dfrac{L_0 \Delta T}{\Delta L}$ e) $\alpha_B - \alpha_A = \dfrac{\Delta L}{L_0 \Delta T}$

PE-3.18. *El tapón de la botella salió disparado*

Una botella de licor se cierra herméticamente a la presión de 1,25 atm y a la temperatura de 27 °C. La botella se calentó y el tapón salió disparado. Sabiendo que la fricción entre el vidrio y el tapón es tal que éste sale despedido cuando la presión alcanza un valor de 1,50 atm, ¿hasta qué temperatura se calentó la botella?

a) 32,4 °C b) 43,5 °C c) 94 °C

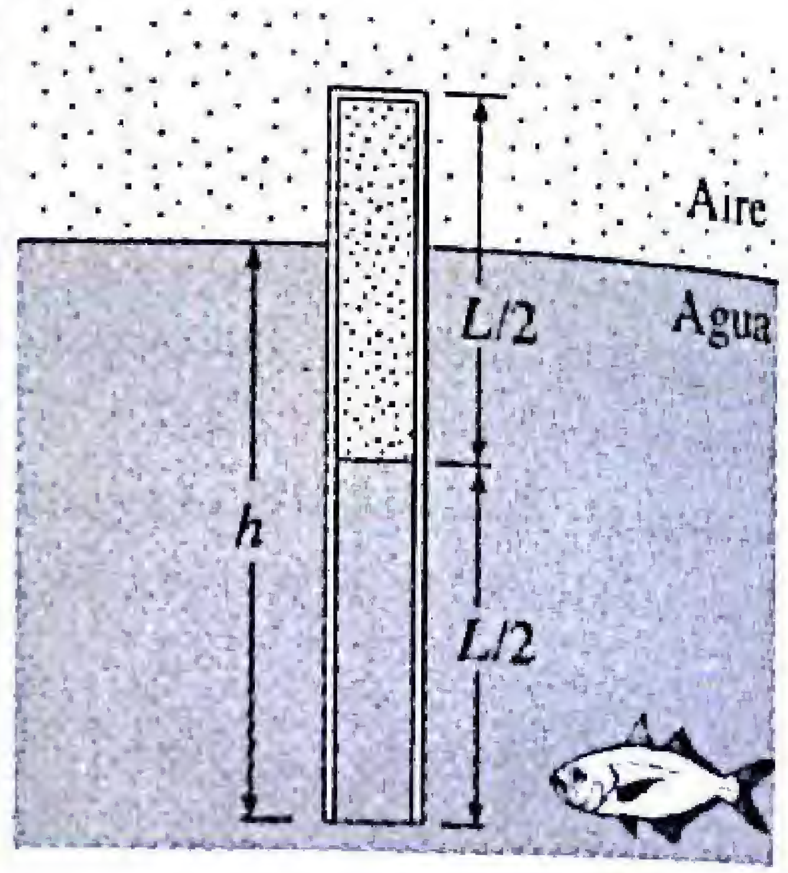
d) 87 °C e) 100 °C

PE-3.19. *Aire atrapado en un tubo sumergido*

Un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro de longitud $L = 27{,}4$ m contiene aire a la presión atmosférica. ¿A qué profundidad h hay que introducirlo verticalmente en un lago de agua dulce para que el agua penetre hasta la mitad del tubo? Suponga que la temperatura no cambia.

a) $h = 27{,}4$ m, b) $h = 12{,}0$ m, c) $h = 23{,}7$ m,

d) $h = 24{,}0$ m e) Es imposible.

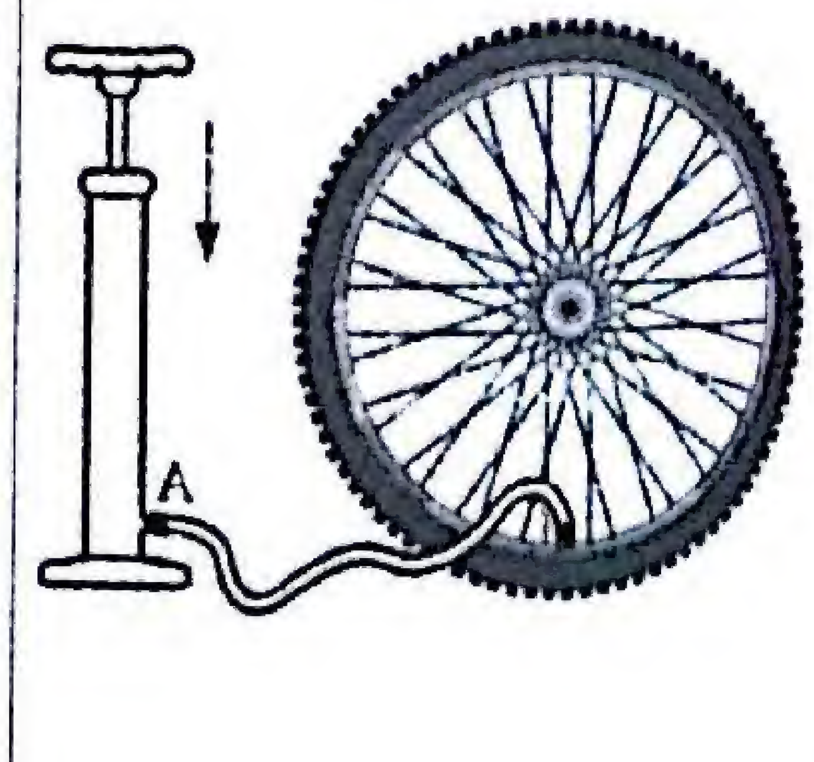


PE-3.20. *Inflando un caucho de bicicleta*

Mediante una bomba de bicicleta se transfiere el aire al caucho de la bicicleta a través de una válvula A que impide su regreso en sentido inverso. La operación se realiza de manera isotérmica y el volumen de la cámara de la bomba descomprimida es V_0 a la presión atmosférica P_0. Partiendo con el caucho vacío, ¿cuántas compresiones N de la bomba serán necesarias efectuar para lograr llenar el volumen $V = 10V_0$ del caucho con una presión $P = 2P_0$?

a) $N = 2$, b) $N = 5$, c) $N = 10$

d) $N = 16$ e) $N = 20$

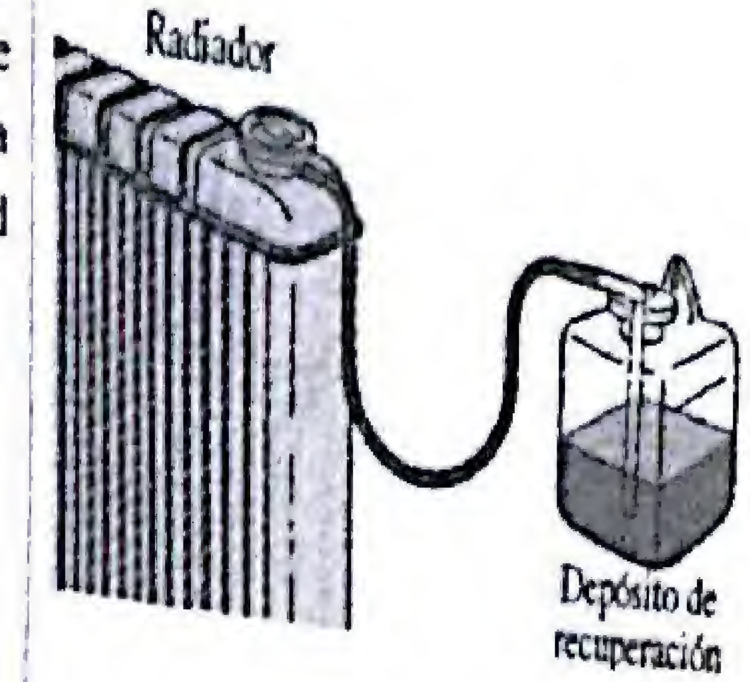


PE-3.21. *Derrame de agua del radiador recalentado*

El radiador de un carro está lleno con 6,5 litros de agua a 25 °C. El carro se recalienta y la temperatura del agua se eleva a 95°C. Si el coeficiente de expansión volumétrica del agua a esta temperatura es 550×10^{-6}/ °C, qué cantidad de agua se derrama hacia el deposito de recuperación?

a) 0,25 litros, b) 0,50 litros, c) 0,75 litros,

d) 1,0 litro, e) 1,5 litros.



PE-3.22. *Moléculas en los soplidos para inflar el globo*

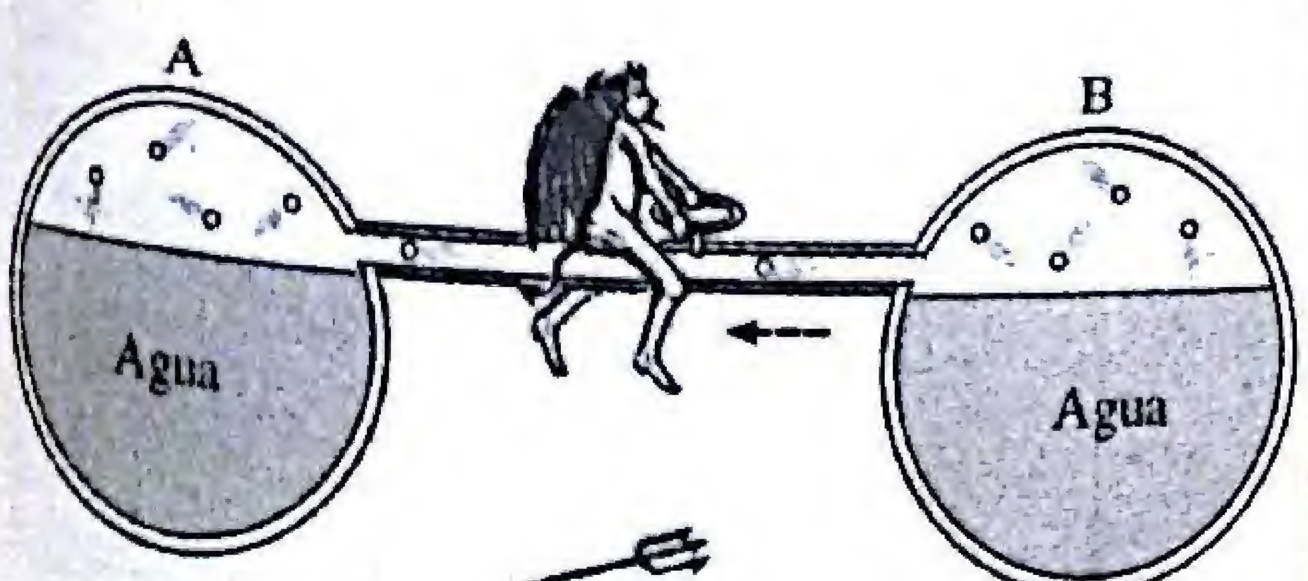
Una niña ha inflado un globo esférico hasta un radio de 10 cm y tuvo que dar 20 soplidos. La temperatura es de 30 °C y la presión interna del globo es igual a la atmosférica de 1 atm. ¿Cuántos moléculas tuvo que suministrar la niña al globo en cada soplido?

a) $N = 5x10^{19}$, b) $N = 2{,}5x10^{23}$ c) $N = 5x10^{24}$.

d) $N = 2{,}5x10^{26}$, e) $N = 5x10^{21}$

PE-3.23. *El diablo de Maxwell selector de velocidades:*

En un experimento hipotético propuesto por Maxwell, dos recipientes A y B que están aislados térmicamente contienen agua a igual temperatura, y se comunican por un tubo con una llave. Un diminuto *diablo* gobierna la llave, abriéndola sólo cuando observa una molécula rápida del vapor de agua de B que va hacia A o cuando una lenta viene del vapor de agua de A hacia B.



Como resultado de esta selección de velocidades de las moléculas, al cabo de un tiempo lo que se conseguiría es que...

a) El agua en A hierve y el agua en B se congela.

b) El agua en B hierve y el agua en A se congela.

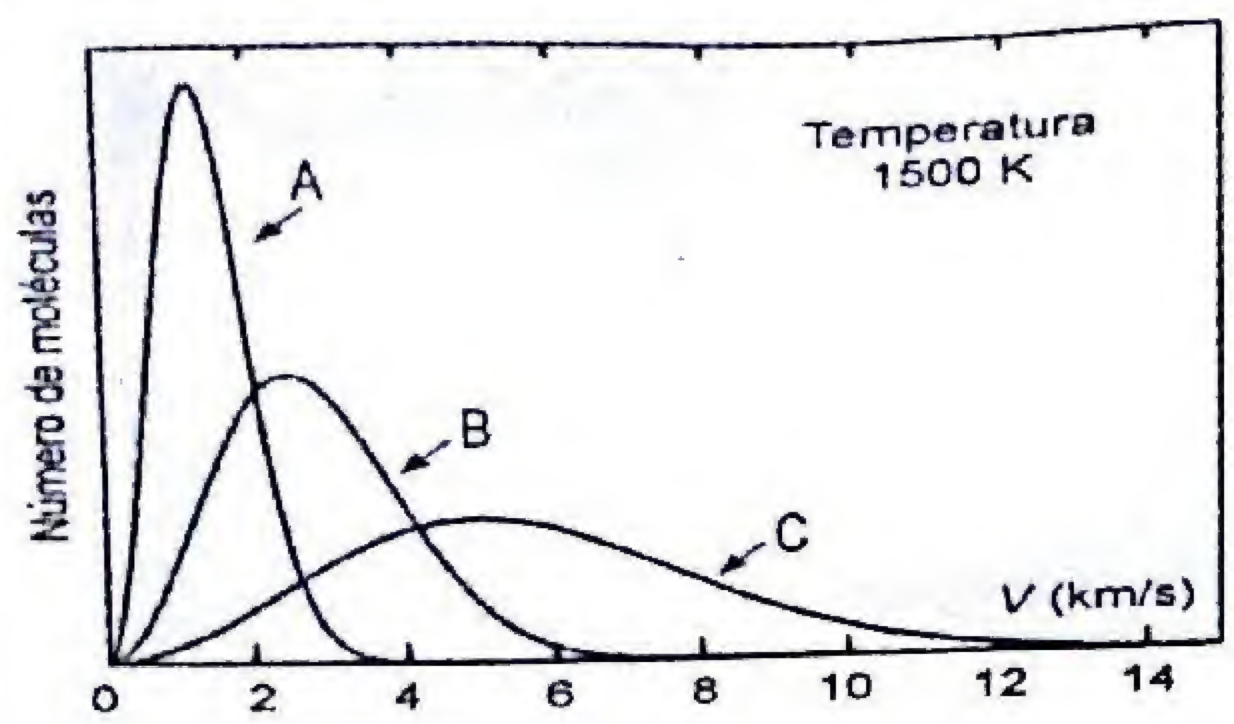
c) Se congela el agua en A y en B

d) Hierve el agua en A y en B

e) Todo siga igual

PE-3.24. *Helio, hidrógeno y oxigeno: ¿Cuál es cuál?*

En una práctica de laboratorio, un estudiante midió la distribución de velocidades moleculares (en km/s) a la temperatura T = 1500 K, para tres gases diferentes: Helio, hidrógeno y oxígeno.



En la gráfica del informe que el estudiante entregó al profesor se le olvidó escribir cuál gas correspondía a cada curva. Diga Ud. cuál es cuál:

a) A helio, B hidróg., C oxíg.
b) A helio, B oxíg., C hidróg.
c) A oxíg, B helio, C hidróg.
d) A hidróg. B helio, C oxíg.
e) A oxíg, B hidróg., C helio.

CAP. 3: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
3.01				✓	
3.03			✓		
3.05		✓			
3.07	✓				
3.09					✓
3.11			✓		
3.13		✓			
3.15		✓			
3.17					✓
3.19				✓	
3.21	✓				
3.23	✓				

	a	b	c	d	e
3.02		✓			
3.04	✓				
3.06		✓			
3.08	✓				
3.10					✓
3.12			✓		
3.14				✓	
3.16			✓		
3.18				✓	
3.20					✓
3.22					✓
3.24			✓		

JAMES P. JOULE

1818 - 1889

Físico británico nacido en Lancashire, de una próspera familia cervecera. Estudió en la Universidad de Manchester. Fue director de la fábrica de cerveza, pero estaba afectado por una dolencia espinal desde su nacimiento y tuvo que abandonar el negocio familiar para dedicarse a la investigación. De carácter tímido y humilde, recibió clases particulares en su propio de hogar de física y matemáticas, siendo su profesor el químico británico John Dalton quien le alentó hacia la investigación científica. Realizó sus primeros experimentos trabajando en un laboratorio en su propia casa. Joule llevó a cabo una serie de experimentos que establecieron quizás la primera prueba convincente de una de las leyes mas importantes de la física: la conservación de la energía. En 1841 descubrió, lo que hoy conocemos como el efecto Joule, es decir, la ley que regula el desprendimiento de calor en un conductor por el que pasa una corriente eléctrica. Esta ley dice que en todo hilo conductor recorrido por una corriente eléctrica, se desprende una cantidad de calor equivalente al trabajo realizado por el campo eléctrico para transportar dicha corriente. La cantidad de calor desprendida es proporcional a la resistencia del conductor y al cuadrado de la intensidad de la corriente ($P = I^2R$). Desde 1840 se propuso determinar el equivalente mecánico del calor, es decir, la cantidad de energía térmica equivalente a un determinado trabajo mecánico. Joule empleó un aparato que consiste de una vasija con agua que contiene un eje giratorio con varias paletas. Un contrapeso que cae hace que giren las paletas y el trabajo efectuado por el peso en su descenso era transformado en calor de rozamiento que eleva la temperatura del agua. Joule concluyó que la equivalencia era 4,24 Joules/caloría, valor que está dentro del 1% del aceptado actualmente (4,19 Joules/caloría). En 1848 publicó un articulo referente a la teoría cinética de los gases, donde por primera vez se estimaba la velocidad de las moléculas gaseosas. En colaboración con William Thomson (Lord Kelvin), llegó al descubrimiento del efecto Joule-Thomson, según el cual un gas real al expandirse adiabáticamente, se enfría aunque no realizase trabajo externo alguno. Ello posibilitó posteriormente la licuefacción de los gases y estableció que la energía interna de un gas perfecto es independiente de su volumen y dependiente de la temperatura. También estudió aspectos relativos a la imantación del hierro por la acción de corrientes eléctricas y descubrió el fenómeno de magnetostricción, que aparece en los materiales ferromagnéticos, en los que su longitud depende de su estado de magnetización. La ciencia ha perpetuado su memoria designando en su honor con la palabra *Joule* a la unidad de trabajo y energía, el newton-metro (N.m).

4

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La termodinámica estudia procesos que implican intercambios de energía entre las partículas de una porción de materia (sistema) y sus alrededores, analizándolos sin la consideración explícita de su estructura atómica o molecular. La primera ley de la termodinámica amplía el concepto de conservación de la energía para incluir la energía interna, el calor y el trabajo. La *energía interna* de un sistema está constituida por la energía cinética, asociada al movimiento aleatorio de translación, rotación o vibración de sus átomos y moléculas mas la energía potencial asociada a la interacción entre sus partículas constituyentes. Cuando el sistema interacciona con su entorno, puede ocurrir una variación de su energía interna. Existen dos mecanismos para modificar la energía interna: mediante la realización de un *trabajo* o por transferencia de *calor*. Un sistema realiza *trabajo* sobre su entorno cuando en la interacción su volumen cambia. El calor se refiere a un intercambio de energía entre el sistema y su entorno como resultado de muchas colisiones moleculares aleatorias sin que cambie su volumen. La primera ley establece que el cambio de energía interna de un sistema es igual al calor absorbido menos el trabajo realizado por el sistema. La transferencia de calor tiene lugar de una región de temperatura superior a otra de temperatura inferior en tres formas diferentes: conducción, convección y radiación.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Calor
- Trabajo
- Primera Ley de la Termodinámica
- Energía Interna de un Gas Ideal
- Equipartición de la energía
- Calores específicos
- Procesos termodinámicos
- Transferencia de Calor

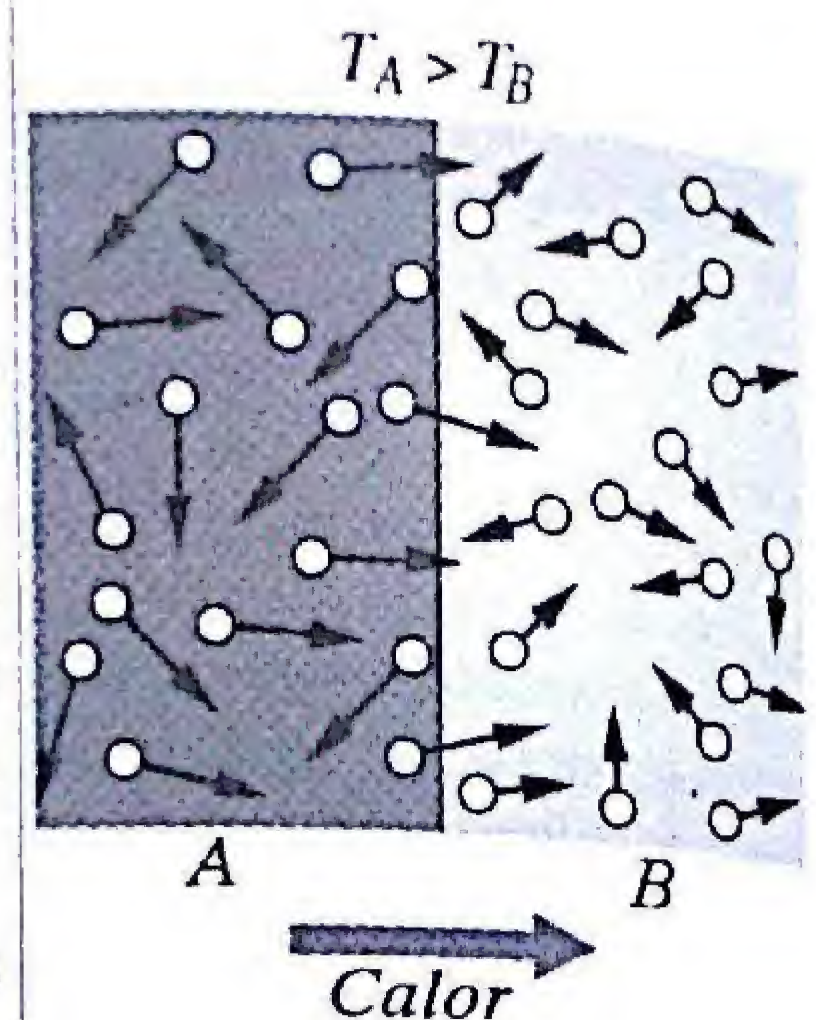
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

CALOR

Hemos visto en el capítulo anterior que la temperatura de un sistema es una cantidad proporcional a la energía cinética media de translación de sus moléculas. Si ponemos en contacto térmico un sistema A, con otro, B, que está a una temperatura más baja, habrá una transferencia de energía del primero al segundo. El sistema más caliente cede energía y se enfriará mientras que el sistema frío pasará a estar más caliente. Después de un tiempo, cuando sus temperaturas llegan a ser iguales, entonces el flujo de energía cesará. Decimos que:

Calor es el proceso de transferencia de energía de un sistema a otro, en virtud únicamente de la diferencia entre sus temperaturas

La *temperatura* es el parámetro que determina si un cuerpo transferirá (o no) energía térmica a otro cuerpo, mientras que *calor* es la energía transferida entre dos cuerpos, como resultado de la diferencia de temperaturas.



Diferencia entre conceptos de calor y temperatura

Por tradición, tanto en el léxico común, como en los libros de texto, se acostumbra emplear términos como "transferencia de calor", "flujo de calor", "calor absorbido", "calor suministrado", etc. Inevitablemente para ser explícitos seguiremos usando esta terminología que es redundante, ya que "calor", por si sólo, implica una energía en tránsito. Conceptualmente, sería erróneo decir "tengo calor" o que un sistema "contiene" o ha "almacenado" cierta cantidad de calor; lo que posee el sistema es *energía interna*.

Estrictamente, el término *calor* debe usarse en un contexto similar al de trabajo, como un *método* de transferencia de energía. Queda entendido que cuando hablemos de calor o de *energía calorífica* estará implícito que nos referimos a la remoción o adición de energía interna de un sistema.

Calor no es algo que se pueda retirar ni entregar

Los cuerpos no poseen calor

Calor es un proceso para transferir energía

UNIDAD SI DE CALOR

Como el calor corresponde a una energía en tránsito, se puede expresar como las pérdidas o ganancias de energía y por lo tanto se mide en las mismas unidades que la energía.

Unidad SI de calor: el Joule (J).

Otra unidad de calor es la caloría (1 cal), la cual se define como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura en 1 °C de un gramo de agua entre 14,5 °C y 15,5 °C.

1 Caloría = 4,186 J

Una unidad 1000 veces mayor es la caloría *dietética*, que es usada para especificar el valor energético de los alimentos.

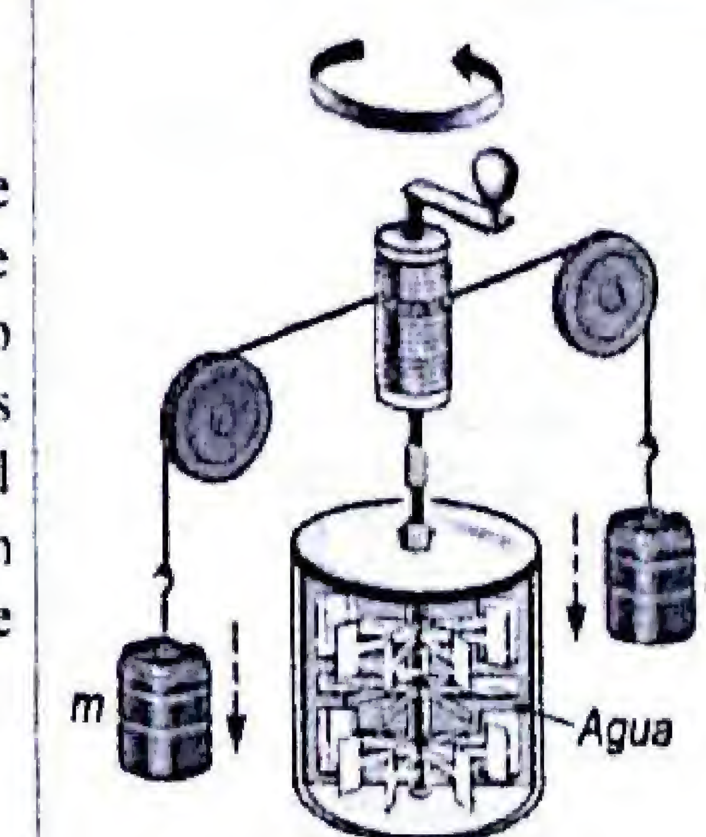
1 caloría dietética = 1000 calorías
= 4186 J

EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR

La idea de que el calor se relaciona con la energía fue demostrada originalmente mediante el experimento de Joule. Dos pesas que descienden hacen girar un conjunto de paletas que se utilizan para agitar el agua. Si las dos pesas caen una altura h , la pérdida de la energía potencial $2mgh$ es igual al trabajo de las paletas que por fricción elevan la temperatura del agua. De esta manera se encontró que:

$$1 \text{ Caloría} = 4{,}186 \text{ J}$$

Este se conoce como el equivalente mecánico del calor.



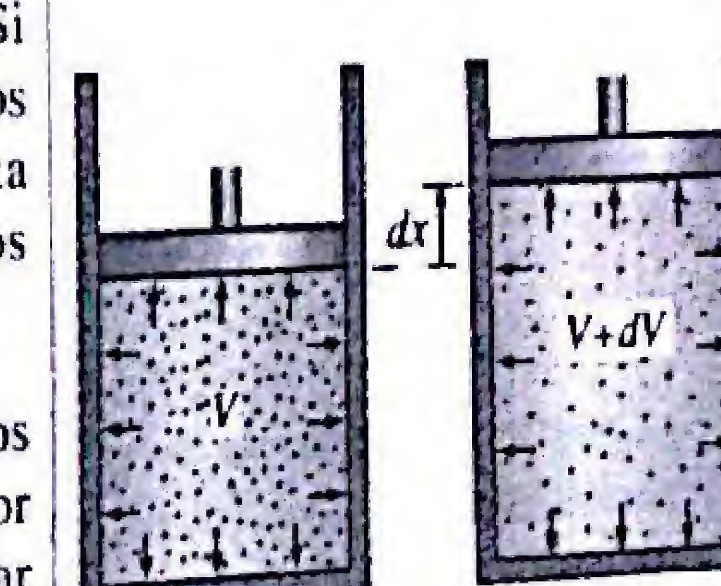
Experimento de Joule

CALOR Y TRABAJO

Cuando existe una diferencia de temperatura entre un sistema y su entorno, ocurre una transferencia de energía como producto de los choques individuales de las moléculas del sistema con las moléculas de su entorno. Si la frontera del sistema es rígida, la suma de estos trabajos microscópicos no puede expresarse como una fuerza media por un desplazamiento. El resultado de estos trabajos microscópicos es lo que denominamos *calor*.

En el caso de una frontera móvil, una parte de los trabajos microscópicos puede ser expresado como una fuerza por un desplazamiento medio y en este caso podemos hablar de la realización de un *trabajo* en el sentido macroscópico. Un sistema realiza trabajo sobre su entorno cuando su volumen cambia.

Calor es un trabajo térmico a nivel microscópico



Trabajo macroscópico De un gas sobre un pistón

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

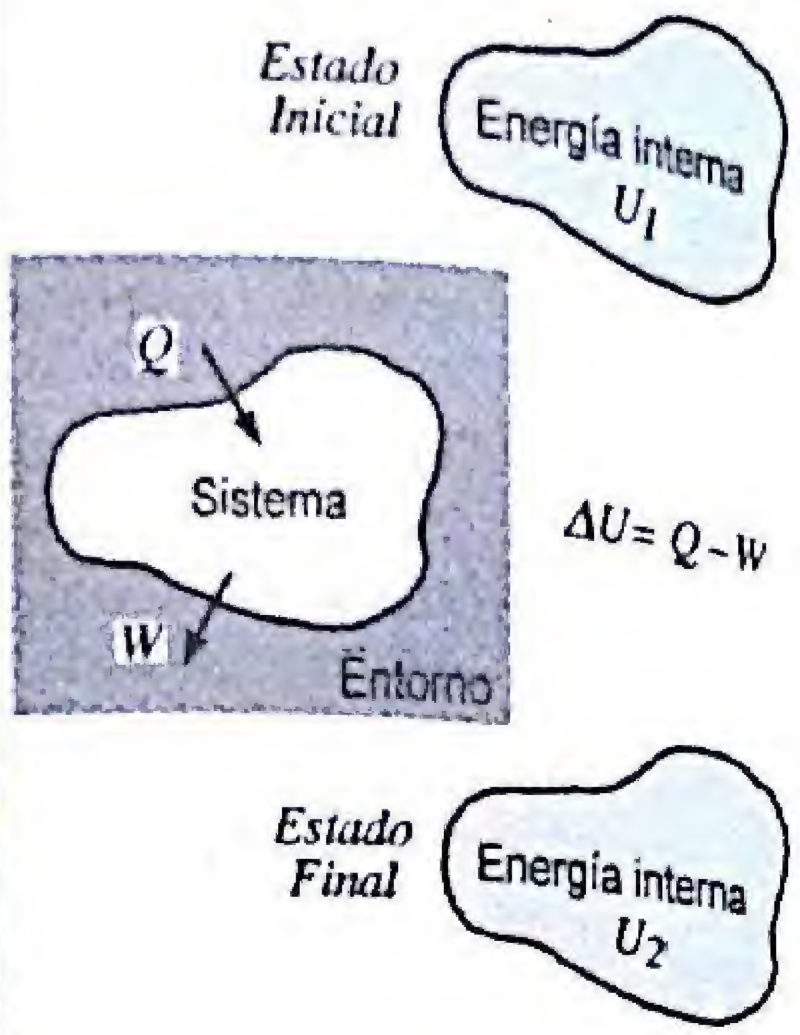
La primera ley de la termodinámica no es más que una generalización de la ley de conservación de la energía:

Cuando cierta cantidad de calor Q es transferida a un sistema y un trabajo W es realizado por dicho sistema, su variación de energía interna, es:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - W$$

Observe que en esta expresión está implícito que si:

Q *es positivo* → el sistema *absorbe* calor.
W *es positivo* → el sistema *realiza* trabajo.
ΔU *es positivo* → su *energía interna aumenta*.



LA ENERGÍA INTERNA

En la primera ley de la termodinámica no se especifica el valor de la energía interna del sistema, sólo importa *su variación*, ΔU. La energía interna está constituida por:

a) La energía cinética del movimiento aleatorio de átomos y moléculas, que depende de la temperatura *o energía térmica*.
b) La energía potencial asociada a la interacción eléctrica. en los reagrupamientos atómicos o *energía química*
c) La energía asociada a *interacciones nucleares*.

La energía interna no depende del movimiento del sistema ni de su posición con relación a otros sistemas.

ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

En el modelo de gas ideal las moléculas son consideradas como partículas puntuales que no interaccionan entre sí. La energía interna de un *gas ideal* constituido por N moléculas monoatómicas (o n moles) consiste únicamente de la energía cinética total de traslación:

La energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura

$$U = 3N(\frac{1}{2}kT) = 3n(\frac{1}{2}RT)$$

Gas monoatómico

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

A cada grado de libertad de la molécula (traslación x, y, o z), le corresponde una cantidad igual de energía ($RT/2$). Esto se conoce como el teorema de equipartición:

La energía de un sistema en equilibrio térmico se reparte por igual entre todos sus grados de libertad

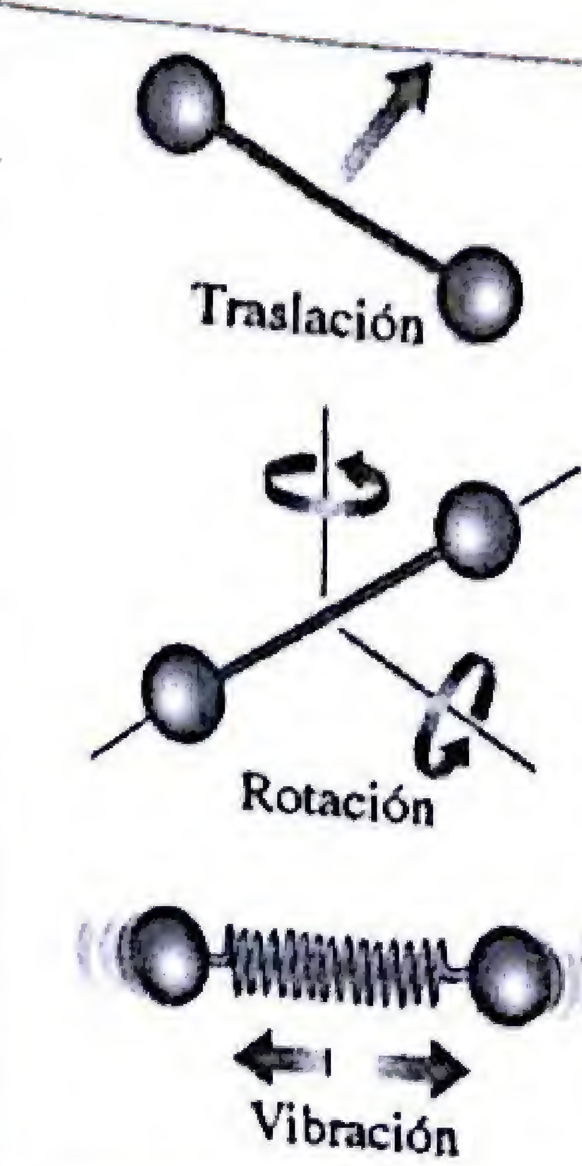
Teorema de equipartición de la energía

Una molécula diatómica rígida tiene 5 tipos de movimientos posibles o grados de libertad: 3 de translación mas 2 de rotación. La energía interna es:

$$U = 3(\frac{1}{2}nRT) + 2(\frac{1}{2}nRT) = \frac{5}{2}nRT$$

En el caso en que la molécula diatómica sea no-rígida, también tiene libertad para vibrar, lo que le daría un total de 7 (= 3 + 2 + 2) grados de libertad.

Sin embargo, los modos vibracionales normalmente solo se observan en estas moléculas a altas temperaturas.



EL CALOR ESPECÍFICO

El calor necesario para producir un cambio de temperatura ΔT de un gas resulta proporcional tanto al número n de moles como al cambio ΔT:

$$Q = nc\Delta T$$

$Q = nc\Delta T$

La constante de proporcionalidad c, se denomina *calor específico molar* de la sustancia. El calor específico de una sustancia no tiene un valor único y depende de la naturaleza del proceso empleado.

Calor específico molar
c (J/mol·K)

En el problema PR-4.19 se demuestra que para un gas ideal el calor específico *a presión constante* c_p *es mayor que a volumen constante*, c_V.

$c_p - c_V = R$

CALORES ESPECÍFICOS DE UN GAS IDEAL

Si se mantiene el *volumen constante* de un gas mientras se le transfiere una cantidad de calor Q, no puede realizar trabajo ($W = 0$) y de acuerdo a la primera ley, el calor va íntegramente a incrementar su energía interna: $Q = \Delta U$. El calor específico molar a volumen constante es:

$$Q = nc_V\Delta T \quad \Rightarrow \quad c_V = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta U}{n\Delta T}$$

Para un gas ideal la energía interna es una función únicamente de la temperatura. Si el gas es monoatómico:

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

Calores específicos de gases ideales

Gas	Mono *(Trasl)*	Diatómico *(Trasl + Rot)*
c_V	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
c_p	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$

Sustituyendo ΔU en la expresión anterior obtenemos:

Calor específico a volumen constante: $c_v = \frac{3}{2}R$

Calor específico a presión constante: $c_p = c_v + R = \frac{5}{2}R$

CAMBIO DE FASE Y CALOR LATENTE

Hay situaciones en que la transferencia de energía térmica no altera la temperatura de un cuerpo. Este es el caso cuando cambian sus características físicas, conocido como cambio de fase. Algunos cambios comunes son:

sólido ⇔ líquido ⇔ gas

Para el agua:

Calor de Fusión del hielo:
$L_f = 333$ kJ/kg

Calor de vaporización:
$L_v = 2260$ kJ/kg

Cuando ocurre un cambio de fase las moléculas de la sustancia se reacomodan al añadir o extraer energía térmica. La energía térmica necesaria para cambiar la fase de una dada masa m de una sustancia es:

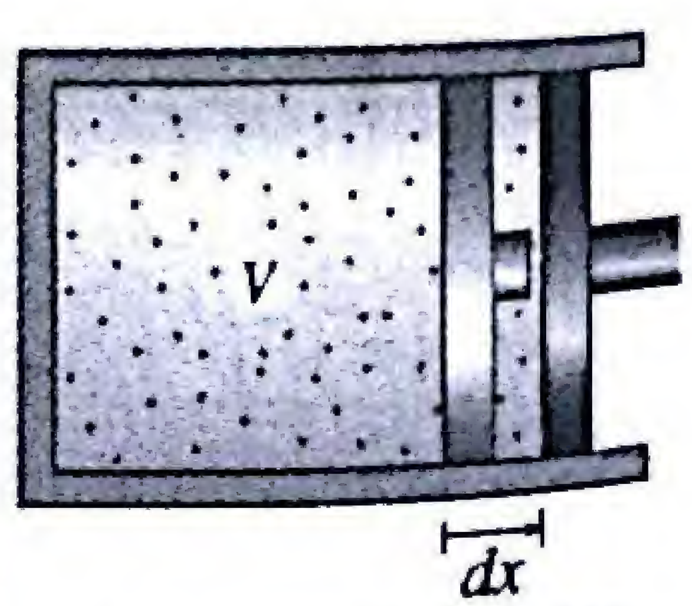
$$Q = mL$$

Donde L recibe el nombre de *calor latente* o *calor de transformación* de la sustancia.

PROCESOS TERMODINÁMICOS

En un proceso termodinámico *cuasiestático* el sistema evoluciona desde un estado inicial hasta alcanzar un estado final, pasando por una sucesión de estados intermedios de equilibrio.

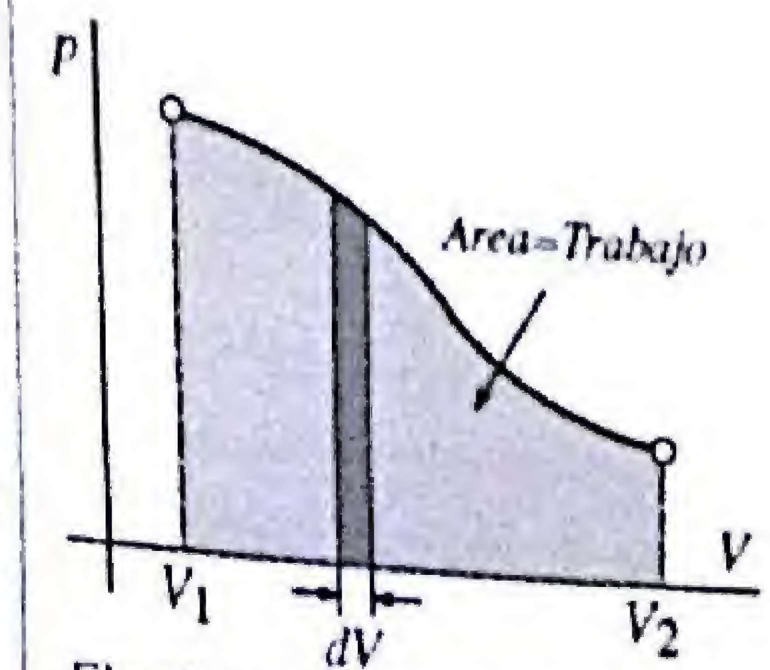
En un diagrama p-V, los estados de equilibrio pueden representarse por puntos que siguen una curva continua. El otro parámetro, la temperatura T, para un gas ideal, viene dado por la ecuación de estado, $PV = nRT$.



Gas en un cilindro con un émbolo móvil

Supongamos un gas contenido en un cilindro con un émbolo móvil, que se expande en forma suficientemente lenta para estar todo el tiempo esencialmente en equilibrio. La fuerza ejercida por el gas es $F = pdA$ y el trabajo realizado a medida que el émbolo se desplaza una distancia dx, es:

$$dW = Fdx = pAdx = pdV$$



El trabajo es igual al área bajo la curva del diagrama p-V

El trabajo total cuando el volumen del gas cambia desde V_I hasta V_2 es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

Note que en el diagrama p-V, el trabajo es igual al área bajo la curva.

Existe un número infinito de procesos que podrían conectar los mismos puntos inicial y final. El trabajo efectuado dependerá no sólo de esos estados sino también del camino seguido. Por eso decimos que el trabajo W (al igual que el calor Q) no es una función del estado del sistema. En cambio, la variación de energía interna ΔU si lo es, ya que esta no depende de la trayectoria seguida por los estados intermedios y es una función únicamente de las temperaturas inicial y final.

ΔU es independiente del camino

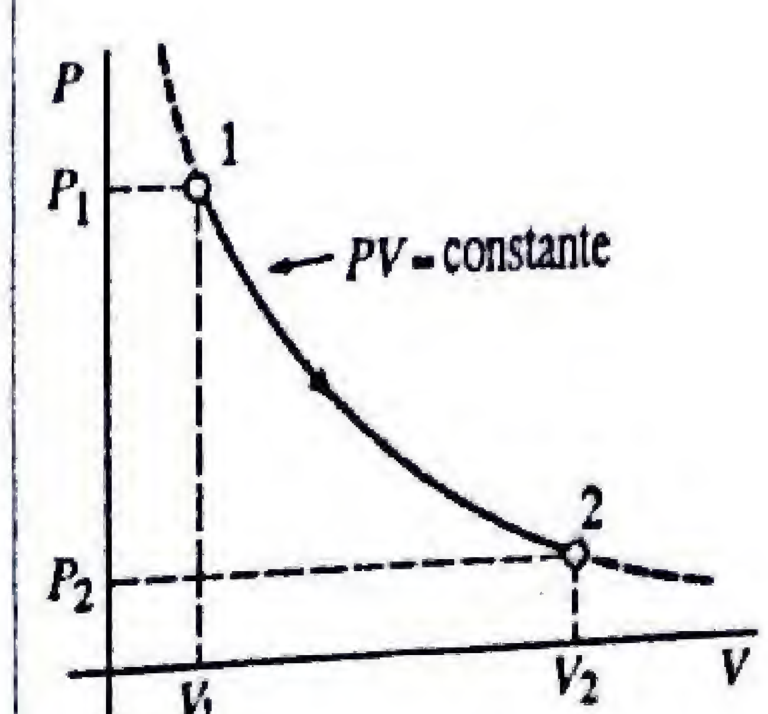
Vamos a considerar ahora algunos procesos específicos para aplicar la primera ley de la termodinámica.

PROCESO ISOTÉRMICO

La temperatura permanece constante y como el gas es ideal $pV = nRT$ la curva de p vs. V, corresponde a una hipérbola. El trabajo realizado es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln(\frac{V_2}{V_1})$$

Si el gas se expande $V_2 > V_1$ y el trabajo hecho por el gas es positivo. Si el gas se comprime $V_2 < V_1$ y el trabajo hecho por el gas es negativo.



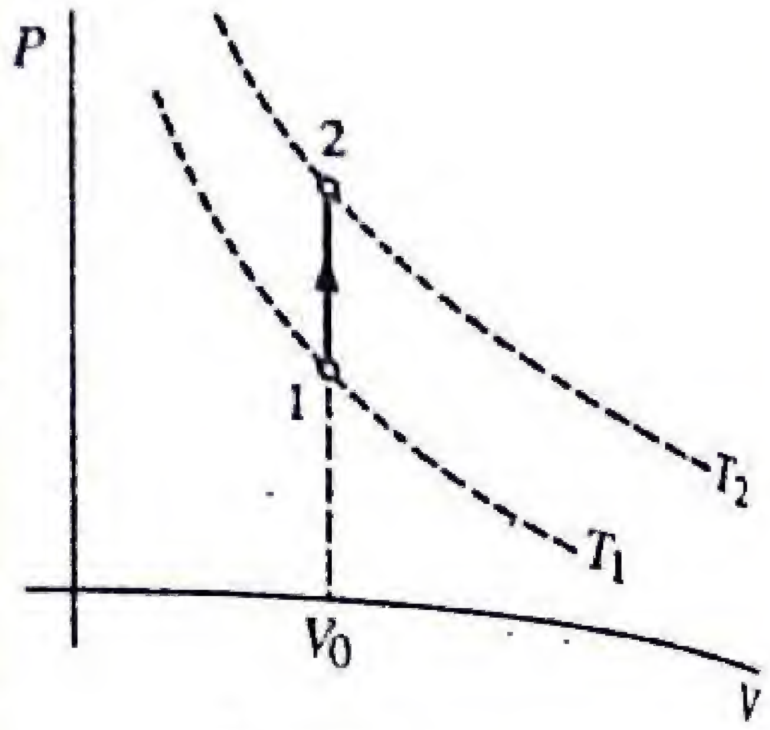
Proceso isotérmico
(T = constante)

PROCESO ISOCÓRICO

En el *proceso isocórico* o isométrico el volumen permanece constante y por lo tanto no se realiza trabajo: $W = 0$. De acuerdo a la primera ley la variación de energía interna es: $\Delta U = Q - W$

$$\Delta U = Q = nc_v\,\Delta T$$

Como la energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura, ΔU tendrá el mismo valor $(nC_v\Delta T)$ para una dada ΔT, independientemente del proceso, aunque este no sea a volumen constante.



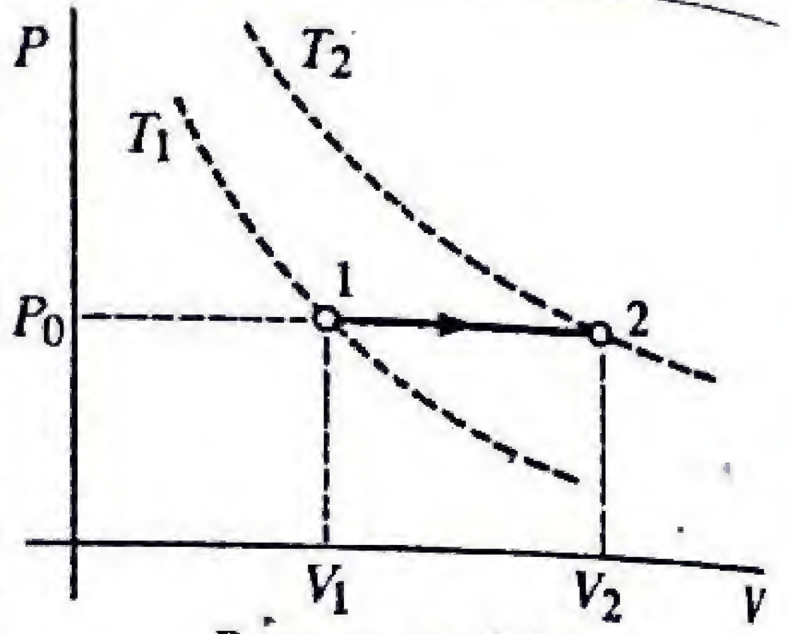
Proceso isocórico
(V = constante)

PROCESO ISOBÁRICO

En el *proceso isobárico* la presión del sistema se mantiene constante.

El trabajo realizado por el sistema para p = constante, es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = P_0\int_{V_1}^{V_2} dV = P_0(V_2 - V_1)$$



Proceso isobárico
(p = constante)

PROCESO ADIABÁTICO

Un *proceso adiabático* es aquel en que no entra ni sale energía térmica del sistema ($Q = 0$). En un proceso adiabático la curva del gráfico $p-V$ sigue la relación siguiente:

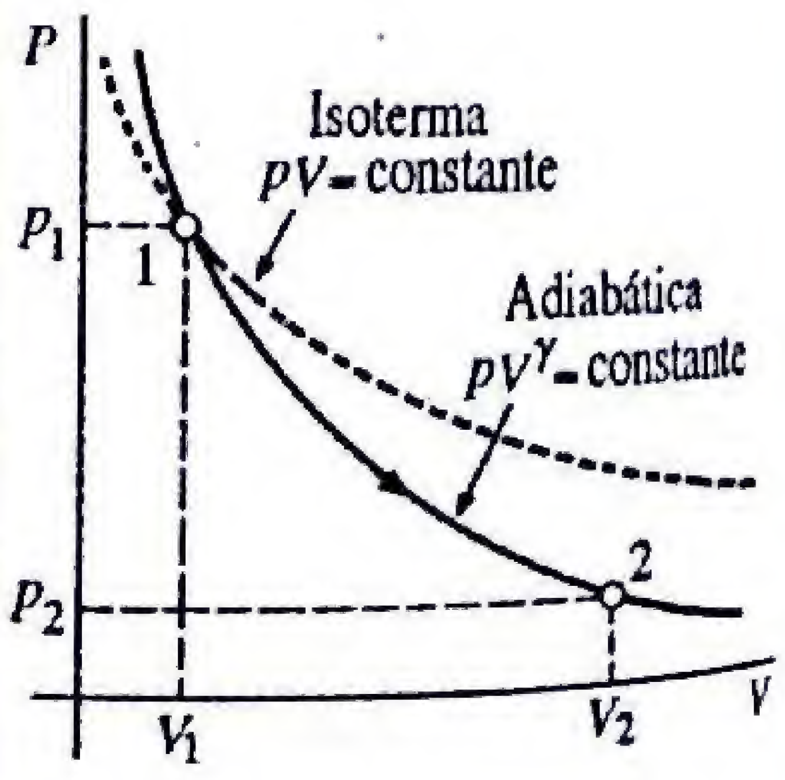
$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = \text{constante}$$

Donde γ es la razón de calores específicos:

$$\gamma = c_p / c_v.$$

En el problema PR-4.21 demostramos que el trabajo realizado por el sistema durante un proceso adiabático entre los estados 1 y 2 está dado por la expresión:

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$



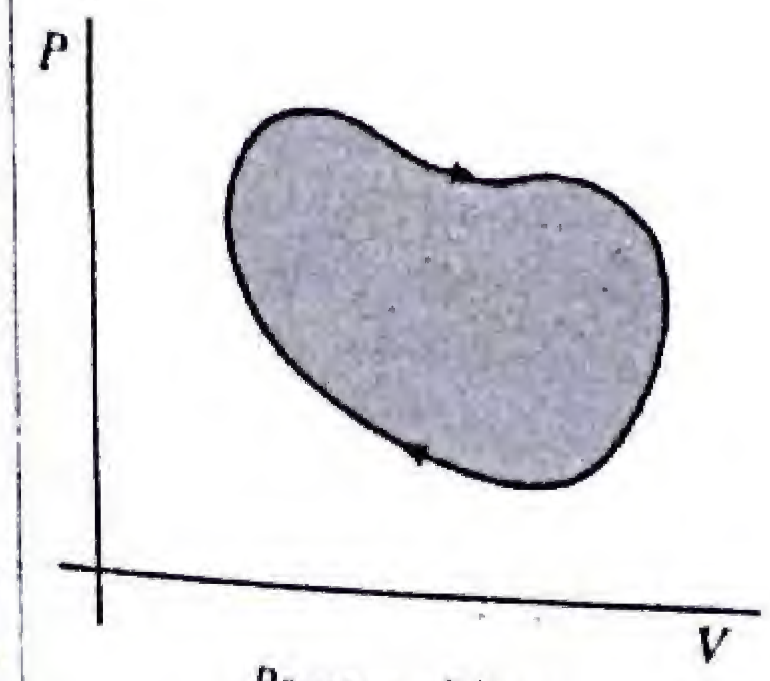
Proceso adiabático
($Q = 0$)

PROCESO CÍCLICO

Un proceso cíclico es una secuencia continua de procesos de forma tal que el sistema regresa a su estado original. Como el proceso se inicia y termina en el mismo estado, *no hay variación de la energía interna* ($\Delta U = 0$) y por la primera ley:

$$Q = W$$

El trabajo neto hecho por el sistema es el *área encerrada* por la curva. El trabajo neto será positivo si el ciclo es recorrido en el sentido horario indicado en la figura o negativo si es recorrido en sentido anti horario.

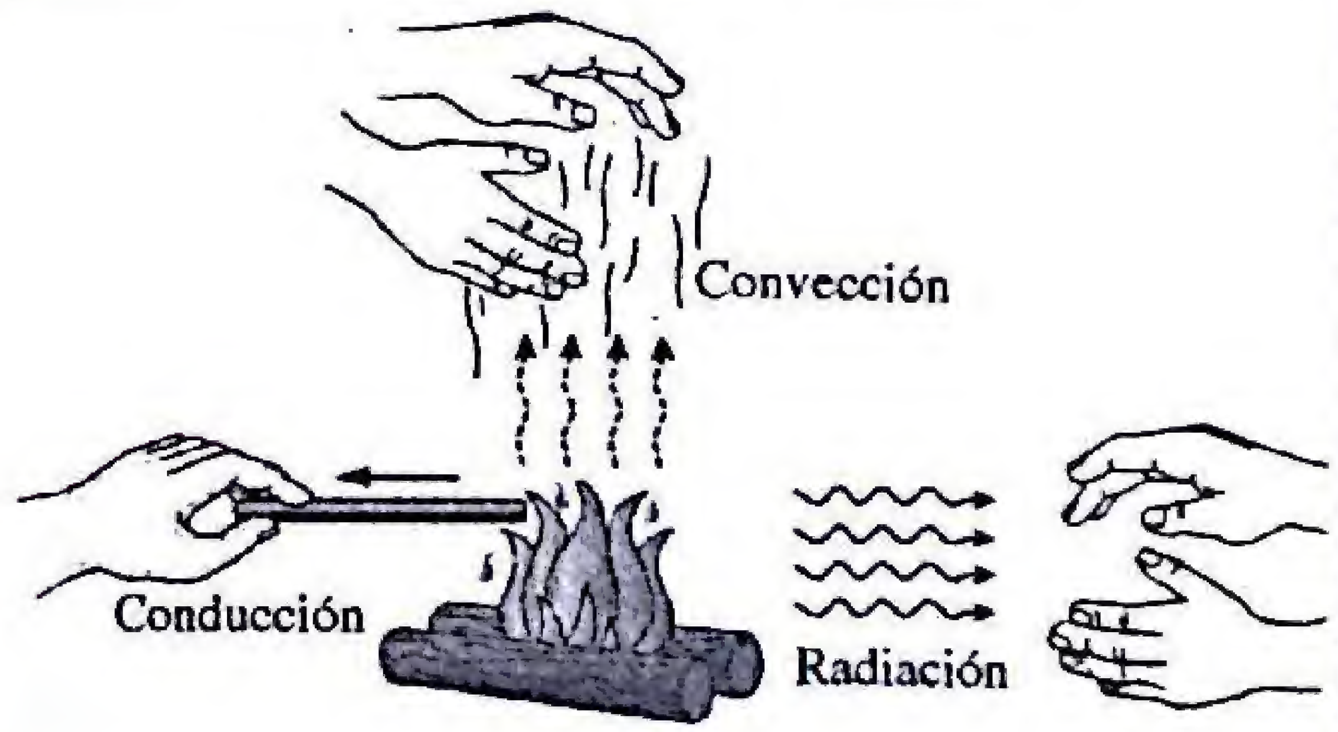


Proceso cíclico:

$\Delta U = 0 \qquad Q = W$

TRANSFERENCIA DE CALOR

Existen tres formas diferentes de transmisión de energía térmica: Conducción, convección y radiación.

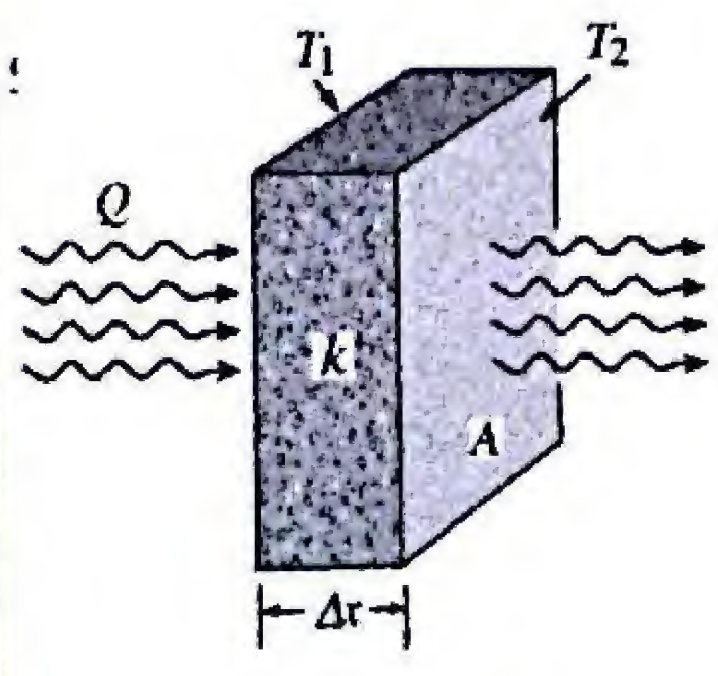


1) *Conducción*
2) *Convección*
3) *Radiación*

CONDUCCIÓN

En la conducción, la energía térmica se transmite como consecuencia a las interacciones entre moléculas por un proceso de colisiones sin que exista un transporte de las mismas. Los sólidos son mejores conductores de calor que los líquidos y éstos mejores que los gases. En los metales los electrones libres son los principales responsables de su alta conductividad térmica.

La conducción térmica se puede caracterizar por la tasa de flujo o *tasa de transferencia de energía térmica* ($\Delta Q/\Delta t$). Para el caso de una placa de material de espesor Δx y área transversal A, entre cuyas caras se mantiene una diferencia de temperaturas, $\Delta T = T_1 - T_2$, el calor va en el sentido de la temperatura decreciente y la tasa de flujo es:



$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

El término $\Delta T/\Delta x$ se llama *gradiente térmico*. La constante k es la conductividad térmica del material y se expresa en unidades (W/m·K). Una sustancia con un valor de k grande es buena conductora del calor.

Conductividades térmicas a 25°C
k (W/m.K)

Aire	0,024
Agua	0,6
Cobre	397

CONVECCIÓN

En la convección, la transferencia de energía térmica ocurre como consecuencia del movimiento conjunto de la masa de la sustancia fluida.

Si no fuera por la convección sería difícil hervir agua. En una olla, el agua que está más próxima al fondo se calienta y al expandirse su densidad disminuye. Como resultado el agua caliente asciende y la más fría se hunde tomando el lugar de la caliente que ascendió, con lo cual se mantiene un movimiento de circulación. La convección también determina el movimiento de las grandes masas de aire sobre la superficie terrestre.

Corrientes de convección en el agua hirviendo

RADIACIÓN

Tanto la conducción como la convección requieren la presencia de materia para la transferencia de la energía térmica. La radiación se refiere a la transferencia de energía por medio de ondas electromagnéticas y no requiere de la intervención de ningún medio material. Mediante la radiación se transmite el calor a la Tierra proveniente del Sol a través del espacio vacío.

La tasa a la cual un objeto emite energía radiante resulta proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta T:

$$P = \varepsilon A \sigma T^4 \quad \text{J/s} \quad (\text{ ley de Stefan})$$

$$P = \varepsilon A \sigma T^4$$

Siendo la constante $\sigma = 5{,}67\times10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4$. A el área de la superficie del objeto y la emisividad ε es una constante característica del material y su valor es entre 0 y 1.

$$\sigma = 5{,}67\times10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-4.01. *Calentamiento en una caída de agua*

El Salto Angel, en Venezuela, es la caída de agua más alta en el mundo, con una altura aproximada, h = 870 m. ¿Cuál sería el aumento de temperatura del agua al caer al pie de la catarata?

$Q = C\Delta T$
$\frac{Q}{C} = \Delta T$
$Q = mC\Delta T$

Solución: Supondremos que la energía cinética que gana determinada masa de agua, m, a expensas de su energía potencial, se convierte íntegramente en energía térmica en la base de la catarata:

$$\Delta Q = K = \Delta U$$

$$mc\Delta T = mgh$$

Calor específico del agua:

c = 4186 J/kg.°C

Despejando, obtenemos el incremento correspondiente de la temperatura:

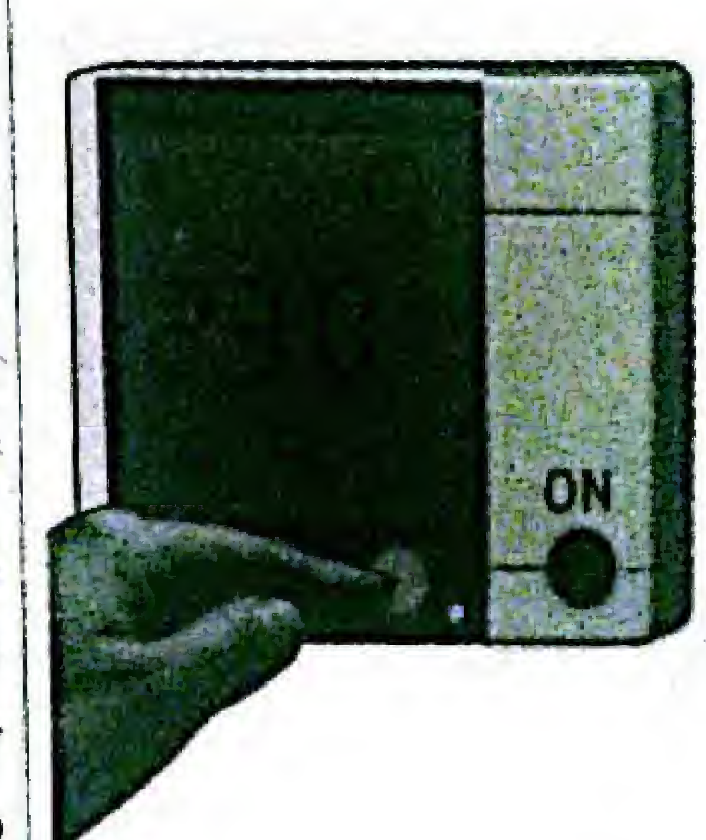
$$\Delta T = \frac{gh}{c} = \frac{(9{,}8\text{m/s}^2)(870\text{m})}{(4186\text{J/kg°C})} = 2{,}04°\text{C}$$

Hemos hecho la suposición de que se desprecian los efectos de resistencia del aire, de modo que durante la caída, el agua nunca alcanza la velocidad terminal.

Respuesta:

$\boxed{\Delta T = 2{,}04\ °\text{C}}$

PR-4.02. *¿Quién apagó la calefacción?*



En un día de invierno en que la temperatura ambiente es 0° C, el profesor encontró apagada la calefacción del laboratorio, procede a encenderla y a ajustar el termostato para que llegue a 23 °C. El salón tiene un volumen de aire de 75 m^3 y la potencia del calefactor es de es 3,2 kW. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar para obtener la temperatura escogida de 23 °C? Haga las siguientes suposiciones: a) Se desprecia la absorción de calor por parte de objetos y paredes. b) La presión del aire no cambia, a pesar de que el salón se considera hermético.

Solución: Sabemos que el volumen molar normal de un gas ideal es 22,4 litros. Es decir, un mol de aire en condiciones normales (P = 1 atm, T = 273,15 K = 0 °C), ocupa un volumen de 22,4 litros. Si el volumen total del aire es: $V = 75\ \text{m}^3 = 75000$ litros, el número de moles en este volumen es:

$$n = (75000\text{L})/22{,}4\text{L/mole} = 3348 \text{ moles}$$

Si suponemos que el salón es hermético, el calor absorbido tiene lugar a volumen constante:

$$Q = nc_V\Delta T = n\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 3348\text{molx}\frac{5}{2}\text{x}8{,}31\text{J/mol.Kx}23\text{K}$$

$$Q = 1{,}6x10^6\text{J}$$

Note que las diferencias de temperatura expresadas en °C y en K son iguales. El calefactor suministra una potencia $P = 3{,}2$ kW , por lo tanto el tiempo que tarda en entregar esta energía es:

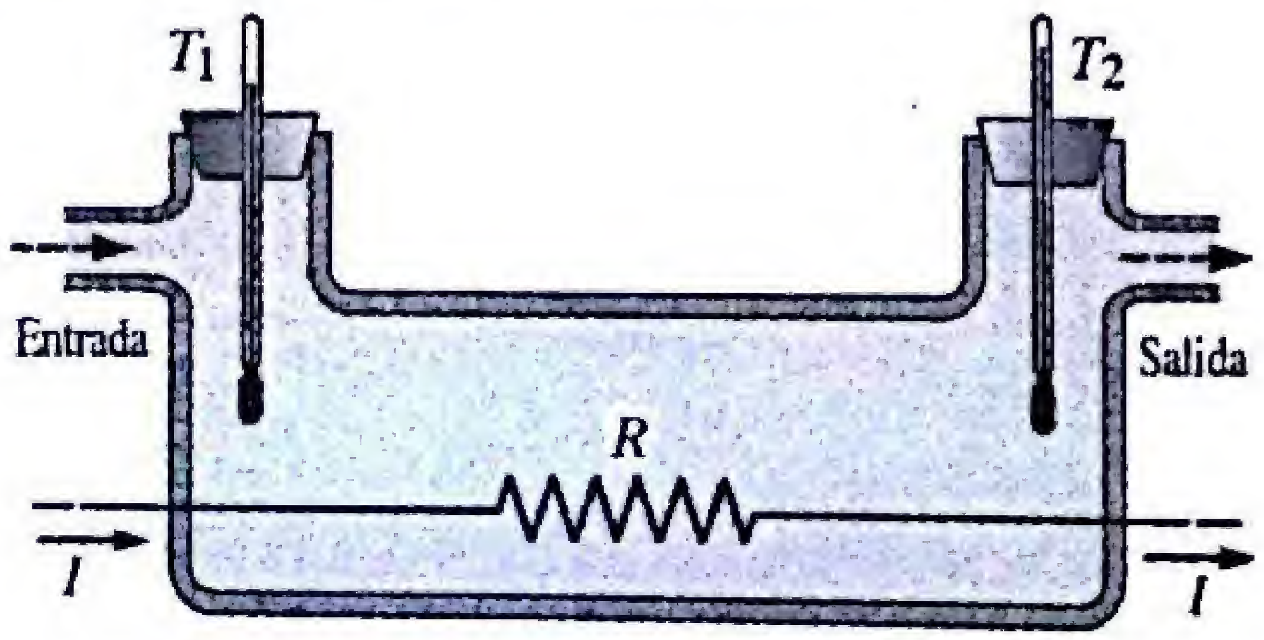
$$t = \frac{Q}{P} = \frac{1{,}6\text{x}10^6\text{J}}{3{,}2\text{x}10^3\text{J/s}} = 500s = 8{,}3\text{min}$$

Respuesta:

$\boxed{t = 500s = 8{,}3\text{min}}$

PR-4.03. *Un calorímetro de flujo*

Este aparato se utiliza para determinar el calor especifico de un líquido a partir de la diferencia de temperaturas entre la entrada y la salida del líquido que está fluyendo mientras se le suministra calor a una tasa conocida.



En un experimento particular, un líquido fluye a una tasa R = 0,4 kg/min. La potencia suministrada mediante una resistencia eléctrica es P = 600 W. En el estado estacionario el termómetro de entrada registra una temperatura T_1 = 27 °C mientras que el de salida marca T_2 = 70 °C.

a) ¿Cuál es el calor específico del líquido?

b) ¿Por qué no es necesario tomar en cuenta la capacidad calorífica del aparato?

Solución: a) El calor suministrado al líquido es:

$$Q = mc\Delta T$$

La potencia del calentador es:

$$P = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(mc\Delta T) = c\Delta T\frac{dm}{dt}$$

Despejando, se obtiene el calor específico del líquido:

$$c = \frac{P}{(T_2 - T_1)(dm/dt)}$$

$$c = \frac{600\text{J/s}}{(70°\text{C} - 27°\text{C})(0{,}4\text{kg/min})/(60\text{s/min})}$$

$$c = 2093\text{J/kg°C} = 2093\text{J/kg.K}$$

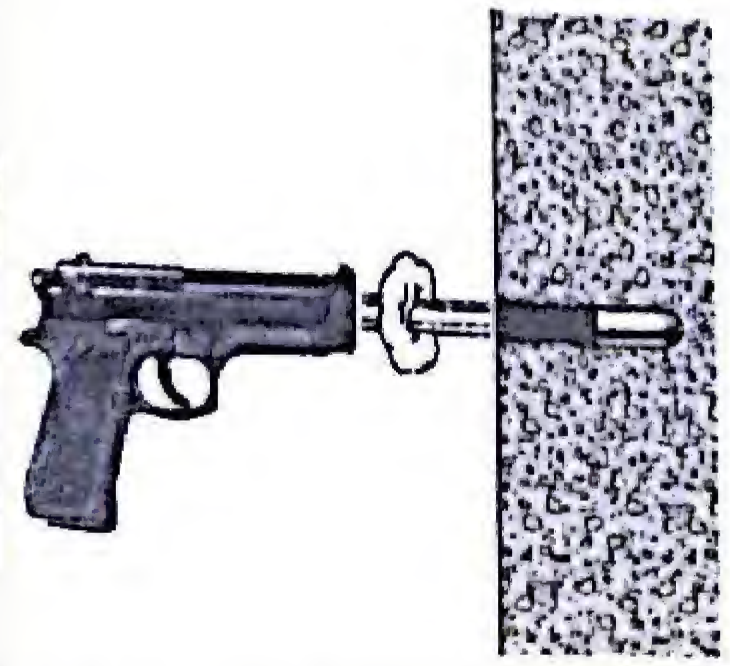
b) En este procedimiento no hace falta tomar en cuenta la capacidad calorífica del aparato, en virtud de que en el estado estacionario éste no quita ni agrega energía térmica al líquido.

Respuesta:

$\boxed{c = 2093\text{J/kg.K}}$

PR-4.04. *¿Puede llegar a derretirse la bala de plomo?*

Una bala de plomo de masa m = 5,0 g es disparada contra una pared a una velocidad inicial, v_0 = 400 m/s. La bala que tiene una temperatura inicial T_0 = 27 °C, penetra la pared y se detiene. ¿Llegará el plomo a fundirse totalmente?



Solución: La energía inicial de la bala antes del impacto es su energía cinética:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0{,}005\text{kg})(400\text{m/s})^2 = 400\text{J}$$

Para calentar esta masa de plomo y llevarla hasta la temperatura de fusión se requiere una energía:

$$Q_1 = mc\Delta T = 0{,}005\text{kgx}128\text{J/kg°Cx}(327°\text{C} - 27°\text{C}) = 192\text{J}$$

Por otra parte, la energía requerida para fundir el plomo sería:

$$Q_2 = mL_F = (0{,}005\text{kg})(2{,}45\text{x}10^4\text{J/kg} = 123\text{J}$$

Esto significa que la energía total necesaria para calentar el plomo y llegar a fundirlo es:

$$Q_1 + Q_2 = 192\text{J} + 123\text{J} = 315 \text{ J}.$$

Para el plomo:

Temperatura de fusión: $T_F = 327$ °C

Calor específico: c = 128 J/kg·°C

Calor de fusión: $L_F = 2{,}45\text{x}10^4$ J/kg

Como la energía inicial de la bala ($E_i = 400J$) excede este valor, podemos concluir que *todo* el plomo puede llegar a derretirse: basta que el proyectil absorba el 79% del calor desprendido debido a la fricción.

Respuesta:

Todo el plomo puede derretirse

PR-4.05. *Agitando el agua en un termo para que hierva*

A una persona se le ocurre la idea de que podría tratar de hervir el agua para preparar el café, agitándola en un termo. El termo contiene un cuarto de litro de agua a 25°C y la persona procede a darle al termo 30 sacudidas por minuto, cayendo el agua una distancia de 30 cm en cada sacudida. Si despreciamos cualquier pérdida de energía térmica por el termo, ¿por cuánto tiempo debería ser sacudido el termo para que el agua hierva?

Solución: La temperatura inicial de una masa m de agua, $T_i = 25$ °C, se desea elevarla hasta la temperatura de ebullición, $T_f = 100$ °C. En términos del calor específico del agua, la energía requerida es:

$$Q = mc(T_f - T_i)$$

Esta energía es suministrada a expensas de la energía potencial ganada después de un total de N sacudidas: $\Delta U = Nmgh$:

$$Nmgh = mc(T_f - T_i)$$

Por lo tanto:

$$N = \frac{c(T_f - T_i)}{gh}$$

Si al termo se le dan 30 sacudidas por minuto, el tiempo total t, requerido para alcanzar la temperatura de ebullición del agua será:

$$t = \frac{N\text{sac}}{30\text{sac/min}} = \frac{c(T_f - T_i)}{30gh}$$

$$t = \frac{4190\text{J/kg°C}(100°\text{C} - 25°\text{C})}{(30/\text{min})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}3\text{m})} = 3563\text{min} = 2{,}47\text{dias}$$

Respuesta:

$t = 3563\text{min} = 2{,}47\text{dias}$

PR-4.06. *Tiempo de espera en una tetera eléctrica*

Una tetera eléctrica que tiene un calentador de inmersión de 200 watts, se utiliza para hervir 250 g de agua para preparar té. Calcule el tiempo que se necesita para llevar esta agua de 23 °C al punto de ebullición, despreciando cualquier pérdida de calor.

Solución: El calor suministrado $Q = mc(T_f - T_i)$ debe ser igual a la potencia del calentador P multiplicada por el tiempo empleado t:

$$Q = mc(T_f - T_i) = Pt$$

Por lo tanto el tiempo requerido es:

$$t = \frac{mc(T_f - T_i)}{P} = \frac{(0{,}25\text{kg})(4190\text{J/kg.K})(100°\text{C} - 23°\text{C})}{200\text{J/s}}$$

$$t = 403 \text{ s} = 6{,}72 \text{ minutos}$$

Observe que las diferencias de temperatura expresadas en °C y en K son iguales.

Respuesta:

$t = 403$ s $= 6{,}72$ minutos

PR-4.07. *¿En cuanto tiempo se evapora toda el agua?*

En una olla se vierte agua a la temperatura ambiente $T_0 = 20$ °C y luego se pone a calentar. Se observa que al cabo de un tiempo $t_1 = 5$ min el agua empieza a hervir. ¿Cuánto tiempo adicional, t_2, tardará el agua en evaporarse totalmente?

Solución: La potencia (energía por unidad de tiempo) requerida para elevar la temperatura del agua desde el valor inicial $T_0 = 20$ °C hasta la temperatura de ebullición $T_e = 100$ °C en el tiempo t_1 es:

$$P = \frac{mc(T_e - T_0)}{t_1}$$

El mismo suministro de potencia es el que se usa para lograr evaporar completamente el agua en el tiempo t_2:

$$P = \frac{mL_v}{t_2}$$

Igualando estas dos expresiones, y despejando el tiempo t_2:

$$t_2 = \frac{L_v t_1}{c(T_e - T_0)} = \frac{(2{,}26\text{x}10^6\ \text{J/kg})(5\text{min})}{(4{,}186\text{x}10^3\ \text{J/kg}^\circ\text{C})(100-20)^\circ\text{C}}$$

$$t_2 = 33{,}7 \text{ minutos}$$

Calor específico
$c = 4186$ J/kg.°C

Calor de vaporización
$L_v = 2.26\text{x}10^6$ J/kg

Respuesta:

$\boxed{t_2 = 33{,}7 \text{ min}}$

PR-4.08. *Trabajo sobre la atmósfera al evaporar agua*

Se hierve 1 kg de agua a la presión de 1 atm y cuando se transforma en vapor pasa a ocupar un volumen de 1,67 m^3.

a) Determine el trabajo que realiza el agua al empujar la atmósfera cuando se transforma en vapor.

b) ¿Cuál el cambio en la energía interna del agua?

Solución: a) Sabemos que 1 kg de agua a la temperatura de 100°C ocupa un volumen $V_1 = 1\text{x}10^{-3}$ m^3. Como la presión es constante y su valor igual a la atmosférica, el trabajo realizado es:

$$W = -\int p dV = -p_{atm}\int_{V_1}^{V_2} dV = -p_{atm}(V_2 - V_1)$$

$$W = -(1{,}013\text{x}10^5\text{N/m}^2)(1{,}67-0{,}001)\text{m}^3 = -1{,}69\text{x}10^5\text{J}$$

El signo (-) significa que el trabajo es realizado "por el agua" sobre la atmósfera circundante.

b) El cambio de energía interna del kilogramo de agua cuando hierve a la presión de una atmósfera es:

$$\Delta U = Q - W_a = mL_F - W_a$$

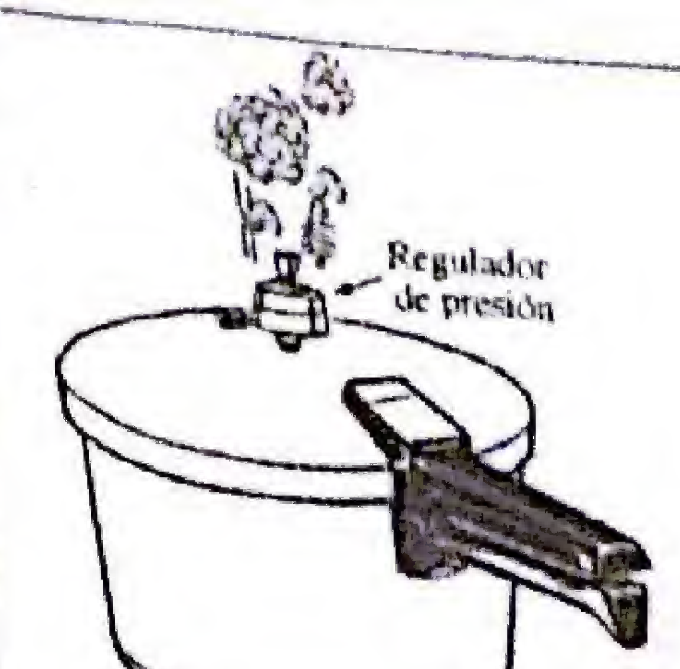
$$\Delta U = (1\text{kg})(2{,}26\text{x}10^6\text{J/kg}) - 1{,}69\text{x}10^5\text{J} = +2{,}09\text{x}10^6\text{J}$$

Respuesta:

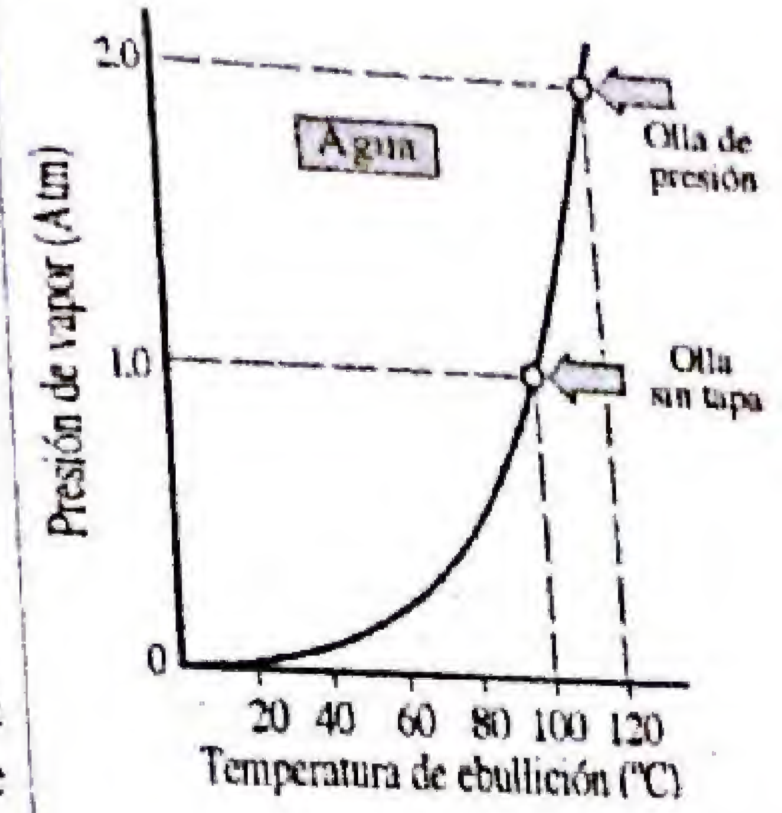
a) $W_a = +1{,}69\text{x}10^5$J
b) $\Delta U = +2{,}09\text{ x}10^6$ J

PR-4.09. *Resulta más rápido cocinar bajo presión*

Utilizando el diagrama de presión p en función de la temperatura T para el agua, describa el funcionamiento de una olla de presión y explique por qué ésta permite una cocción más rápida que la olla normal sin tapa.



Solución: Cuando el agua hierve a una cierta temperatura, las moléculas durante el calentamiento van abandonando el líquido y pasando al estado de vapor. Esto ocurre cuando la presión del vapor que se escapa del agua es igual a la presión que ejerce el entorno sobre el líquido. La gráfica muestra la variación de la temperatura T de ebullición del agua al variar la presión aplicada, p. La cocción de alimentos se hace normalmente en presencia de abundante agua. En una olla sin tapa, que está abierta a la atmósfera ambiental, la presión es cerca de 1 atm (a nivel del mar) y por lo tanto la temperatura a la que se cocinan los alimentos está cerca de los 100 °C.



Presión de vapor en función de la temperatura de ebullición

En una olla de presión, el vapor de agua, como está confinado, no puede escapar y va gradualmente incrementando su presión dentro de la olla. El vapor formado oprime la superficie del agua impidiendo que ésta hierva. Como consecuencia, en una olla de presión típica, el agua puede seguir siendo líquida a temperaturas cercanas a 120 °C. Este efecto, junto al hecho de que la presencia de abundante vapor de agua favorece la transferencia de calor de la fuente térmica a la comida, hace que la cocción sea *mucho más rápida*.

PR-4.10. *Peligro: ¡Esa olla puede explotar!*

Las ollas de presión traen una válvula de seguridad que regula el valor de la presión, de modo que cuando esta aumenta provoca que se levante el peso que cierra un pequeño conducto al exterior. Esto permite el escape de vapores, haciendo que la presión se estabilice en un valor fijo (cerca de 2 atmósferas). Suponga una olla que *no tiene la protección* de esta válvula de seguridad, contiene agua hasta la mitad de su volumen, se sella y luego se calienta hasta 166 °C, en que todo el líquido se convierte en vapor. Determine la presión que alcanza el vapor. Considere que éste se comporta como un gas ideal.

Solución: La masa del agua es: $m = \rho(V/2)$. Aplicando la ecuación de estado del gas ideal, obtenemos la presión del vapor

$$pV = nRT$$

$$p = n\frac{RT}{V} = \frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \frac{\rho(V/2)}{M}\frac{RT}{V} = \frac{\rho RT}{2M}$$

El peso molecular del H_2O es la suma de los pesos atómicos de los elementos que componen la molécula, es decir:

$$M = 2x1g + 16g = 18 \text{ g/mol}$$

Por lo tanto:

$$p = \frac{(1000\text{kg/m}^3)(8{,}31\text{J/mol.K})(166+273)\text{K}}{2(18x10^{-3}\text{kg/mol})}$$

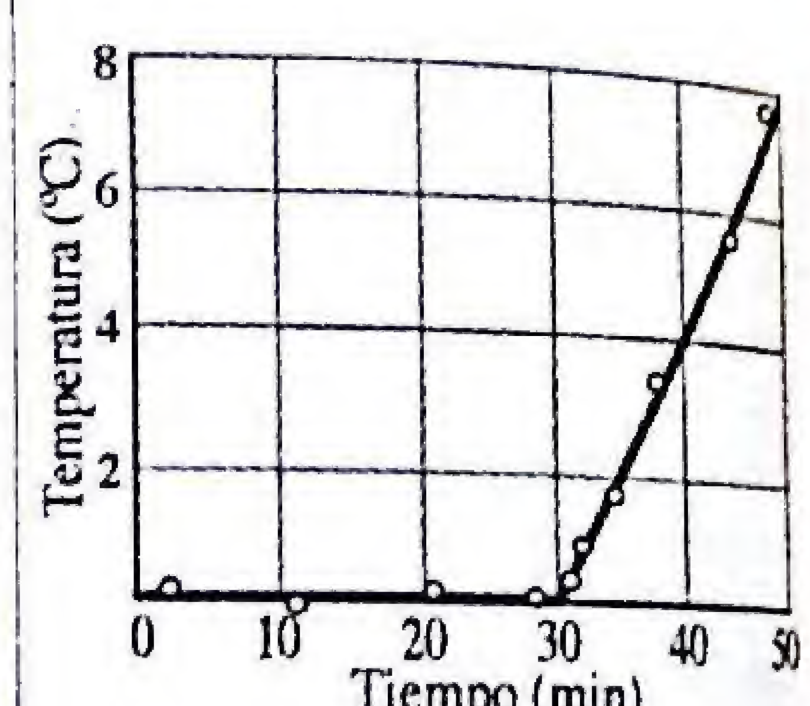
$$p = 1{,}01x10^8 \text{Pa} = 1000\text{Atm}$$

Respuesta:

$\boxed{p = 1000\text{Atm}}$

PR-4.11. *Calentamiento de una mezcla de agua y hielo*

En un recipiente se coloca una mezcla de agua y hielo. La masa total de la mezcla es M = 1 kg. Cuando se deja calentar en el ambiente y se registra la temperatura T (en °C) en función del tiempo t (en minutos), se observa la dependencia mostrada en la figura. Suponiendo que la capacidad calorífica del recipiente puede despreciarse, ¿qué masa de hielo había en la mezcla original?



Solución: Por la gráfica se observa que durante el primer intervalo de tiempo Δt_1 = 30 minutos, el hielo se derrite y la temperatura no varía. En ese tiempo la masa m_h de hielo recibe una energía térmica:

$$\Delta Q_1 = m_h L_f$$

Una vez que todo el hielo se ha derretido, la temperatura de la masa total M de agua empezó a elevarse y en un intervalo de tiempo Δt_2, recibirá del ambiente una energía:

$$\Delta Q_2 = Mc_a\Delta T_2$$

En ambos casos la potencia o tasa de transferencia de energía térmica del ambiente al sistema es la misma:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_h L_f}{\Delta t_1} = \frac{Mc_a\Delta T_2}{\Delta t_2}$$

Calor latente de fusión del hielo:

$L_f = 3.33x10^5$ J/kg

Calor específico del agua:

$c_a = 4186$ J/kg.°C

Por lo tanto, la masa de hielo que había al principio en la mezcla es:

$$m_h = \frac{Mc_a\Delta T_2}{L_f}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

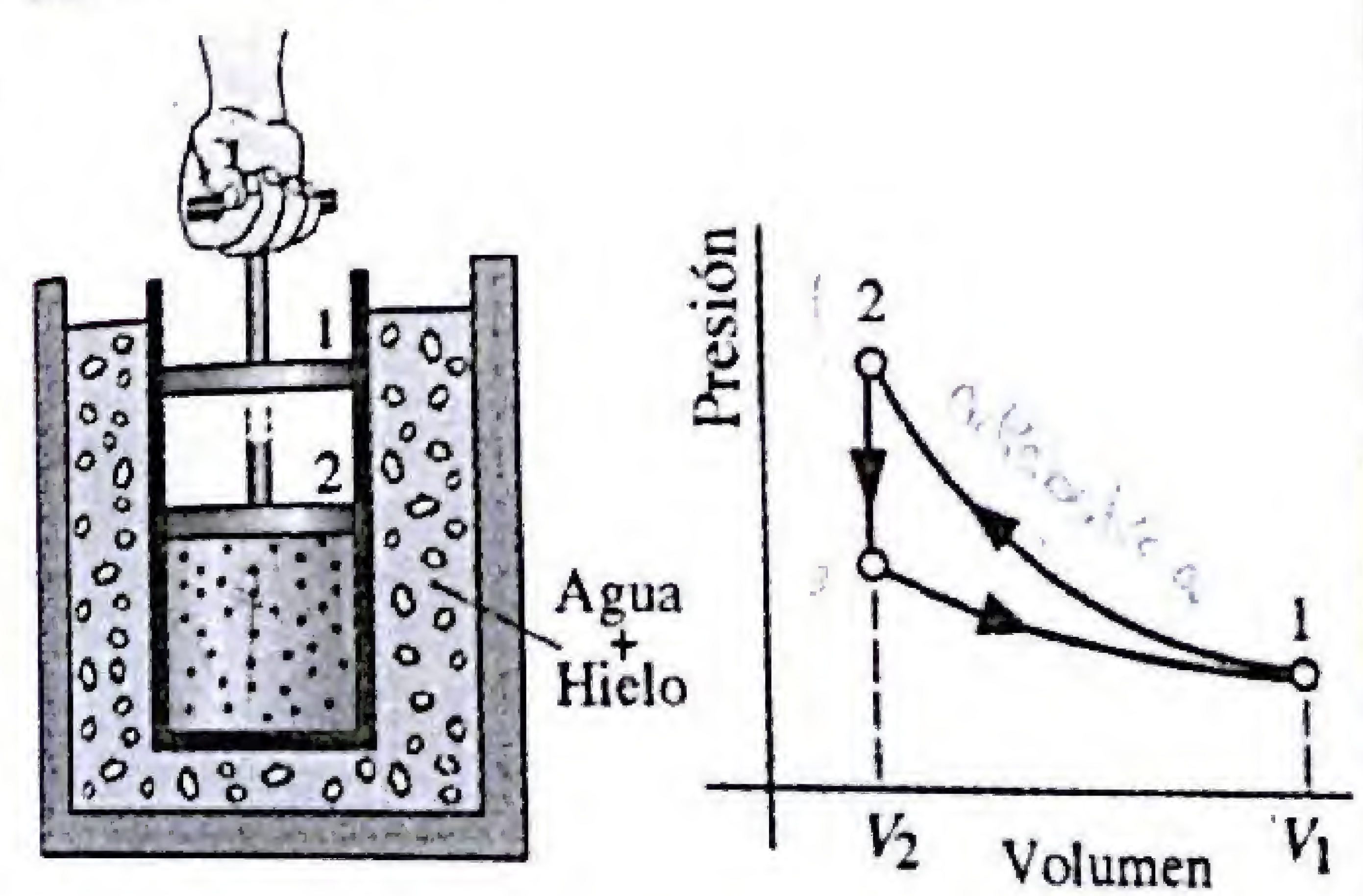
$$m_h = \frac{(1\text{kg})(4186\text{J/kg}^\circ\text{C})(8^\circ\text{C})}{(3{,}33x10^5\text{J/kg})}\left(\frac{30\text{min}}{20\text{min}}\right) = 0{,}151\text{kg}$$

Respuesta:

Masa de hielo $\boxed{m_h = 151 \text{ g}}$

PR-4.12. *Trabajo para fundir medio kilo de hielo*

Un gas se encuentra confinado en un cilindro que tiene un pistón móvil. El cilindro se encuentra sumergido en una mezcla de agua y hielo.



Se empuja rápidamente el pistón hacia abajo desde la posición 1 hasta la posición 2. El pistón es mantenido en la posición 2 hasta que el gas vuelva a estar a la temperatura de 0 °C, y, luego se regresa lentamente a la posición 1. Se observa que durante todo el ciclo se funden 0,50 kg de hielo. Determine el trabajo neto hecho sobre el gas.

Calor de Fusión del hielo:

$L_F = 3{,}33x10^5$ J/kg

Solución: Por la primera ley de la termodinámica, la variación de energía interna es:

$$\Delta U = Q - W$$

Durante un ciclo completo la variación de energía interna del gas es cero ($\Delta U = 0$), por lo tanto, el trabajo neto hecho por el gas es igual al calor suministrado al hielo para fundirlo:

$$W = Q = mL_F = (0{,}5\text{kg})(3{,}33x10^5) = 1{,}67x10^5\text{J}$$

Respuesta:

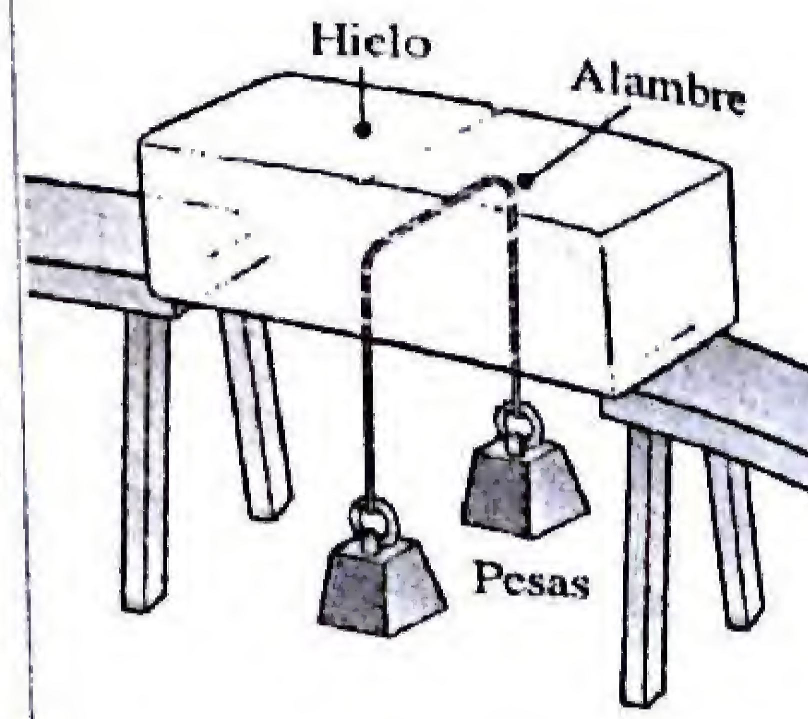
$\boxed{W = +1{,}67x10^5\text{J}}$

PR-4.13. *Bloque de hielo atravesado por un alambre*

En una clase de demostraciones, colocamos un bloque de hielo sobre una superficie horizontal y luego le ponemos encima un alambre metálico delgado, al cual se le suspenden pesas a cada lado. Después de transcurrido un cierto tiempo, observamos con sorpresa que el alambre ha atravesado completamente el bloque, quedando éste casi intacto y sin mostrar ninguna hendidura.

a) Explique por qué sucede esto.

b) ¿Qué es lo que facilita el patinaje sobre hielo?



Solución: a) En la figura se muestra un gráfico de P vs T para el agua en sus tres estados. Las líneas dividen el diagrama en las regiones correspondientes a las tres fases del agua: sólido, líquido y gas. Estas líneas convergen en un punto P llamado *punto triple* donde los valores de presión y temperatura son tales que las tres fases coexisten en equilibrio.

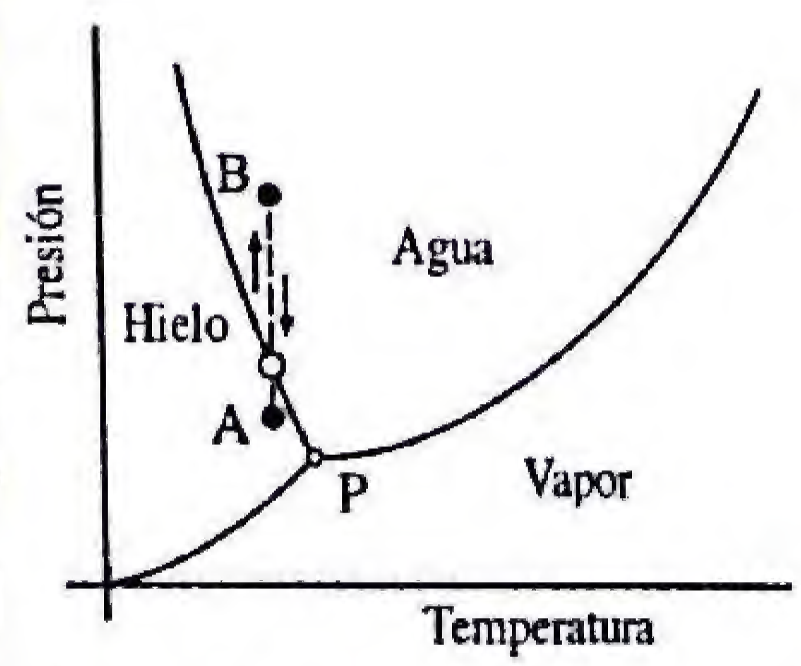


Diagrama de presión vs temperatura para las tres fases del agua

Supongamos que inicialmente el hielo se encuentra en el punto A, ligeramente por debajo de la curva de fusión. Al colocar las pesas, debido al incremento de presión producido por el alambre sobre la zona de hielo que le queda por debajo, nos movemos al punto B. El hielo se funde y se convierte en agua. Esto permite que el alambre se hunda en el bloque hasta que toque hielo otra vez. El agua quedará por encima del alambre, recuperando su presión original y como está rodeada de hielo y el alambre es un buen conductor, el agua regresa al punto inicial A y vuelve a congelarse de nuevo (rehielación).

El proceso se repite continuamente con el alambre ejerciendo presión sobre el hielo, fundiéndolo y re-hielándolo, hasta que finalmente logra atravesar el bloque completamente sin llegar a cortarlo .

b) En el patinaje sobre hielo ocurre un fenómeno relacionado con lo explicado antes. El patín es filoso, su superficie de contacto con el hielo es muy pequeña. El incremento de presión ejercido por el peso de la persona hace que el hielo se derrita y la delgada capa de agua que se forma debajo, facilita el desplazamiento del patinador.

Patinaje sobre hielo

PR-4.14. *Preparando un café con leche*

Se vierten 50 g de leche, que está a una temperatura T_1 = 98 °C, en una taza que contiene 75 g de café a temperatura T_2 = 30 °C. La taza es de vidrio y tiene una masa de 30 g. Determine la temperatura de equilibrio del sistema, ignorando cualquier pérdida de calor al ambiente.

Solución: Vamos a suponer que el sistema combinado (leche + café + taza) está aislado y por lo tanto no pierde ni gana energía térmica del medio ambiente. Por conservación de la energía, la energía térmica perdida por la leche caliente será igual a la energía térmica ganada por la taza y el café juntos, y podemos escribir:

$$\underbrace{m_l c_l(T_1 - T)}_{\text{Leche}} = \underbrace{m_c c_c(T - T_2)}_{\text{Café}} + \underbrace{m_t c_t(T - T_2)}_{\text{Taza}}$$

$$m_l c_l T_1 + m_c c_c T_2 + m_t c_t T_2 = (m_l c_l + m_c c_c + m_t c_t)T$$

Al despejar, se obtiene la temperatura final:

$$T = \frac{m_l c_l T_1 + m_c c_c T_2 + m_t c_t T_2}{m_l c_l + m_c c_c + m_t c_t}$$

Calores específicos:

Agua: c_a = 4186 J/kg.°C

Vidrio: c_t = 837 J/kg.°C

Podemos asumir que el calor específico de la leche y del café son iguales al del agua ($c_l = c_c = c_a$) por lo tanto:

$$T = \frac{0{,}05x4186x98 + 0{,}075x4186x30 + 0{,}03x837x30}{0{,}05x4186 + 0{,}075x4186 + 0{,}03x837}$$

La temperatura final de equilibrio es: T = 56,1 °C

Respuesta:

$\boxed{T = 56{,}1\ ^\circ\mathrm{C}}$

PR-4.15. *Cubos de hielo para enfriar el té*

Dos cubos de hielo de 50 g se sacan del congelador a -15 °C y se colocan en una taza conteniendo 200 g de té a 25 °C. Suponga que el té tiene las mismas propiedades del agua y que no hay pérdidas de energía térmica hacia la taza o el ambiente. ¿Cuál será la temperatura final de equilibrio?

Solución. Como no sabemos a priori cuál será el estado final del sistema, es necesario analizar tres diferentes posibilidades, según que en el resultado final se tenga:

a) Puro hielo, b) Hielo con agua, c) Pura agua

a) La primera posibilidad implica que el agua se enfría y el hielo se calienta sin llegar a fundirse. Supongamos que la temperatura final de equilibrio sea T. Igualando el calor desprendido por el agua, $Q_a = m_a c_a (T_a - T)$, con el calor absorbido por el hielo, $Q_h = m_h c_h (T - T_h)$, tenemos:

$$m_a c_a (T_a - T) = m_h c_h (T - T_h)$$

Despejando encontramos la temperatura final:

$$T_f = \frac{c_a m_a T_a + c_h m_h T_h}{c_a m_a + c_h m_h}$$

$$T_f = \frac{(4190)(0{,}2)(25°C) + (2220)(0{,}1)(-15°C)}{(4190)(0{,}2) + (2220)(0{,}1)} = 16{,}6°C$$

Calor específico del agua:
$c_a = 4190$ J/kg°C

Calor específico del hielo:
$c_h = 2220$ J/kg°C

Calor de fusión del hielo:
$L_F = 3.33 \times 10^5$ J/kg

Obviamente esta situación sería imposible ya que la temperatura final, excedería al valor a la temperatura de fusión del hielo. De modo que la posibilidad *(a) queda descartada* y concluimos que, al menos parte del hielo debe fundirse.

b) Consideremos ahora la posibilidad de que después de haberse fundido una parte del hielo de masa $m < m_h$, el hielo y el agua coexisten a la temperatura final $T = 0$ °C. El calor desprendido por el agua al enfriarse es:

$$Q_a = m_a c_a (T_a - T)$$

El calor absorbido por el hielo al calentarse tendría dos partes:

$$Q_h = m_h c_h (0°C - T_h) + m L_F$$

El primer término es el calor empleado en calentar *todo* el hielo hasta 0°C y el segundo término es el calor empleado en fundir aquella parte de masa m. Igualando Q_a y Q_h:

$$m_a c_a (T_a - T) = - m_h c_h T_h + m L_F$$

Despejando la masa m:

$$m = \frac{c_a m_a T_a + c_h m_h T_h}{L_F}$$

$$m = \frac{(4190)(0{,}2)(25°C) + (2220)(0{,}1)(-15°C)}{3{,}33 x 10^5}$$

$$m = 5{,}3 x 10^{-2} \text{ kg} = 53 \text{ g (masa de hielo fundido)}$$

Por lo tanto concluimos que la alternativa correcta es la (b), es decir, finalmente queda hielo con agua a 0°C. Los 100 g iniciales de hielo son suficientes para bajar la temperatura del agua hasta 0°C, quedando en equilibrio:

Masa de hielo: 100 g - 53 g = 47 g

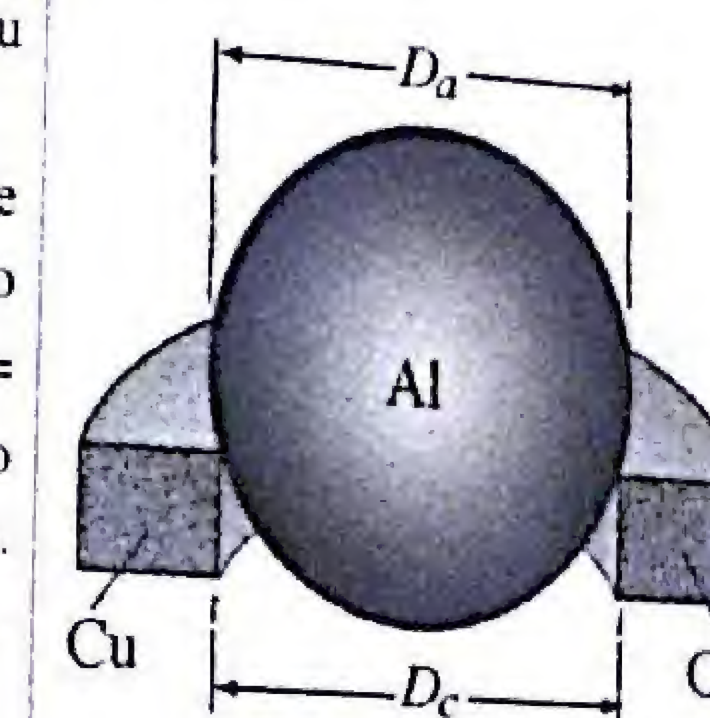
Masa de agua: 200 g + 53 g = 253 g

Respuesta:

Temperatura final: 0 °C
Coexisten hielo y agua

PR-4.16. *¿Pasará la esfera por el anillo?*

Sean un anillo de cobre cuya masa es $m_c = 0{,}9$ kg y su diámetro interno $D_c^0 = 5.98$ cm, que se encuentra a la temperatura ambiente (T_c = 20 °C) y una esfera de aluminio cuya masa es $m_a = 0{,}4$ kg y su diámetro externo $D_a^0 = 6{,}00$ cm, que se encuentra a una temperatura (T_a = 100 °C). Se coloca la esfera encima del anillo de modo que alcancen una temperatura común de equilibrio. Suponga que no hay pérdidas de calor al medio ambiente.
a) Determine la temperatura final de equilibrio.
b) ¿Pasará la esfera por el anillo a esta temperatura?

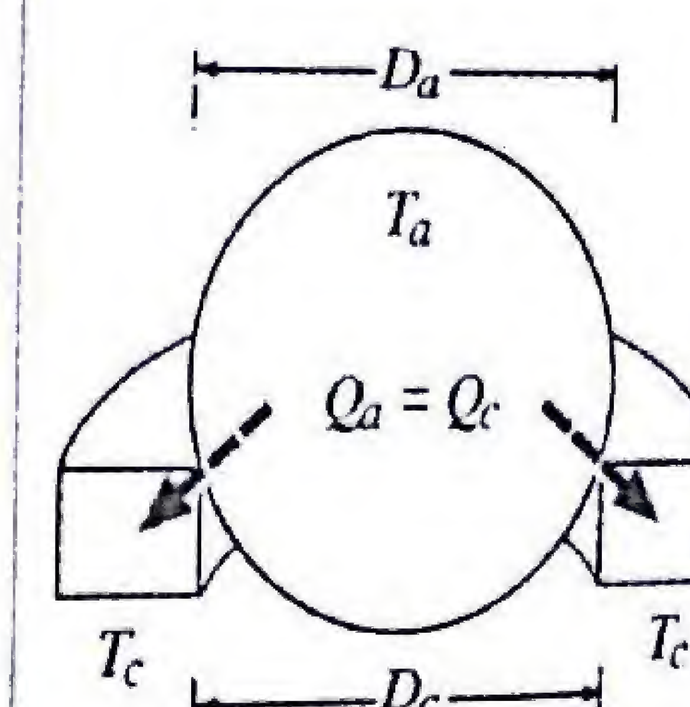


Solución. a) Cuando la esfera se enfría desde la temperatura T_a, el calor que se libera es:

$$Q_a = m_a c_a (T_a - T)$$

Siendo T la temperatura final de equilibrio. Al mismo tiempo el anillo se calienta y el calor absorbido es:

$$Q_c = m_c c_c (T - T_c)$$



Igualando el calor Q_a que libera la esfera con el que absorbe el anillo Q_c, y despejando se obtiene:

$$c_a m_a (T_a - T) = c_c m_c (T - T_c)$$

La temperatura final de equilibrio T es:

$$T = \frac{c_c m_c T_c + c_a m_a T_a}{c_c m_c + c_a m_a}$$

$$T = \frac{(400)(0,9)(20°C) + (900)(0,4)(100°C)}{(400)(0,9) + (900)(0,4)} = 60°C$$

b) Después de calentarse el anillo de cobre su diámetro aumentará hasta un valor:

$$D_c = D_c^0(1 + \alpha_c \Delta T_c)$$

$$D_c = (5{,}98\ \text{cm})[1 + (17\text{x}10^{-6}/°C)(+40°C)] = 5{,}984\ \text{cm}$$

Por otra parte, cuando la esfera de aluminio se enfría alcanza un diámetro final:

$$D_a = D_a^0(1 + \alpha_a \Delta T_a)$$

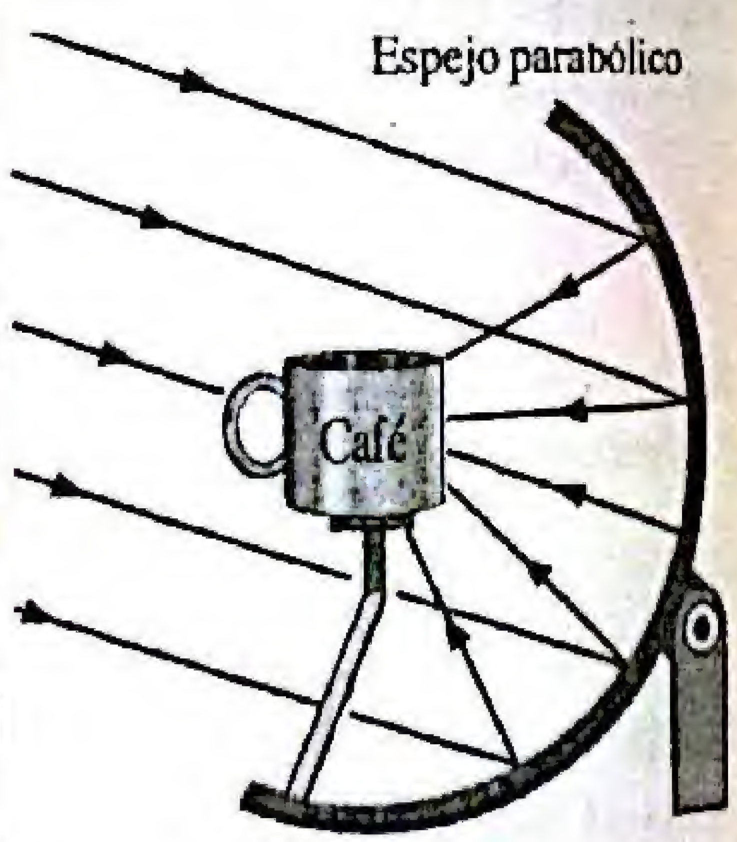
$$D_a = (6{,}00\ \text{cm})[1 + (23\text{x}10^{-6}/°C)(-40°C)] = \underline{5{,}994\ \text{cm}}$$

Como el diámetro final de la esfera, D_a, resulta superior al diámetro del anillo, D_c. concluimos entonces que la esfera *no puede pasar* por el agujero.

Respuesta:

a) $T = 60°C$
b) ¡No pasará!

PR-4.17. *Un espejo parabólico para calentar agua*



Un calentador solar consiste de un espejo reflector parabólico que enfoca los rayos paralelos del sol sobre el objeto que se desea calentar. En cierta ubicación la intensidad solar (energía por unidad de tiempo por unidad de área) que llega a la Tierra es de 1 kW/m^2 y el diámetro del espejo es 0,4 m. Suponiendo que el 40 % de la energía luminosa incidente se convierte en energía térmica, ¿cuánto tiempo tardará en evaporarse un litro de agua que inicialmente está a una temperatura de 25 °C?

Solución. El área presentada por el espejo normal a la dirección de propagación de la radiación solar es πR^2, por lo tanto la potencia incidente sobre el colector es:

$$P_i = (1000\text{W/m}^2)\pi(0{,}2\text{m})^2 = 126\text{W}$$

De esta potencia sólo el 40% es aprovechada para calentar:

$$P_c = 0{,}4P_i = (0{,}4)(126\text{W}) = 50{,}3\text{J/s}$$

Para aumentar la temperatura del agua hasta su punto de ebullición y luego evaporarla, se requiere una energía total:

$$Q = mc\Delta T + mL_v = m(c\Delta T + L_v)$$

Agua:

$c = 4190$ J/Kg°C
$L_v = 2{,}26\text{x}10^6$ J/kg

Siendo c el calor específico y L_v el calor de evaporación del agua. Reemplazando los valores numéricos, obtenemos:

$$Q = (1\text{kg})[(4190\text{J/kg°C})(75°C) + 2{,}26\text{x}10^6\text{J/kg}]$$

$$Q = 2{,}57\text{x}10^6\ \text{J}$$

Finalmente, el tiempo requerido para evaporar un litro de agua será:

$$\Delta t = \frac{Q}{P_c} = \frac{2{,}57\text{x}10^6\text{J}}{50{,}3\text{J/s}} = 5{,}11\text{x}10^4\text{s} = 14{,}2\text{h}$$

Respuesta:

$\Delta t = 14{,}2$ horas

PR-4.18. *La adiabática mas empinada que la isotérmica*

En un diagrama de presión P en función del volumen V, correspondiente a cierto proceso en un gas ideal, se intersecan una curva adiabática y una curva isotérmica. Demuestre que la curva adiabática está siempre mas inclinada que la curva isotérmica en cualquier punto.

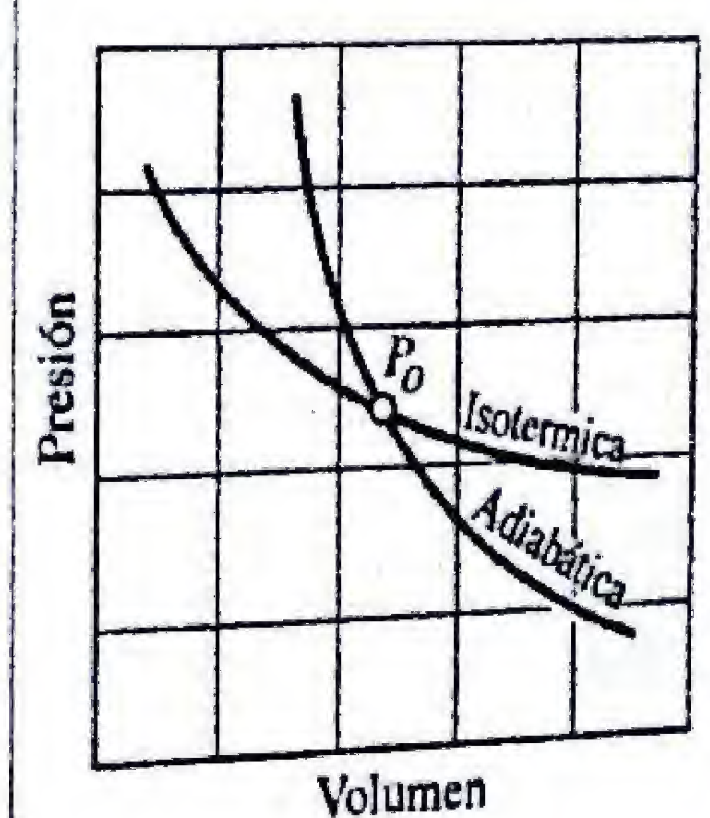
Solución. Para un proceso isotérmico, se cumple la relación:

$$PV = \text{constante}$$

Diferenciando:

$$PdV + VdP = 0$$

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)\Bigg|_{isot} = -\frac{P}{V}$$



Mientras que para un proceso adiabático la relación es:

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

Diferenciando:

$$\gamma P V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = 0$$

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)\Big|_{adiab} = -\gamma\frac{P}{V}$$

Si comparamos estas dos expresiones para dP/dV, encontramos que en cualquier punto donde se intersecan estas dos curvas se cumple:

$$\left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_{adiab}\right| = \gamma\left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_{isot}\right|$$

Como el coeficiente adiabático $\gamma = C_P/C_v > 1$, queda demostrado que en un punto dado del gráfico, la pendiente de la adiabática es siempre mayor que la correspondiente a la isotérmica.

Respuesta:

La curva adiabática es mas inclinada que la isotérmica

PR-4.19. *Calor específico C_P es siempre mayor que C_V*

a) Explique por qué el calor específico a presión constante es siempre mayor que a volumen constante.

b) Demuestre que para un gas ideal la diferencia entre los calores específicos es:

$$c_p - c_v = R$$

Solución. a) Cuando se agrega energía calorífica a *volumen constante*, toda esta energía adicional se invierte en incrementar la energía interna del sistema y así elevar su temperatura. Si la misma energía térmica se suministra a *presión constante*, parte de esta energía va al entorno sobre el cual el sistema trabaja (ejemplo, a un pistón móvil). Por lo tanto, una menor energía se agrega como energía interna, el incremento de temperatura será menor y así el calor específico resulta mayor.

b) Consideremos dos isotermas de un gas ideal que difieren en temperatura por ΔT y supongamos dos maneras distintas de agregar calor al gas para obtener el mismo ΔT: 1) A volumen constante y 2) a presión constante. Si aplicamos la primera ley ($\Delta U = Q - W$), se obtiene

1) V constante: $W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q = nc_v\Delta T$

2) p constante: $\Delta U = Q' - W = nc_p\Delta T - p\Delta V$

Sabemos que la energía interna U de un gas ideal depende únicamente de la temperatura. Como la diferencia ΔT es la misma para ambos procesos, el cambio en energía interna ΔU tendrá el mismo valor. Además, por la ecuación de estado del gas ideal, se tiene:

$$p\Delta V = nR\Delta T$$

Por lo tanto:

$$nc_v\Delta T = nc_p\Delta T - nR\Delta T \quad \Rightarrow \quad c_v = c_p - R$$

Respuesta:

$c_p - c_v = R$

PR-4.20. *¿Son moléculas monoatómicas o diatómicas?*

Se tiene un gas desconocido de una sustancia pura, inicialmente a la temperatura ambiente $T_0 = 300$ K. Cuando es sometido a una expansión adiabática y cuasi estática hasta triplicar su volumen, se observa que el gas se enfría alcanzando una temperatura final $T_1 = 193{,}3$ K. Determine si el gas es monoatómico o diatómico.

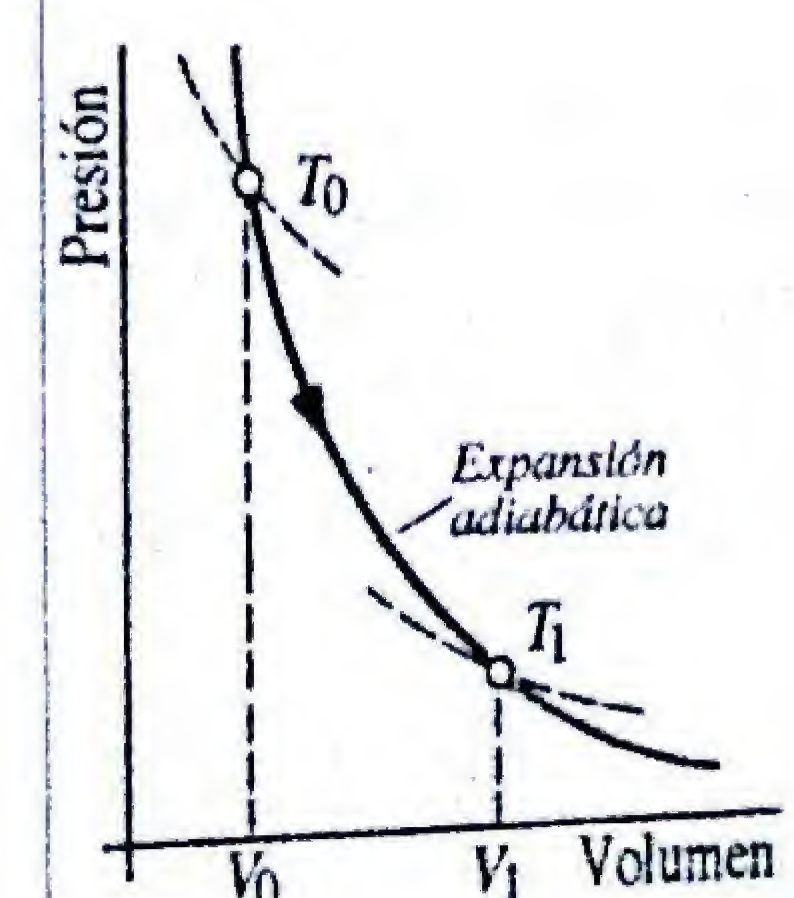
Solución: Como el proceso es adiabático se cumple la relación:

$$P_0V_0^\gamma = P_1V_1^\gamma$$

Siendo γ la constante adiabática del gas a determinar. Aplicando la ecuación de estado del gas ideal, se tiene:

$$\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = \frac{P_1}{P_0} = \frac{nRT_1/V_1}{nRT_0/V_0}$$

$$\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_0}$$



Tomando logaritmos a ambos lados de esta ecuación:

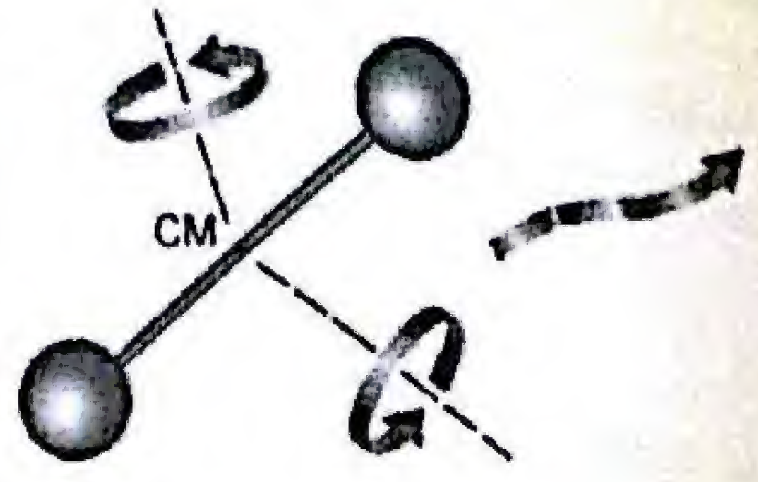
$$(\gamma - 1)\,ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) = ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\gamma = 1 + \frac{ln(T_1/T_0)}{ln(V_0/V_1)}$$

$$\gamma = 1 + \frac{ln(193{,}3\text{K}/300\text{K})}{ln(V_0/3V_0)} = 1 + \frac{-0{,}4395}{-1{,}099} = 1{,}4$$

Tomando en cuenta que la constante γ está relacionada con el número de grados de libertad de las moléculas, f.

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = 1{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad f = 2/0{,}4 = 5$$



En conclusión, la moléculas del gas son diatómicas, ya que estas tienen 5 grados de libertad, (tres para el movimiento de traslación del centro de masa y dos para la rotación alrededor de dos ejes perpendiculares que pasan por el CM). A temperaturas no demasiado elevadas las vibraciones no contribuyen apreciablemente al calor específico de las moléculas diatómicas.

Respuesta:

El gas es diatómico

PR-4.21. *Trabajo durante una expansión adiabática*

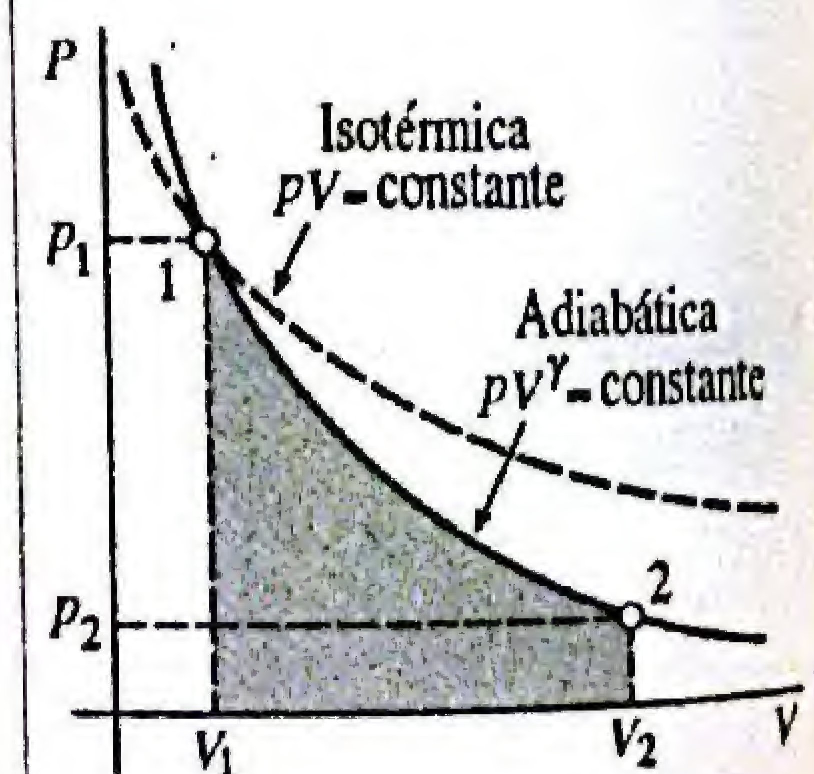
Un gas ideal experimenta un proceso cuasi-estático de expansión en aislamiento térmico (adiabático), desde un estado inicial con presión p_1 y volumen V_1 hasta un estado final con presión p_2 y volumen V_2.
a) Calcule el trabajo realizado *por* el gas.
b) Verifique que la expresión para el trabajo W es consistente con la primera ley de la termodinámica.

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

Solución: a) Para un proceso cuasi estático adiabático, se aplica la expresión: pV^γ = constante, siendo la razón de calores específicos $\gamma = c_p / c_v$. Escogiendo el estado inicial en el punto 1, escribimos:

$$pV^\gamma = p_1V_1^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

El trabajo adiabático entre los estados 1 y 2 es:



$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}\,dV$$

$$W = p_1V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = p_1V_1^\gamma \left.\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right|_{V_1}^{V_2}$$

Tomando en cuenta que : $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$, podemos escribir:

$$W = \frac{p_1V_1^\gamma}{1-\gamma}(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2^\gamma V_2^{1-\gamma} - p_1V_1^\gamma V_1^{1-\gamma})$$

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

b) Sabemos que $Q = 0$ y de acuerdo a la primera ley:

$$W = -\Delta U = -nc_v(T_2 - T_1)$$

Para un gas ideal: $pV = nRT$, por lo tanto:

$$W = nc_v(T_1 - T_2) = nc_v\left(\frac{p_1V_1}{nR} - \frac{p_2V_2}{nR}\right) = \frac{c_v}{R}(p_1V_1 - p_1V_1)$$

Podemos expresar c_v / R en términos de $\gamma = c_p / c_v$:

$$\frac{c_v}{R} = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{c_p / c_v - 1} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

Sustituyendo, se obtiene la misma expresión que la hallada en el inciso (a) para el trabajo adiabático.

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

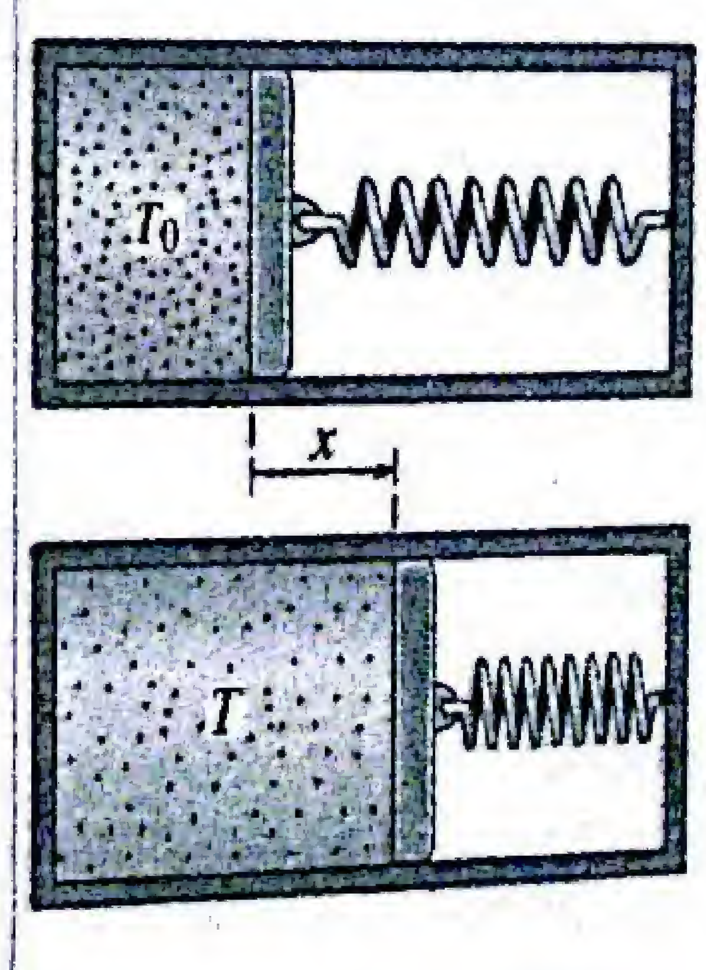
En esta expresión, observamos que si el proceso es una expansión adiabática, la temperatura inicial T_1 es mayor que T_2, entonces $p_1V_1 > p_2V_2$ y el trabajo efectuado por el gas es positivo. Si es una compresión adiabática, el trabajo será negativo.

Respuesta:

a) $W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$
b) $W = -\Delta U$

PR-4.22. *El gas se expande y comprime el resorte*

Un cilindro horizontal está aislado térmicamente del medio ambiente y tiene un émbolo que lo divide en dos regiones. La parte izquierda está ocupada por n moles de un gas ideal monoatómico y en la parte derecha, donde hay un resorte entre el émbolo y la pared, se ha creado vacío. Inicialmente el émbolo se mantiene anclado de modo que el resorte quede en estado sin deformar. En esta situación el gas ocupa un volumen V_0 a la temperatura de equilibrio T_0. A continuación, se libera el émbolo y después de establecerse el equilibrio, el gas pasa a ocupar un volumen doble que el anterior ($V = 2V_0$). ¿Cuál será la nueva temperatura del gas? Se desprecian las capacidades caloríficas del cilindro, émbolo y resorte.



Solución: En la nueva posición la fuerza ejercida por la presión p del gas sobre el émbolo de área A equilibra la fuerza elástica de compresión del resorte: $F = kx = pA$.
El desplazamiento x del resorte está relacionado con el cambio de volumen ocupado por el gas: $x = (V - V_0)/A$.

Empleando la ecuación de estado: $pV = nRT$, escribimos para la constante k del resorte:

$$k = \frac{pA}{x} = \frac{(nRT/V)A}{(V - V_0)/A} = \frac{nRTA^2}{V(V - V_0)}$$

La energía potencial almacenada en el resorte proviene de la pérdida de energía interna del gas al expandirse, la cual depende únicamente del cambio en su temperatura:

$$\frac{1}{2}kx^2 = -\Delta U_{int} = -nC_V(T - T_0) = nC_V(T_0 - T)$$

Donde C_V es el calor específico del gas a volumen constante. Sustituyendo k y x se tiene:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{nRTA^2}{V(V - V_0)}(\frac{V - V_0}{A})^2 = \frac{nRT}{2}(\frac{V - V_0}{V})$$

Para el gas monoatómico ideal $C_V = (3/2)R$ y $V = 2V_0$:

$$\frac{nRT}{2}(\frac{2V_0 - V_0}{2V_0}) = n(\frac{3}{2}R)(T_0 - T)$$

$$T = 6(T_0 - T) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{6}{7}T_0$$

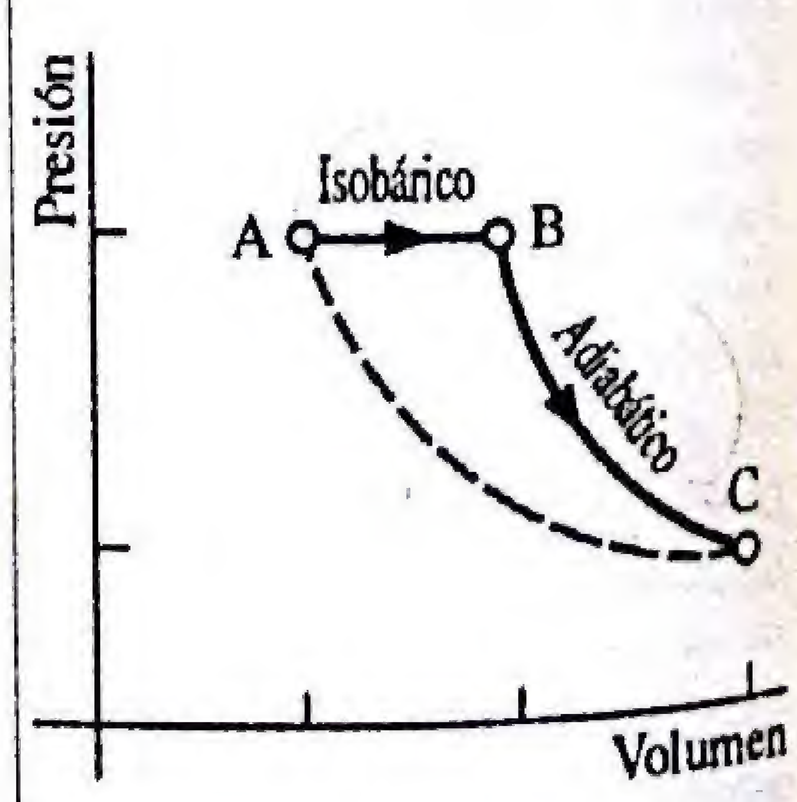
Respuesta:

$$\boxed{T = \frac{6}{7}T_0}$$

PR-4.23. *Inflando un globo de goma en dos etapas*

Un globo de goma contiene un mol de helio a la temperatura ambiente $T_A = 27°C$. El helio se expande a presión constante hasta que su volumen se duplica ($V_B = 2V_A$). Luego se expande en forma adiabática hasta alcanzar de nuevo su temperatura inicial ($T_C = T_A$).

a) ¿Cuál es el calor suministrado al helio en todo el proceso ABC?
b) ¿Cuál es el cambio neto en su energía interna?
c) ¿Cuál es el trabajo neto W_{ABC} realizado por el helio?
d) ¿Cuál es el volumen final, V_C, del helio?



Solución. a) En la expansión isobárica AB aplicamos la ecuación de estado entre A y B, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} P_AV_A = nRT_A \\ P_BV_B = nRT_B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} = 2$$

Es decir, la temperatura se duplica ($T_B = 2T_A$) y el calor absorbido es:

$$Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = \frac{5}{2}nRT_A$$

$$Q_{AB} = \frac{5}{2}(1\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K}) = 6233\text{J}$$

Helio
(gas monoatómico)

$c_P = (5/2)R$, $\gamma = 5/3$

$\int_{V_A}^{2V_A} P dV = P(2V_A - V_B)$

Entre B y C, como se trata de un proceso adiabático, no hay flujo de calor ($Q_{BC} = 0$) y se tiene:

$$Q_{ABC} = Q_{AB} + Q_{BC} = 6233\text{J} + 0 = 6233\text{J}$$

b) Como $T_C = T_A$, entonces $U_C = U_A$, es decir, en el proceso ABC no hay variación de energía interna:

$$\Delta U_{ABC} = 0$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{ABC} = Q_{ABC} - W_{ABC} = 0$$

$$W_{ABC} = Q_{ABC} = 6233\text{J}$$

d) Para el proceso adiabático BC se tiene:

$$P_BV_B^{\gamma} = P_CV_C^{\gamma} \qquad (P_BV_B)V_B^{\gamma-1} = P_CV_CV_C^{\gamma-1}$$

$$(nRT_B)V_B^{\gamma-1} = (nRT_C)V_C^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_B} = (\frac{T_B}{T_C})^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

La relación del volumen final al inicial es:

$$\frac{V_C}{V_A} = (\frac{V_C}{V_B})(\frac{V_B}{V_A}) = (\frac{T_B}{T_C})^{\frac{1}{\gamma-1}}(\frac{V_B}{V_A}) = 2^{\frac{1}{\gamma-1}+1} = 2^{\frac{1}{5/3-1}+1} = 2^{5/2}$$

$$V_C = 2^{5/2}V_A$$

Respuesta:

a) $Q_{ABC} = 6233\text{J}$
b) $\Delta U_{ABC} = 0$
c) $W_{ABC} = 6233\text{J}$
d) $V_C = 2^{5/2}V_A$

PR-4.24. *Temperatura crítica en gas de van der Waals*

Para un gas que obedece la ecuación de estado de van der Waals, a temperaturas T altas en el diagrama p-V la curva isoterma tiene la forma aproximadamente hiperbólica y el comportamiento del gas es cercano al ideal.
a) ¿Por qué a lo largo de una isoterma del gas la pendiente dp/dV siempre es negativa?
b) A medida que la temperatura disminuye la isoterma comienza a mostrar un doblez, y a una cierta temperatura crítica T_c, hay una zona plana en que la pendiente es nula ($dp/dV = 0$). Esto representa un equilibrio entre dos fases; el volumen puede cambiar sin un cambio en la presión, como cuando hierve agua a la presión atmosférica. Determine los valores de la temperatura, el volumen y la presión críticas en términos de las constantes a y b.

Ecuación de estado de van der Waals

$$(p+\frac{an^2}{V^2})(V-nb)=nRT$$

Solución: a) Una pendiente positiva significa que un incremento en la presión p causa un incremento en el volumen V, o que una disminución en el volumen resulta en una disminución en la presión. Esto no es posible para un gas real, por lo tanto, la pendiente *dp/dV siempre debe ser negativa.*

b) Como $\partial p/\partial V = 0$, debe haber un punto de inflexión a lo largo de la isoterma y en cálculo aprendimos que allí la segunda derivada también debe ser nula ($\partial^2 p/\partial V^2 = 0$). Si despejamos la presión de la ecuación de van der Waals:

$$(p+\frac{an^2}{V^2})(V-nb)=nRT \quad\Rightarrow\quad p=\frac{nRT}{(V-nb)}-\frac{an^2}{V^2}$$

Al tomar las derivadas suponemos que T es constante:

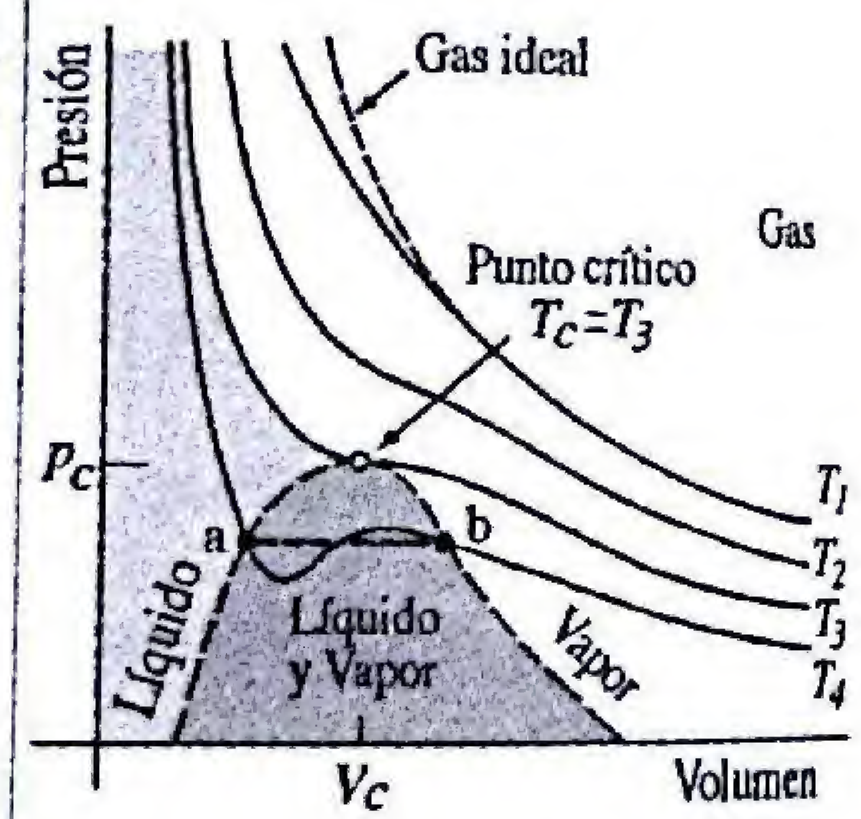
$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{nRT}{(V-nb)^2}+\frac{2an^2}{V^3}=0$$

$$V^3nRT=2an^2(V-nb)^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}=+\frac{2nRT}{(V-nb)^3}-\frac{6an^2}{V^4}=0$$

$$V^4nRT=3an^2(V-nb)^3 \qquad (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre la (1), se obtiene el volumen crítico:



Curvas de p vs V en un gas de van der Waals a diferentes isotermas: $T_4 < T_3 < T_2 < T_1$

A temperaturas superiores a la temperatura crítica, $T > T_c$, la sustancia solo puede estar en estado gaseoso y resulta imposible licuar el gas mediante un aumento de presión.

$$V=\frac{3}{2}(V-nb) \quad\Rightarrow\quad V_c=3nb$$

Sustituyendo V_c en la ecuación (1), se obtiene la temperatura crítica:

$$T_c=\frac{2an(V_c-nb)^2}{RV_c^3}=\frac{2an(3nb-nb)^2}{R(3nb)^3}=\frac{8a}{27Rb}$$

Por último, la presión crítica es:

$$p_c=\frac{nRT_c}{(V_c-nb)}-\frac{an^2}{V_c^2}=\frac{nR(8a/27Rb)}{(3nb-nb)}-\frac{an^2}{(3nb)^2}$$

$$p_c=\frac{4a}{27b^2}-\frac{a}{9b^2}=\frac{a}{27b^2}$$

Se acostumbra a usar el término *vapor* para el estado gaseoso a una temperatura inferior a T_c.

El modelo de van der Waals nos proporciona una descripción más realista que el del gas ideal, sobre todo cuando los gases estén casi en su punto de condensación, es decir, a temperaturas bajas y a densidades cercanas a las de los líquidos. Las desviaciones de las predicciones de van der Waals a temperaturas por debajo de la temperatura crítica (ver isoterma T_4), se deben al inicio de la licuefacción. Para un gas real el comportamiento es más parecido a la línea recta punteada $\overline{ab}$ de la figura, ya que cuando el gas se comprime a lo largo de esa isoterma, parte del gas se condensa en un líquido y la presión permanece constante. En la región comprendida dentro de la curva punteada hay licuefacción parcial y el vapor y el líquido coexisten.

Respuesta:

Volumen:	$V_c = 3nb$
Temperatura:	$T_c=\frac{8a}{27Rb}$
Presión:	$p_c=\frac{a}{27b^2}$

PR-4.25. *Trabajo de un gas de van der Waals*

El modelo de gas ideal supone que el gas ocupa un volumen muy grande y las moléculas están muy separadas entre sí. La ecuación de estado de van der Waals da una mejor aproximación al comportamiento real de los gases al incluir correcciones por el tamaño finito de las moléculas y los efectos de las fuerzas intermoleculares.

$$(p+\frac{an^2}{V^2})(V-nb)=nRT$$

Donde a y b son constantes positivas distintas para cada sustancia.

a) Verifique que esta ecuación se reduce a la ley del gas ideal cuando el gas está muy diluido.

b) Calcule el trabajo efectuado por un gas durante una expansión isotérmica a temperatura T desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2. Verifique que su resultado coincide con el trabajo isotérmico en el caso especial de un *gas ideal*.

Solución: a) Cuando el gas está muy diluido el número de moléculas por unidad de volumen es pequeño y en el límite ($n/V \to 0$), el término an^2/V^2 es despreciable frente a p así como lo es el término nb en comparación con V. La ecuación se reduce a $pV = nRT$.

b) Despejando p de la ecuación de van der Waals, se obtiene:

$$p = \frac{nRT}{(V-nb)} - \frac{an^2}{V^2}$$

El trabajo W se obtiene integrando esta expresión:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT}{(V-nb)} - \frac{an^2}{V^2}\right) dV$$

$$W = nRT\, ln(V-nb)\Big|_{V_1}^{V_2} + an^2 \frac{1}{V}\Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$W = nRT\, ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) + an^2\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

En el límite ($n/V \to 0$) se obtiene la expresión del trabajo isotérmico para el gas ideal: $W = nRT\, ln(V_2/V_1)$.

Respuesta:

$$\boxed{W = nRT\, ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) + an^2\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}$$

PR-4.26. ***Calor, trabajo y energía interna en un ciclo***

Un mol de un gas ideal es sometido a los procesos:

(A→B) Expansión isotérmica a la temperatura T_0.

(B→C) Compresión isobárica a la presión $P_0/2$.

(C→A) Calentamiento isocórico al volumen V_0.

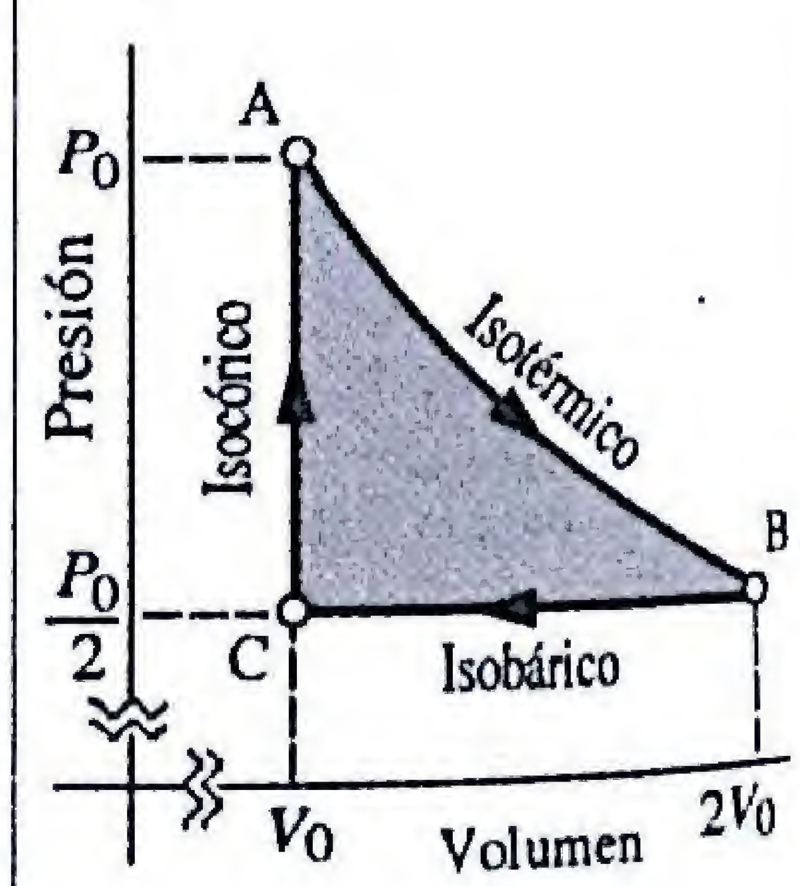
Determine para cada uno de los tres procesos:

a) El cambio de energía interna del gas.

b) El calor suministrado al gas.

c) El trabajo realizado por el gas.

Exprese estas cantidades en términos de la temperatura inicial T_0 y de los calores específicos c_p y c_v del gas.



Solución: Expansión isotérmica: A(P_0, V_0)→B($P_0/2$, $2V_0$). Como la energía interna depende únicamente de la temperatura:

$$\Delta U_{AB} = 0$$

El trabajo hecho por el gas es: $W_{AB} = \int PdV$

$$W_{AB} = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0\, ln\left(\frac{2V_0}{V_0}\right) = RT_0\, ln2$$

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = W_{AB} = RT_0\, ln2$$

Compresión isobárica: B($P_0/2$, $2V_0$) → C($P_0/2$, V_0)

El trabajo hecho por el gas es:

$$W_{BC} = \int_{2V_0}^{V_0} \frac{P_0}{2} dV = \frac{P_0}{2}(V_0 - 2V_0) = -\frac{P_0 V_0}{2} = -\frac{RT_0}{2}$$

El calor transferido es:

$$Q_{BC} = nc_p \Delta T = c_p(T_c - T_0)$$

La temperatura se calcula de la ecuación de estado:

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_0 \frac{V_0}{2V_0} = \frac{T_0}{2}$$

Por lo tanto:

$$Q_{BC} = c_p\left(\frac{T_0}{2} - T_0\right) = -\frac{c_p T_0}{2}$$

Por la primera ley, el cambio en la energía interna es:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = -\frac{c_p T_0}{2} - \left(-\frac{RT_0}{2}\right) = \frac{T_0}{2}(R - c_p)$$

Como $(c_p - c_V) = R$ entonces: $\Delta U_{BC} = -\frac{c_V T_0}{2}$

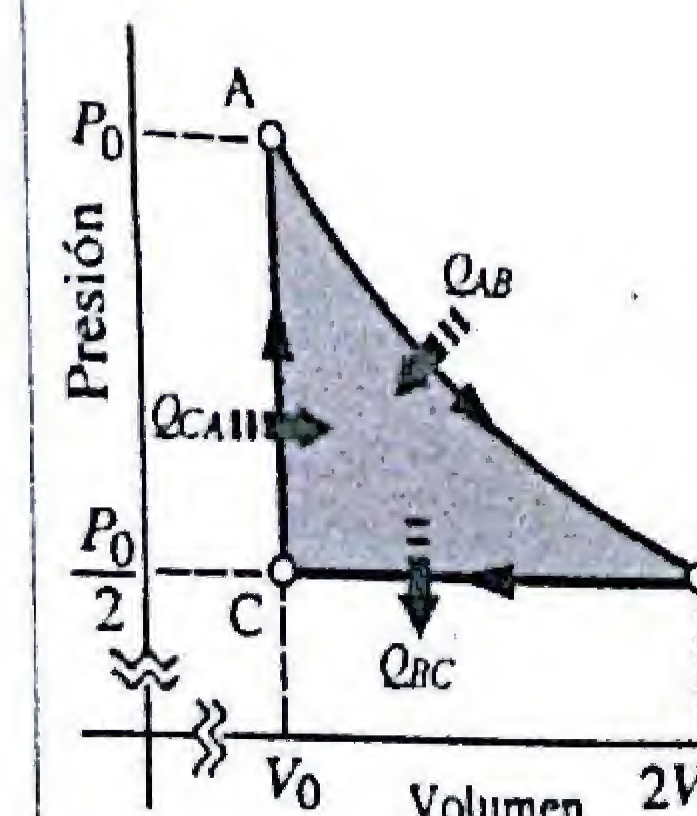
Calentamiento isocórico: C($P_0/2$, V_0)→ A(P_0, V_0).

Como el volumen no cambia: W_{CA}=0 y el calor suministrado es:

$$Q_{CA} = nc_v \Delta T = c_v(T_A - T_C) = c_v\left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) = \frac{c_v T_0}{2}$$

Finalmente, el cambio de energía interna es:

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} - W_{CA} = \frac{c_v T_0}{2} + 0 = \frac{c_v T_0}{2}$$



Respuesta:

Proceso	W	Q	ΔU
AB	$RT_0\, ln2$	$RT_0\, ln2$	0
BC	$-\frac{RT_0}{2}$	$-\frac{c_p T_0}{2}$	$-\frac{c_V T_0}{2}$
CA	0	$\frac{c_v T_0}{2}$	$\frac{c_v T_0}{2}$

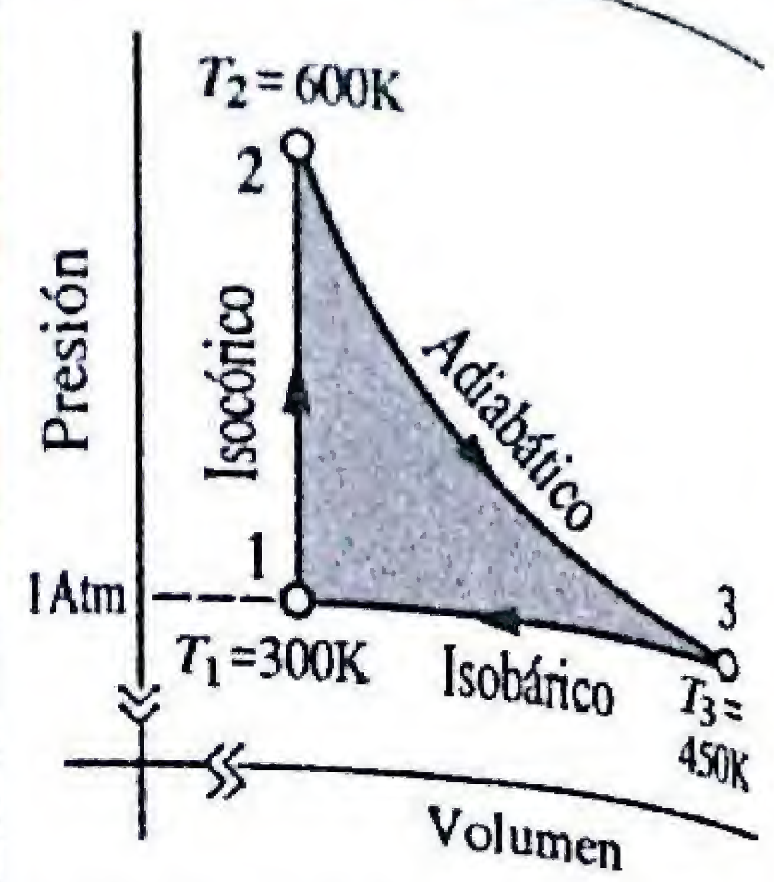
PR-4.27. *La primera ley se verifica en ciclo completo*

Un mol de un gas ideal monoatómico es llevado a través de un ciclo constituido por los tres procesos mostrados: Isocórico, adiabático e isobárico.

a) Determine para cada uno de los tres procesos, el calor el trabajo y el cambio de energía interna.

b) Verifique la primera ley para el ciclo completo

c) Encuentre la presión y el volumen en los puntos 2 y 3.



Solución: a) Proceso (1 → 2): el volumen no cambia y el trabajo es cero ($W_{12} = 0$). El cambio de energía interna es:

$$\Delta U_{12} = nc_V \Delta T = n\frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U_{12} = (1\text{mol})\frac{3}{2}(8{,}31\text{J/mol.K})(600\text{K} - 300\text{K}) = 3740\text{J}$$

El calor se obtiene de la primera ley:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = 3740\text{J} + 0 = 3740\text{J}$$

Proceso (2 → 3): Es adiabático y por lo tanto: $Q_{23} = 0$. El cambio de energía interna es:

$$\Delta U_{23} = nc_V \Delta T = n\frac{3}{2}R(T_3 - T_2)$$

$$\Delta U_{23} = (1\text{mol})\frac{3}{2}(8{,}31\text{J/mol.K})(450\text{K} - 600\text{K}) = -1870\text{J}$$

El trabajo se obtiene de la primera ley:

$$W_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} = 0 - (-1870\text{J}) = +1870\text{J}$$

Proceso (3 → 1): La presión es constante y utilizando la ley del gas ideal ($pV = nRT$), el trabajo es:

$$W_{31} = p\Delta V = nR\Delta T = nR(T_1 - T_3)$$

$$W_{31} = (1\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K} - 450\text{K}) = -1247\text{J}$$

El cambio de energía interna es:

$$\Delta U_{31} = nc_V \Delta T = n\frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$$

$$\Delta U_{31} = (1\text{mol})\frac{3}{2}(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K} - 450\text{K}) = -1870\text{J}$$

El calor se obtiene de la primera ley:

$$Q_{31} = W_{31} + \Delta U_{31} = -1247\text{J} - 1870\text{J} = -3117\text{J}$$

b) Para el ciclo completo, se suman los valores de las tres etapas:

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 0 + 1870\text{J} - 1247\text{J} = +623\text{J}$$
$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = +3740\text{J} + 0 - 3117\text{J} = +623\text{J}$$
$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = +3740\text{J} - 1870\text{J} - 1870\text{J} = 0$$

Aquí se verifica la primera ley, como es de esperar,:

$$Q - W = +623\text{J} - 623\text{J} = 0 = \Delta U$$

b) En el punto 1 se obtiene, de la ley de gas ideal ($pV = nRT$):

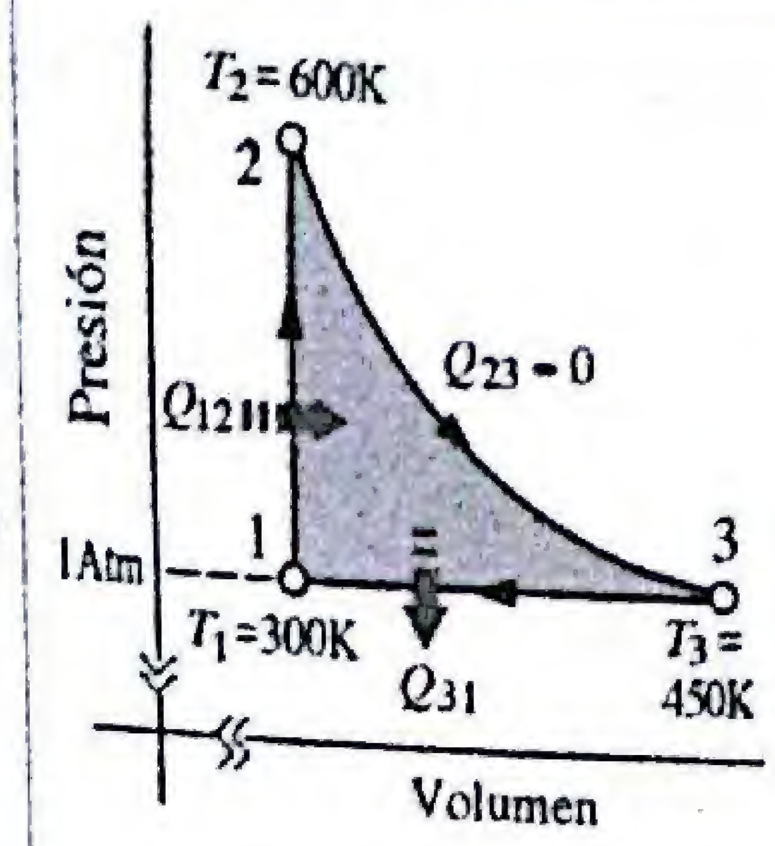
$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{(1\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K})}{1{,}01\text{x}10^5\text{N/m}^2} = 0{,}0247\text{m}^3$$

En el punto 2, $V_2 = V_1$, por lo tanto:

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} = (1\text{ atm})\frac{600\text{K}}{300\text{K}} = 2\text{ atm}$$

En el punto 3, $p_3 = p_1 = 1\text{atm}$, por lo tanto:

$$\frac{p_1V_1}{p_3V_3} = \frac{T_1}{T_3} \Rightarrow V_3 = V_1\frac{T_3}{T_1} = 0{,}0247\text{m}^3\frac{450\text{K}}{300\text{K}} = 0{,}0371\text{ m}^3$$



Respuesta:

Proceso	W	Q	ΔU
1→2	0	+3740J	+3740J
2→3	+1870J	0	−1870J
3→1	−1247J	−3117J	−1870J
Ciclo:	+623J	+623J	0

Punto	T	p	V
1	300 K	1 atm	0,0247m³
2	600 K	2 atm	0,0247m³
3	450 K	1 atm	0,0371m³

PR-4.28. *Temperatura desconocida en ciclo rectangular*

Sobre n moles de un gas ideal se realiza un proceso cíclico rectangular ABCDA, que consiste de dos etapas a volumen constante (Isócoras AB y CD) y dos a presión constante (Isóbaras BC y DA). Las temperaturas en los puntos A y C son conocidas e iguales a T_A y T_C respectivamente y los puntos B y D están sobre una curva isoterma. Determine:

a) La temperatura T_0 de la isoterma.

b) El trabajo que realiza el gas durante el ciclo.

Solución. a) Para hallar la temperatura T_0 de la isoterma aplicamos la ecuación de estado del gas ideal en cada uno de los puntos del ciclo:

Estado A: $\quad P_A V_A = nRT_A \qquad$ (i)

Estado B: $\quad P_B V_A = nRT_o \qquad$ (ii)

Ya que: $V_B = V_A$ y $T_B = T_0$

Dividiendo la ecuación (i) entre la (ii) tenemos:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{T_A}{T_0} \qquad \text{(iii)}$$

De manera similar:

Estado C: $\quad P_B V_C = nRT_C \qquad$ (iv)

Estado D: $\quad P_A V_C = nRT_0 \qquad$ (v)

Ya que: $P_C = P_B$; $\quad P_D = P_A$; $\quad V_D = V_C$; $\quad T_D = T_0$

Dividiendo la ecuación (v) entre la (iv) tenemos:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{T_0}{T_C} \qquad \text{(vi)}$$

Igualando las relaciones (iii) y (vi) obtenemos finalmente:

$$\frac{T_A}{T_0} = \frac{T_0}{T_C} \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \sqrt{T_A T_C}$$

b) El trabajo durante el ciclo es numéricamente igual al área encerrada por el rectángulo ABCDA:

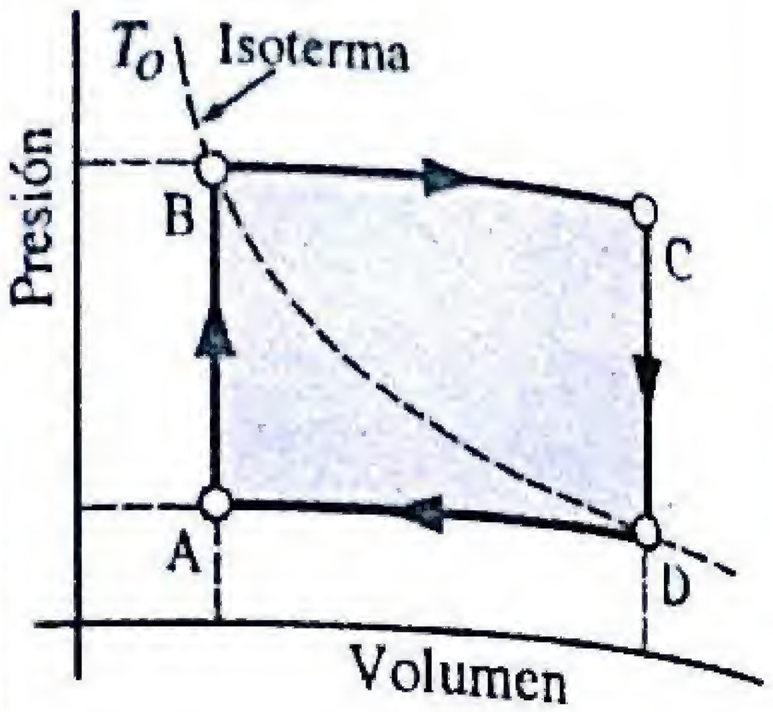
$$W_{ciclo} = (P_C - P_A)(V_C - V_A)$$

$$W_{ciclo} = P_A V_A + P_C V_C - (P_A V_C + P_C V_A)$$

Reemplazando en esta expresión los respectivos productos PV en términos de las temperaturas dadas por la ecuación de estado, tenemos:

$$W_{ciclo} = nRT_A + nRT_C - 2nRT_o$$

$$W_{ciclo} = nR[T_A + T_C - 2T_0] = nR[\sqrt{T_A} - \sqrt{T_C}]^2$$



Respuesta:

a) $T_0 = \sqrt{T_A T_C}$
b) $W_{ciclo} = nR[\sqrt{T_A} - \sqrt{T_C}]^2$

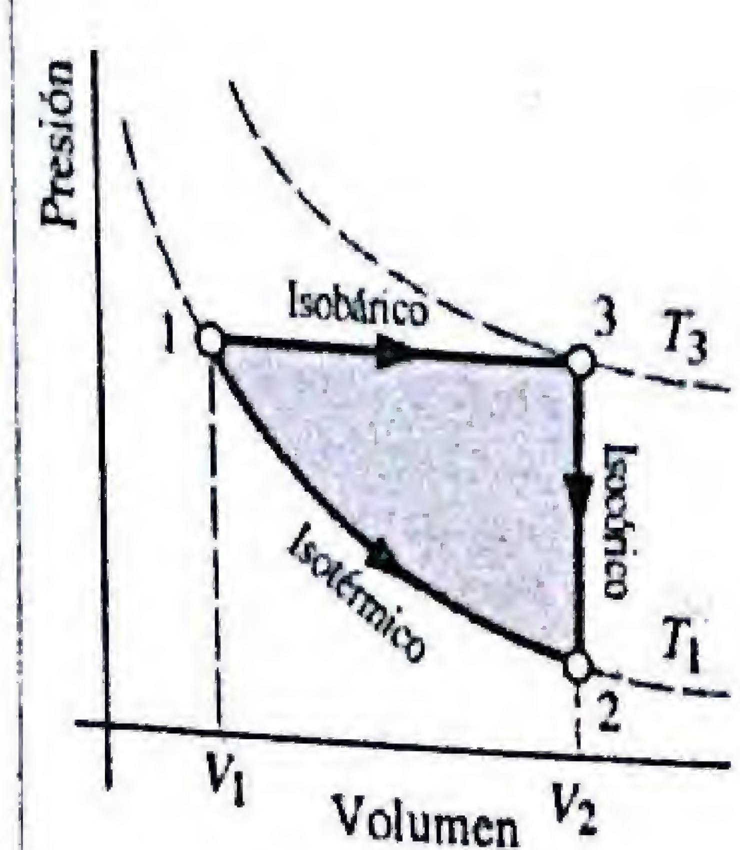
PR-4.29. *Un mol siguiendo procesos diferentes*

Un mol de un gas monoatómico ideal que está inicialmente a una temperatura $T_1 = 300$ K, se expande desde un volumen inicial V_1 hasta un volumen final V_2, siguiendo dos procesos:

a) Proceso $1 \to 3 \to 2$: Una expansión isobárica hasta alcanzar una temperatura $T_3 = 500$ K, seguida de un enfriamiento isocórico hasta regresar a la temperatura inicial T_1.

b) Proceso $1 \to 3$: Una expansión isotérmica.

Determine para cada uno de estos procesos: El calor Q, el trabajo W, y la variación de energía interna ΔU.



Solución. a) Para la etapa $(1 \to 3)$ a presión constante, tomando en cuenta que $P_1 = P_3$, el trabajo hecho por el gas es:

$$W_{13} = \int_{V_1}^{V_3} P dV = P_1(V_3 - V_1) = P_3 V_3 - P_1 V_1 = nR(T_3 - T_1)$$

$$W_{13} = (1\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})(500\text{K} - 300\text{K}) = 1662\text{J}$$

Por otra parte, para un gas monoatómico ideal $C_p = (5/2)R$ y el calor absorbido es: $Q_{13} = nC_p\Delta T$

$$Q_{13} = (1 \text{ mol})(5/2)(8.31 \text{ J/molK})(500 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 4155 \text{ J}$$

La segunda etapa de este proceso, $(3 \to 2)$ es a volumen constante, y por lo tanto no se realiza trabajo:

$$W_{32} = 0$$

El calor absorbido es:

$$Q_{32} = nC_v\Delta T$$

$$Q_{32} = (1 \text{ mol})(3/2)(8.31 \text{ J/mol.K})(300 \text{ K} - 500 \text{ K}) = -2493 \text{ J}$$

Ahora podemos sumar los resultados de las dos etapas, $(1 \to 3)$ y $(3 \to 2)$ para obtener los valores de Q y W, a lo largo de todo el proceso:

$$W_{132} = W_{13} + W_{32} = 1662\text{J} \quad + \quad 0 = 1662\text{J}$$

$$Q_{132} = Q_{13} + Q_{32} = 4155J - 2493J = 1662\ J$$

Finalmente, aplicamos la 1ª ley para hallar la variación neta de energía interna para el proceso global (1→3→2):

$$\Delta U_{132} = Q_{132} - W_{132} = 1662J - 1662J = 0$$

Como debíamos esperar, en el proceso (1→3→2) no hay variación neta de energía interna ya que el estado final del sistema tiene la misma temperatura que el estado inicial (300 K). Para concluir, podemos resumir los resultados en las dos tablas que se muestran a la derecha.

b) En la expansión isotérmica (1→2) el trabajo realizado por el gas es:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln(\frac{V_2}{V_1}) \qquad (i)$$

Podemos relacionar los volúmenes con las temperaturas:

$$P_1V_1 = nRT_1 \qquad (ii)$$

$$P_3V_3 = P_1V_2 = nRT_3 \qquad (iii)$$

Dividiendo la ecuación (iii) entre la (ii), se obtiene $(V_2/V_1) = (T_3/T_1)$ y reemplazando esta relación en la ecuación (i):

$$W_{12} = nRT_1 \ln(\frac{T_3}{T_1})$$

Como la temperatura es constante, la energía interna no cambia ($\Delta U_{12} = 0$) y de acuerdo a la 1ª ley obtenemos:

$$Q_{12} = W_{12} = nRT_1 \ln(\frac{T_3}{T_1})$$

$$Q_{12} = W_{12} = 1mol x 8{,}31 J/molK x 300K \ln(\frac{500K}{300K}) = 1273J$$

Respuesta:

(a)

	Q	W	ΔU
(1→3)	4155 J	1662 J	2493 J
(3→2)	-2493 J	0	-2493 J
Total	1662 J	1662 J	0

(b)

	Q	W	ΔU
(1→2)	1273 J	1273 J	0

PR-4.30. *Una temperatura con variación cuadrática*

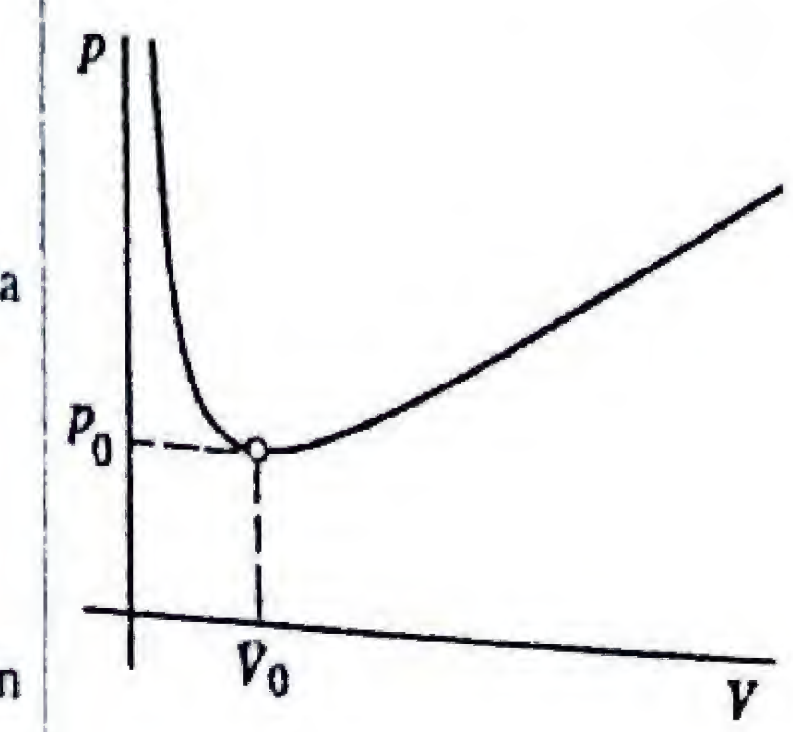
Un mol de un gas ideal sigue un proceso que transcurre con una variación de temperatura en función del volumen:

$$T = T_0 + aV^2$$

Donde T_0 y a son constantes. Determine la presión mínima posible durante este proceso.

Solución. Si combinamos la ecuación para este proceso: $T = T_0 + aV^2$, con la ecuación de estado para un mol del gas ideal, $pV = RT$, se obtiene la presión:

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{R(T_0 + aV^2)}{V} = \frac{RT_0}{V} + aRV$$



El mínimo de esta función ocurre cuando la derivada sea cero:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT_0}{V^2} + aR = 0$$

El valor del volumen que corresponde a la presión mínima es:

$$V_0 = \sqrt{T_0 / a}$$

Por lo tanto, la presión mínima posible del gas es:

$$P_0 = \frac{RT_0}{V_0} + aRV_0 = \frac{RT_0}{\sqrt{T_0/a}} + aR\sqrt{T_0/a}$$

$$P_0 = 2R\sqrt{aT_0}$$

Respuesta:

$$\boxed{P_0 = 2R\sqrt{aT_0}}$$

PR-4.31. *Una presión con variación cuadrática*

Un gas ideal monoatómico constituido por n moles está confinado en un recipiente inicialmente con volumen y presión, V_O y P_O, respectivamente. A continuación la presión del gas varía de acuerdo a la relación cuadrática:

$$P = P_0 + a(V - V_0)^2$$

Siendo a una constante.

Si el proceso termina en un volumen $V = 2V_O$, Determine:

a) El cambio de energía interna del sistema.

b) El trabajo hecho por el sistema.

c) El calor absorbido por el sistema.

Solución. a) El cambio de energía interna se determina a partir del cambio de temperatura. De la ecuación de estado, tenemos las temperaturas inicial y final:

$$T_0 = \frac{P_0V_0}{nR} \qquad T_F = \frac{P_F(2V_0)}{nR}$$

De acuerdo a la relación dada para P tenemos:

$$P_F = P_0 + aV_0^2$$

De modo que:

$$T_F = \frac{(P_0 + aV_0^2)(2V_0)}{nR} = \frac{2P_0V_0}{nR} + \frac{2aV_0^3}{nR}$$

Entonces:

$$\Delta U = nc_V(T_F - T_0) = \frac{c_V}{R}(2P_0V_0 + 2aV_0^3 - P_0V_0)$$

Para un gas monoatómico ideal el calor específico a volumen constante es: $c_V = (3/2)R$, sustituyendo:

$$\Delta U = \frac{3}{2}(P_0V_0 + 2aV_0^3)$$

El trabajo hecho por el gas viene dado por:

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} PdV = \int_{V_0}^{2V_0} (P_0 + a(V - V_0)^2)dV$$

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} (P_0 + aV^2 - 2aVV_0 + aV_0^2)dV$$

Integramos esta expresión:

$$W = (P_0 + aV_0^2)V_0 + \frac{a}{3}(7V_0^3) - aV_0(3V_0^2)$$

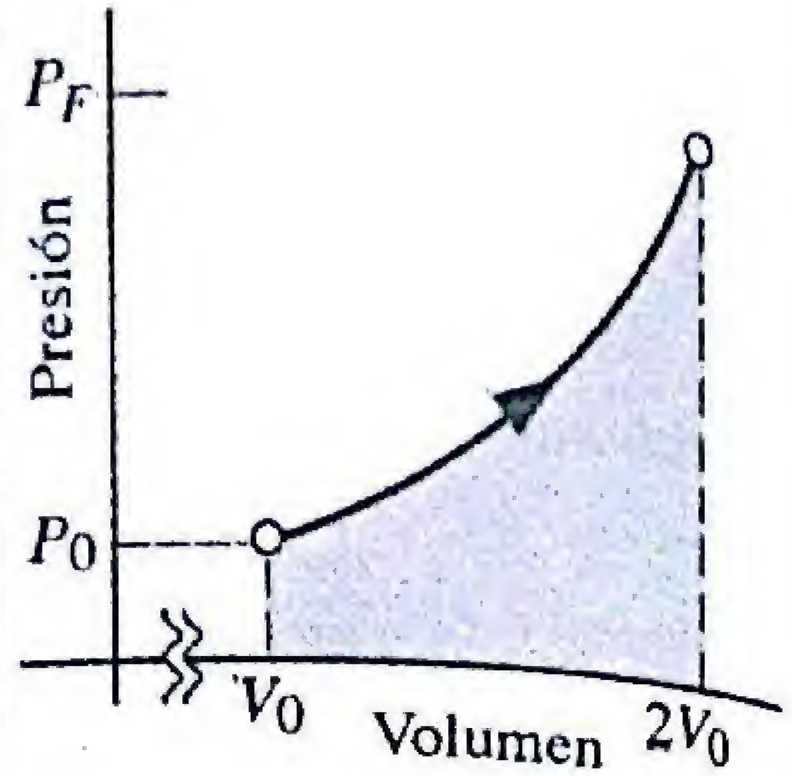
$$W = P_0V_0 + \frac{a}{3}V_0^3$$

Finalmente, calculamos el calor absorbido a partir de la Primera Ley:

$$Q = \Delta U + W,$$

$$Q = \frac{3}{2}(P_0V_0 + 2aV_0^3) + P_0V_0 + \frac{a}{3}V_0^3$$

$$Q = \frac{5}{2}P_0V_0 + \frac{10}{3}aV_0^3$$



$2a(\geq V_0^2)$
$-4aV_0^2 + aV_0^2$
$3aV_0^2$

Respuesta:

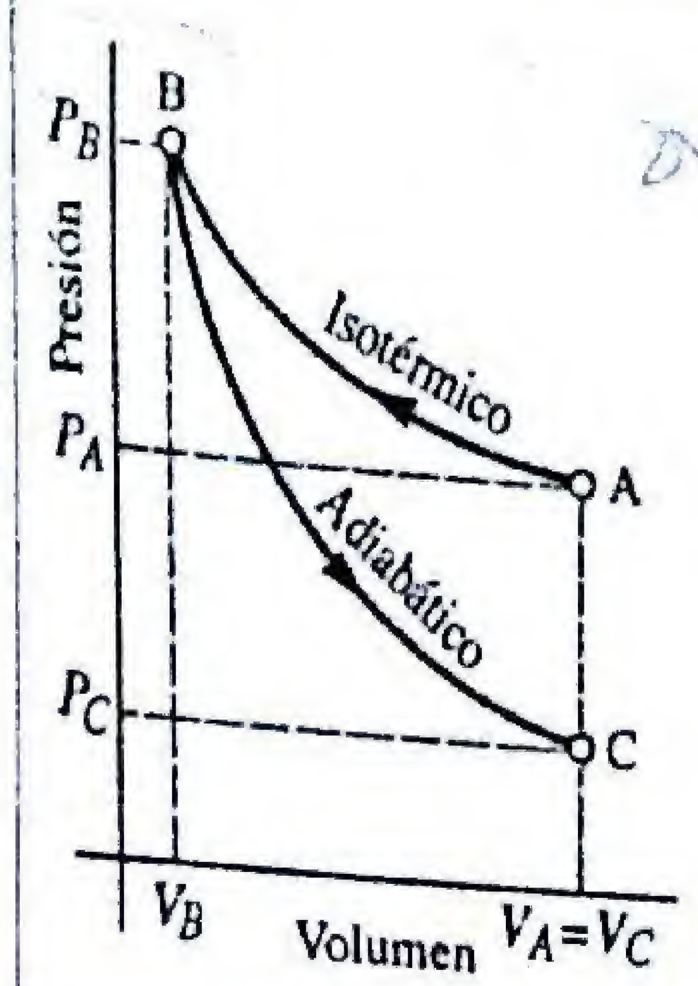
a) $\Delta U = \frac{3}{2}(P_0V_0 + 2aV_0^3)$

b) $W = P_0V_0 + \frac{a}{3}V_0^3$

c) $Q = \frac{5}{2}P_0V_0 + \frac{10}{3}aV_0^3$

PR-4.32. Los calores específicos de gas desconocido

Un mol de un gas ideal se encuentra inicialmente en un estado A a la temperatura ambiente (T_A = 300K) y a la presión atmosférica (P_A = 1x10^{5}Pa). El gas es sometido primero a una compresión isotérmica hasta alcanzar 1/8 de su volumen inicial. Luego se le permite expandirse en forma adiabática hasta su volumen inicial y se observa que su presión cae a 1/5 de su presión inicial. Determine:
a) La presión del estado B intermedio.
b) La temperatura del estado final C.
c) Los calores específicos C_V y C_P del gas.
d) El cambio total de energía interna.



Solución. a) Para hallar la presión en el estado B, usamos la ecuación de estado del gas ideal para los estados A y B y notando que están a la misma temperatura:

$$P_AV_A = P_BV_B = nRT_A$$

Despejando:

$$P_B = P_A(V_A/V_B)$$

$$P_B = (1\text{x}10^5 \text{ Pa})(8/1) = 8\text{x}10^5 \text{ Pa}$$

b) Para hallar la temperatura en el punto C, relacionamos las ecuaciones de estado en los puntos A y C:

$$P_AV_A = nRT_A \qquad P_CV_C = nRT_C$$

Notando que $V_C = V_A$, obtenemos la temperatura:

$$T_C = T_A(\frac{P_C}{P_A})(\frac{V_C}{V_A}) = T_A(\frac{P_C}{P_A}) = 300\text{K}(\frac{1}{5}) = 60\text{K}$$

c) Para hallar los calores específicos, usamos la ecuación de la adiabática BC:

$$P_BV_B^{\gamma} = P_CV_C^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (V_C/V_B)^{\gamma} = (P_B/P_C)$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$8^{\gamma} = (8/0.2) = 40, \quad \Rightarrow \quad \gamma \log 8 = \log 40$$

Despejando: $\gamma = \log 40/\log 8 = 1{,}77$

Por otra parte, si combinamos las relaciones entre calores específicos para un gas ideal:

$$\gamma = C_P/C_V \qquad C_P - C_V = R$$

se obtiene:

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8{,}31\,\text{J/mol.K}}{1{,}77 - 1} = 10{,}8\,\text{J/mol.K}$$

$$C_P = C_V + R = 10{,}8\ \text{J/mol.K} + 8{,}3\ \text{J/mol.K} = 19{,}1\ \text{J/mol.K}$$

d) El cambio de energía interna sólo ocurre durante la expansión adiabática, por lo tanto:

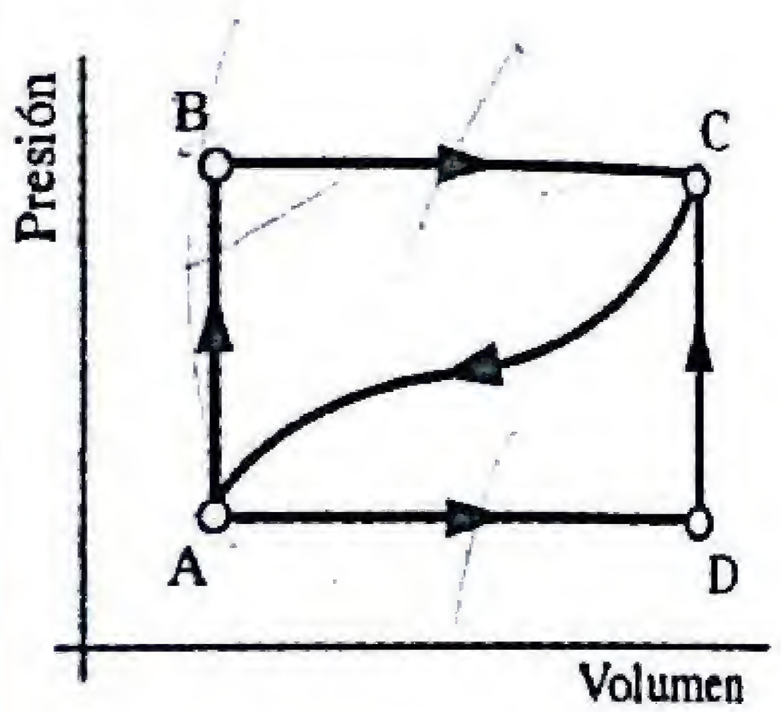
$$\Delta U = nC_v\Delta T = (1\text{mol})(10.8\ \text{J/mol.K})(60\text{K}-300\text{K}) = -2592\ \text{J}$$

Respuesta:

a) $P_B = 8\text{x}10^5$ Pa
b) $T_C = 60$ K
c) $C_V = 10{,}8$ J/mol.K
   $C_P = 19{,}1$ J/mol.K
d) $\Delta U = -2592$ J

PR-4.33. *Trabajando en diferentes rutas*

Cuando se somete un sistema al proceso ABC mostrado en la figura, el trabajo realizado es de 30 J y el sistema absorbe una cantidad de calor de 80 J.
a) Si se lleva el sistema a lo largo del camino ADC, el trabajo es de sólo 10 J. ¿Qué cantidad de calor hay que suministrarle al sistema en este caso?
b) Cuando el sistema regresa al estado inicial A a lo largo del camino curvo CA, el trabajo es 20 J. Diga si en este caso el sistema absorbe calor o libera calor, y cuánto.
c) Si $U_A = 0$ y $U_D = 40$ J, determine el calor absorbido en los proceso AD y DC.



Solución. a) En cada proceso la variación de energía interna está determinada por las temperaturas inicial y final y es independiente del camino seguido:

$$\Delta U_{AC} = U_C - U_A = Q_{ABC} - W_{ABC} = 80\text{J} - 30\text{J} = 50\text{J}$$

$$Q_{ADC} = \Delta U_{AC} + W_{ADC} = 50\text{J} + 10\text{J} = 60\text{J}$$

b) Si el sistema *regresa* al estado inicial A a lo largo del camino curvo CA y el trabajo es 20 J, el calor es:

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} - W_{CA} \quad \Rightarrow \quad Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA}$$

Tomando en cuenta que: $\Delta U_{CA} = -\Delta U_{AC} = -50\text{J}$ y que el sistema realiza un trabajo ($W_{CA} = -20\text{J}$), entonces:

$$Q_{CA} = -50\text{J} - 20\text{J} = -70\text{J}$$

Como Q_{CA} es negativo, concluimos que se libera calor.

c) Si $\Delta U_{AC} = U_C - U_A = 50\text{J}$ y $U_A = 0$, luego $U_C = 50\text{J}$. Si $U_D = 40\text{J}$, entonces:

$$\Delta U_{AD} = U_D - U_A = 40\text{J} - 0 = +40\text{J}$$

$$\Delta U_{DC} = U_C - U_D = 50\text{J} - 40\text{J} = +10\text{J}$$

En el proceso DC el trabajo es nulo ($W_{DC} = 0$), por lo tanto:

$$Q_{DC} = \Delta U_{DC} + W_{DC} = 10\text{J} + 0 = +10\text{J}$$

Para el proceso AD, como: $W_{AD} + W_{DC} = W_{ADC}$, luego $W_{AD} = W_{ADC} = +10\text{J}$

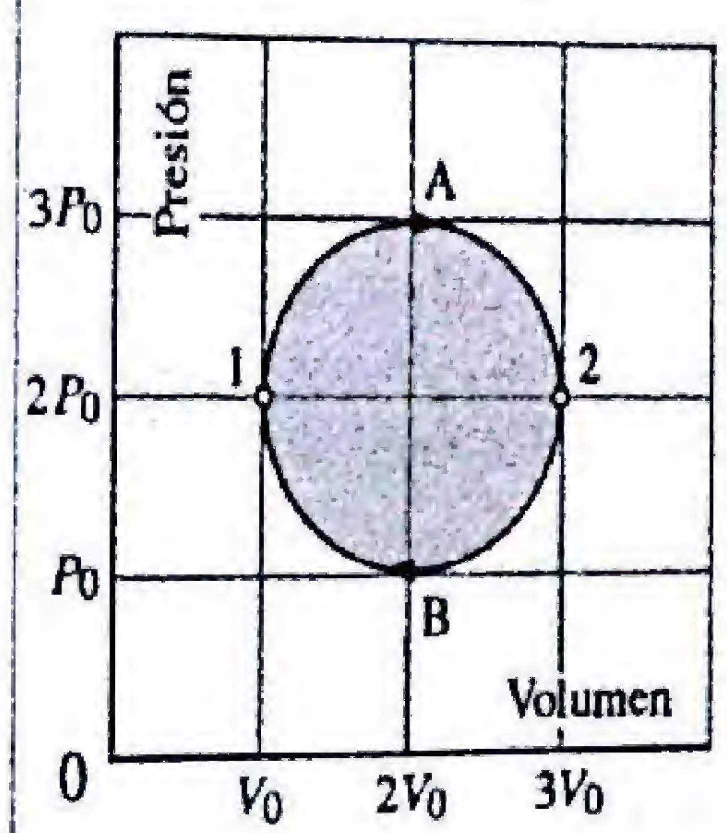
$$Q_{AD} = \Delta U_{AD} + W_{AD} = 40\text{J} + 10\text{J} = +50\text{J}$$

Respuesta:

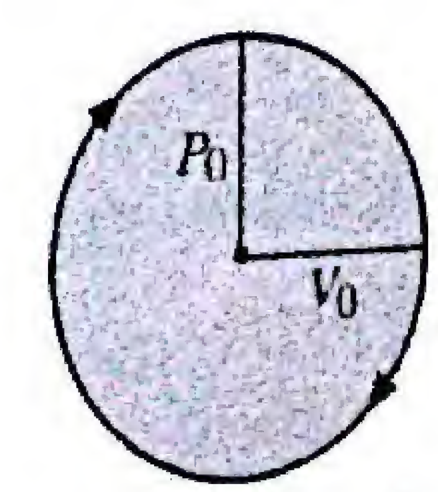
a) $Q_{ADC} = +60\text{J}$
b) $Q_{CA} = -70\text{J}$ (se libera calor)
c) $Q_{AD} = +50\text{J}$, $Q_{DC} = +10\text{J}$

PR-4.34. *Un ciclo termodinámico circular*

Considere n moles de un gas ideal monoatómico que ejecuta el ciclo circular mostrado en la figura. Determine el trabajo realizado por el sistema, la variación de energía interna y el calor absorbido.
a) Para el ciclo circular completo.
b) Para la expansión desde el estado 1 hasta el estado 2 siguiendo la ruta de la semicircunferencia A.



Solución. a) El trabajo es numéricamente igual al área encerrada por la circunferencia. Pero, ¿cuál sería el radio de la circunferencia? Será el intervalo de volumen V_o o será el de la presión P_o? Como se trata de magnitudes distintas en los dos ejes, según la figura 1, podríamos considerar el círculo como un caso especial de una elipse, cuya área es π veces el producto de sus semi-ejes, πab:



(Fig.1)

$$W_{ciclo} = \text{área del círculo} = \pi P_o V_o$$

Observe que W es positivo ya que el área bajo la curva de expansión es mayor que el área bajo la curva de compresión. Además, para un ciclo no hay variación de energía interna, por lo tanto:

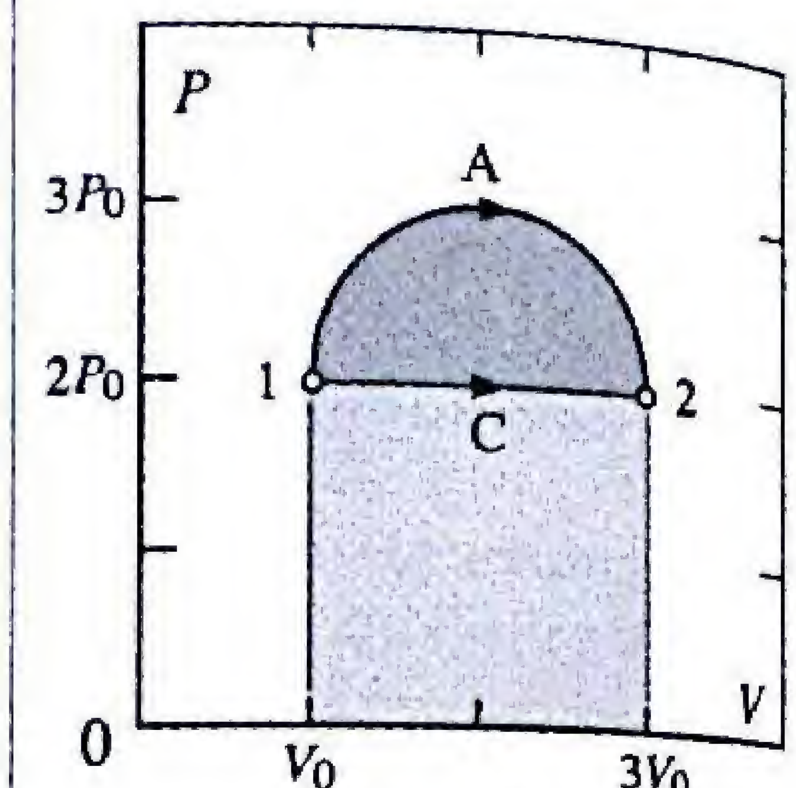
$$\Delta U_{ciclo} = 0$$

De acuerdo a la primera ley, el calor absorbido es:

$$Q_{ciclo} = \Delta U_{ciclo} + W_{ciclo} = \pi P_o V_o$$

b) La variación de energía interna entre dos estados es independiente del camino, por lo tanto para evaluar el ΔU_{12} correspondiente al camino semi-circular (A), podemos escoger otro camino como el C de la figura 2 que es isobárico. El trabajo es:

$$W_c = \text{Área rectángulo} = (2P_o)(3V_o - V_o) = 4P_oV_o$$



(Fig.2)

El calor en el proceso isobárico:

$$Q_c = nc_p\Delta T_{12} = nc_p(T_2 - T_1) = nc_p\left(\frac{P_2V_2}{nR} - \frac{P_1V_1}{nR}\right)$$

$$Q_c = \frac{(5/2)R}{R}[(2P_0)(3V_0) - (2P_0)(V_0)] = 10P_0V_0$$

Donde el calor específico a presión constante para un gas monoatómico ideal es $c_p = (5/2)R$. Aplicando la primera ley de la termodinámica, hallamos la variación de energía interna entre los estados 1 y 2:

$$\Delta U_{12} = Q_c - W_c = 10P_0V_0 - 4P_0V_0 = 6P_0V_0$$

El trabajo W_{12} hecho por el gas al seguir la ruta semicircular A, será igual al área del semi-círculo más el área del rectángulo que queda debajo de la línea diametral:

$$W_{12} = \frac{1}{2}\pi P_0V_0 + (2P_0)(2V_0) = \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)P_0V_0$$

El calor absorbido por el gas es:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = 6P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)P_0V_0 = \left(\frac{\pi}{2} + 10\right)P_0V_0$$

Respuesta:

a) $\Delta U_{ciclo} = 0$
$W_{ciclo} = Q_{ciclo} = \pi P_0V_0$

b) $\Delta U_{12} = 6P_0V_0$

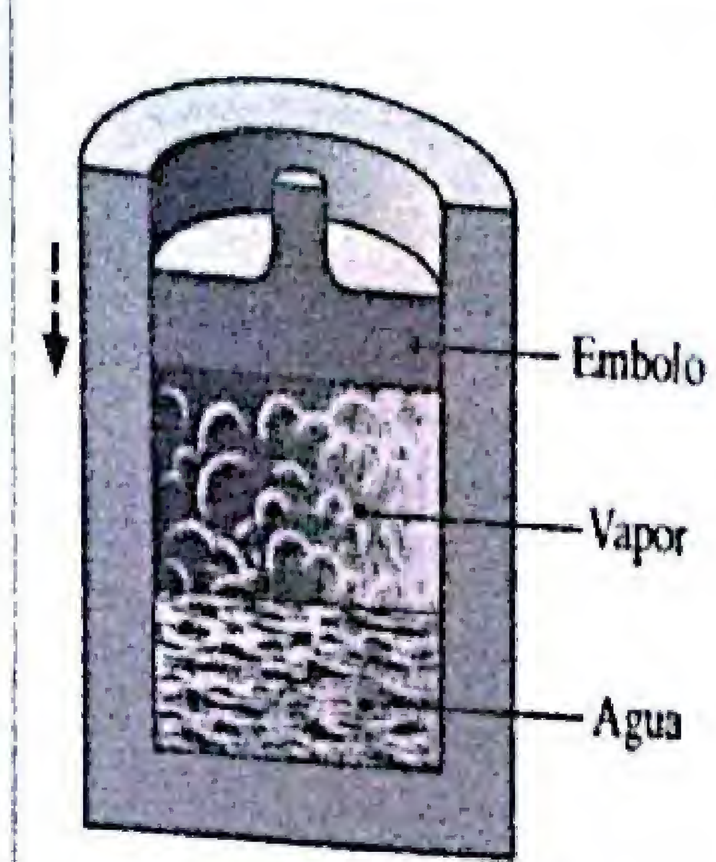
$W_{12} = \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)P_0V_0$

$Q_{12} = \left(\frac{\pi}{2} + 10\right)P_0V_0$

PR-4.35 *Condensación de vapor de agua*

Un cilindro vertical está provisto de un émbolo de masa $M = 4$ kg y área $A = 4\ \text{cm}^2$, bien ajustado y puede deslizar sin rozamiento. El cilindro contiene agua y vapor a una temperatura constante. Se observa que el émbolo desciende lentamente a una rapidez $v = 1{,}5$ mm/s mientras fluye el calor hacia fuera del cilindro por sus paredes metálicas. La presión atmosférica es de 1 Atm. Calcule:

a) La tasa de condensación del vapor de agua.
b) La tasa de transferencia de calor al medio ambiente.
c) La tasa de cambio de la energía interna del vapor y del agua dentro de la cámara.



Solución: En términos de las masas y densidades respectivas, el volumen total del agua en sus fases líquida y vapor es:

$$V = V_a + V_v = \frac{m_a}{\rho_a} + \frac{m_v}{\rho_v}$$

El volumen ocupado ($V = Ay$) va disminuyendo a medida que el émbolo desciende en el cilindro a velocidad v:

$$dV/dt = A(dy/dt) = -Av$$

El cambio del volumen con el tiempo es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho_a}\frac{dm_a}{dt} + \frac{1}{\rho_v}\frac{dm_v}{dt}$$

Tomando en cuenta que: $dm_a/dt = -dm_v/dt$, tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_a}\right)\frac{dm_v}{dt} = \left(\frac{\rho_a - \rho_v}{\rho_v\rho_a}\right)\frac{dm_v}{dt}$$

$$\left(\frac{\rho_a - \rho_v}{\rho_v\rho_a}\right)\frac{dm_v}{dt} = -Av \quad \Rightarrow \quad \frac{dm_v}{dt} = -\frac{Av\rho_a\rho_v}{\rho_a - \rho_v}$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos la tasa de condensación del vapor:

Densidades a esas temperaturas:

Agua: $\rho_a = 998\ \text{kg/m}^3$
Vapor: $\rho_v = 0{,}6\ \text{kg/m}^3$

$$\frac{dm_v}{dt} = -\frac{4\text{x}10^{-4}\,\text{m}^2\text{x}1{,}5\text{x}10^{-3}\text{m/s}\text{x}998\text{kg/m}^3\text{x}0{,}6\text{kg/m}^3}{998\text{kg/m}^3 - 0{,}6\text{kg/m}^3}$$

$$\frac{dm_v}{dt} = -3.6\text{x}10^{-7}\,\text{kg/s}$$

b) A medida que el vapor se condensa, el sistema "cede" calor al entrono: $Q = -m_v L_v$, siendo L_v el calor de vaporización del agua. La tasa de transferencia de calor es:

$$\frac{dQ}{dt} = -L_v \frac{dm_v}{dt} = -2{,}256 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \text{g} \times 3.6 \times 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = -0{,}812 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

c) El trabajo sobre el sistema es realizado por el aire exterior que empuja con una presión p_{atm} y la gravedad sobre el émbolo que ejerce una fuerza Mg. La presión del sistema en la cámara es: $p = p_{atm} + Mg/A$

Como el pistón desciende con velocidad v constante, la tasa de cambio del trabajo es:

$$\frac{dW}{dt} = p\frac{dV}{dt} = -pAv = -(p_{atm} + \frac{Mg}{A})Av$$

$$= -(1{,}01 \times 10^5 \text{Pa} + \frac{4\text{kg} \times 9{,}8\text{m/s}^2}{4 \times 10^{-4}\text{m}^2})(4 \times 10^{-4}\text{m}^2 \times 1{,}5 \times 10^{-3}\frac{\text{m}}{\text{s}})$$

$$dW/dt = -0{,}119 \text{J/s}$$

De acuerdo a la primera ley ($dU_{int} = dQ - dW$), y la tasa de cambio de la energía interna del vapor y del agua dentro de la cámara es:

$$\frac{dU_{int}}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = -0{,}812\text{J/s} - (-0{,}119\text{J/s}) = -0{,}693\text{J/s}$$

Respuesta:

a) $dm_v / dt = -3{,}6 \times 10^{-6}$kg/s
b) $dQ/dt = -0{,}812$J/s
c) $dU_{int}/dt = -0{,}693$J/s

PR-4.36. ***Medición de la constante adiabática de un gas***

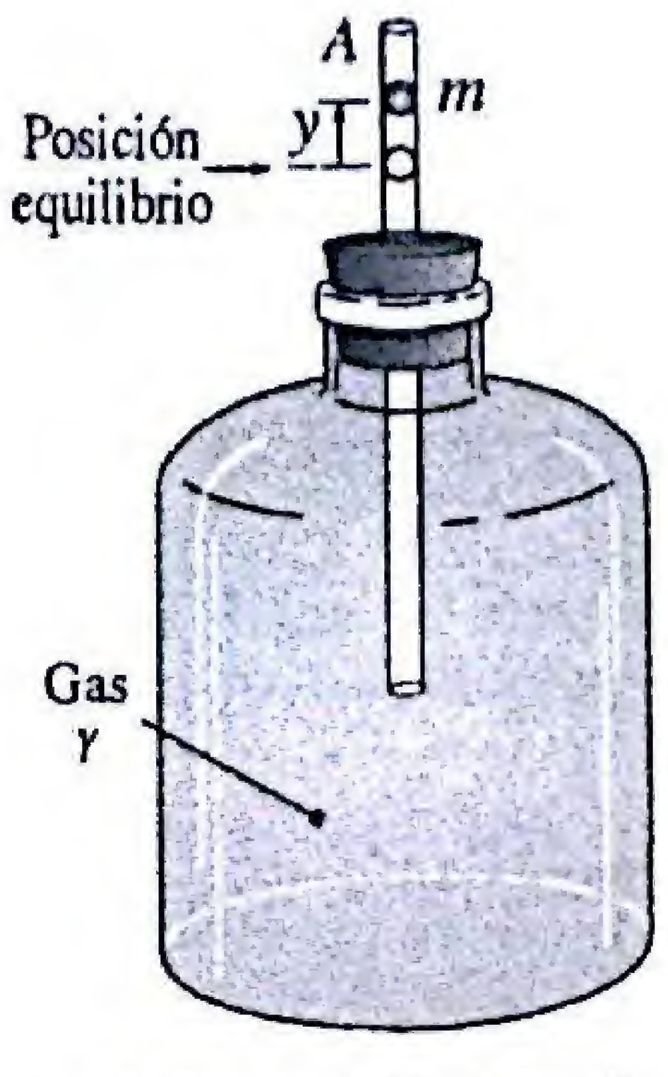
Esta es una práctica de laboratorio de física para medir la constante adiabática γ de un gas (Método de Rüchhardt). En una botella que contiene el gas, se inserta un tubo de vidrio vertical de área transversal A y en el tubo se introduce una bolita metálica de masa m que ajusta exactamente y comprime ligeramente al gas.

a) Si se le da a la bolita un pequeño desplazamiento, ésta tiende a ejecutar un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio. ¿Por qué?

b) Demuestre que de la medición del periodo τ de las oscilaciones podríamos determinar la constante del gas:

$$\gamma = 4\pi^2 mV / A^2 P\tau^2$$

Siendo P y V la presión y el volumen del gas en equilibrio.



Método de Rüchhardt

Solución. a) Cuando la bolita está en equilibrio, y si despreciamos la fricción, la presión del gas dentro del frasco es:

$$p = p_{atm} + \frac{mg}{A}$$

Si le damos a la bolita un pequeño desplazamiento, y, positivo, causa un incremento en el volumen dV y una disminución en la presión interna dP, provocando así una fuerza hacia abajo: $F = AdP$

Si el desplazamiento y que se le da a la bolita fuera negativo, entonces dP sería positivo y la fuerza resultante es hacia arriba, es decir, en cualquier caso la fuerza que aparece será siempre restauradora.

b) En este experimento, la oscilación de la bolita es tan rápida (periodos típicos de un segundo), que puede despreciarse cualquier flujo de calor desde y hacia el sistema, y por tanto es esencialmente un proceso *adiabático* que cumple la relación:

$$PV^\gamma = \text{const.}$$

Tomando diferenciales: $P\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dP = 0$

Si sustituimos dP y $dV = Ay$, se obtiene:

$$P\gamma V^{\gamma-1}Ay + V^\gamma(F/A) = 0$$

$$F = -\frac{A^2\gamma P}{V}y = -ky$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la fuerza es proporcional al desplazamiento y apunta en sentido opuesto. Esta es precisamente la condición para un movimiento armónico simple cuyo periodo es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{A^2\gamma P}}$$

Por lo tanto, la expresión para la constante adiabática del gas en términos del periodo τ es:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 P\tau^2}$$

Siendo P el valor de la presión del gas cuando la bolita está en equilibrio y V el correspondiente volumen.

Respuesta:

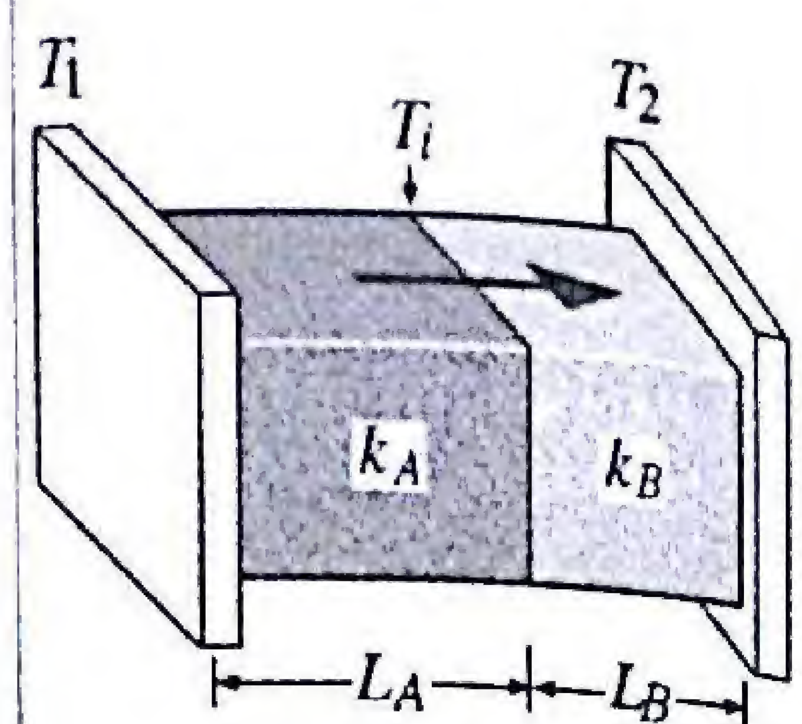
$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 P\tau^2}$$

PR-4.37. *Dos conductores térmicos en serie*

Dos bloques conductores térmicos que tienen igual área transversal, $A = 12\ cm^2$ y de materiales distintos, son puestos en contacto. El bloque A es de cobre ($k_A = 401$ W/m·C°) y tiene una longitud $L_A = 3$ cm, mientras que el bloque B es de aluminio ($k_B = 237$ W/m·C°) y tiene una longitud $L_B = 2$ cm. Si los bloques se colocan entre dos paredes, que se mantienen a temperaturas $T_1 = 100$ °C y $T_2 = 20$ °C, respectivamente.

a) Calcule la temperatura T_i de la interfase.

b) Determine la tasa de transferencia de energía térmica.



Solución: La tasa de transferencia de energía térmica a través de cada bloque es proporcional al gradiente de temperatura y al área de sección transversal A:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Cuando el flujo de energía térmica alcanza el estado estable, la corriente térmica en los dos bloques es la misma:

$$(\Delta Q/\Delta t)_A = (\Delta Q/\Delta t)_B$$

Es decir,

$$k_A A\frac{(T_1 - T_i)}{L_A} = k_B A\frac{(T_i - T_2)}{L_B}$$

Al despejar T_i se obtiene:

$$T_i = \frac{k_A L_B T_1 + k_B L_A T_2}{k_A L_B + k_B L_A}$$

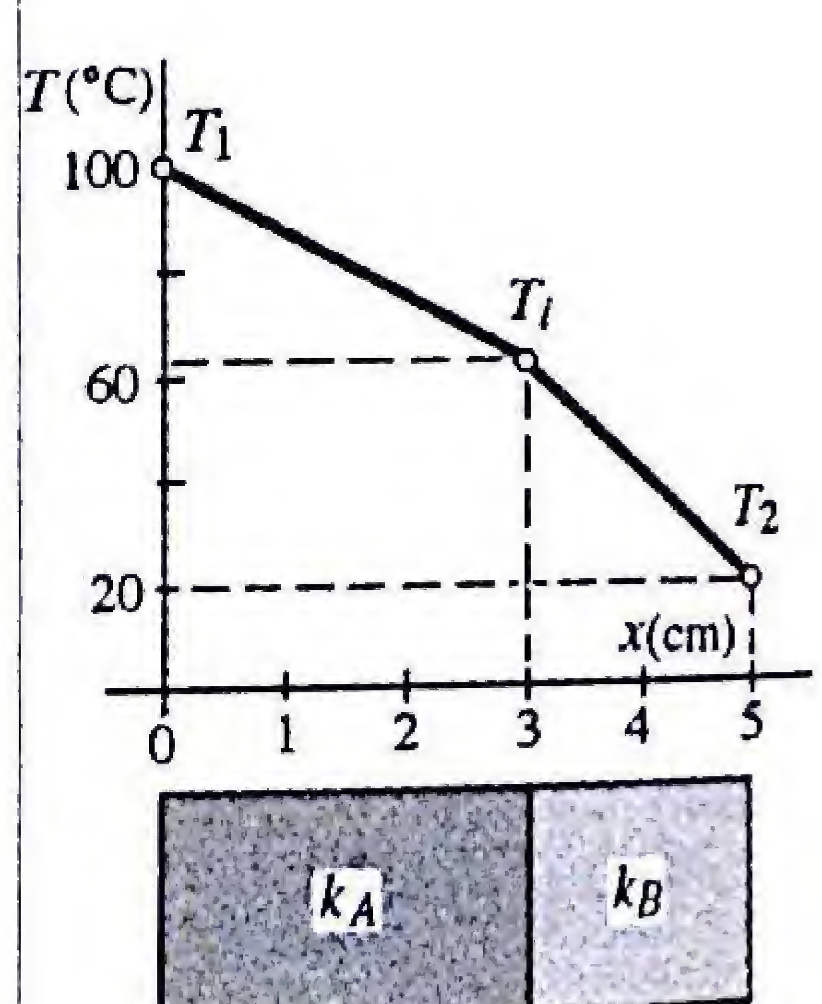
$$T_i = \frac{(401)(0{,}02)(100) + (237)(0{,}03)(20)}{(401)(0{,}02) + (237)(0{,}03)} = 62{,}4°\text{C}$$

b) Después de la sustitución de la expresión para T_i, se obtiene la tasa de transferencia de energía térmica:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{k_A A}{L_A}(T_1 - T_i) = \frac{k_A A}{L_A}\left(T_1 - \frac{k_A L_B T_1 + k_B L_A T_2}{k_A L_B + k_B L_A}\right)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A(T_1 - T_2)}{L_A/k_A + L_B/k_B}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A(T_1 - T_2)}{\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B}} = \frac{(12x10^{-4})(100-20)}{\frac{0{,}03}{401} + \frac{0{,}02}{237}} = 603W$$



Respuesta:

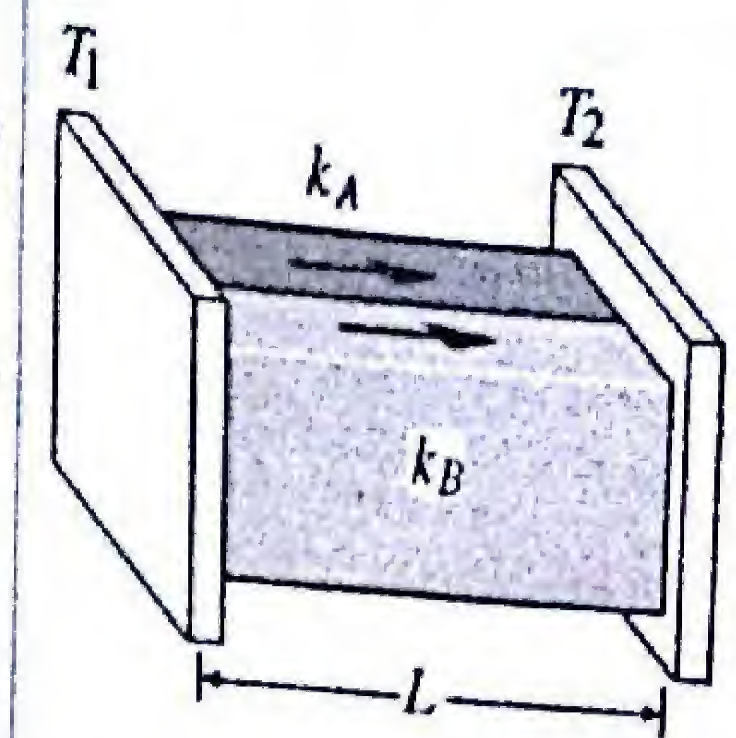
a) $T_i = 62{,}4°C$
b) $\Delta Q/\Delta t = 603W$

PR-4.38. *Dos conductores térmicos en paralelo*

Dos bloques de igual longitud L pero de diferentes conductividades térmicas k_A y k_B y con áreas de sección transversal A_A y A_B, se ponen uno al lado del otro. Si se colocan entre dos paredes a temperaturas T_1 y T_2, respectivamente.

a) Determine la tasa de flujo de calor.

b) Generalice esto a varias barras y compare la expresión con la correspondiente a barras en serie.



Solución. a) Las tasas de flujo en cada barra son, respectivamente:

$$\frac{dQ_A}{dt} = k_A A_A\frac{\Delta T}{L} \qquad \frac{dQ_B}{dt} = k_B A_B\frac{\Delta T}{L}$$

La tasa de flujo total es:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_A}{dt} + \frac{dQ_B}{dt} = (k_A A_A + k_B A_B)\frac{\Delta T}{L}$$

Es decir:

$$\frac{dQ}{dt} = (k_A A_A + k_B A_B)\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

b) En el caso de varias barras se tiene:

Barras en paralelo: $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{(T_1 - T_2)}{L}\sum A_i k_i$

Generalizando el resultado del problema anterior:

Barras en serie : $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{A(T_1 - T_2)}{\sum L_i/k_i}$

Respuesta:

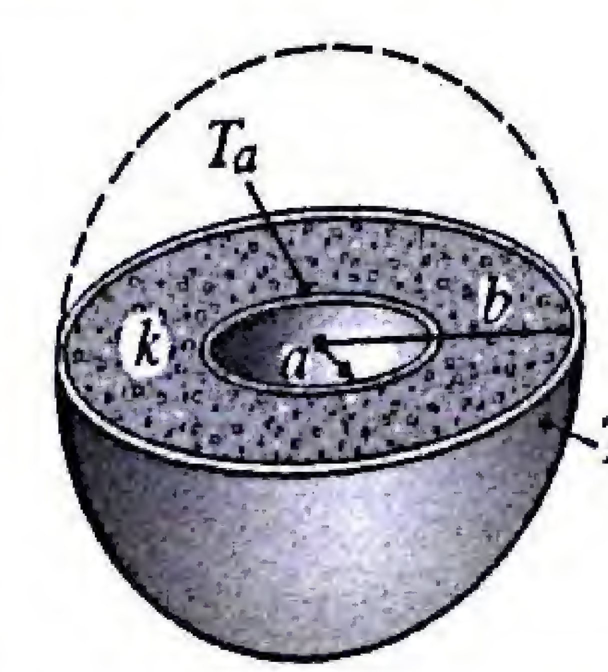
a) $\dfrac{dQ}{dt} = (k_A A_A + k_B A_B)\dfrac{(T_1 - T_2)}{L}$

b) Paralelo: $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{(T_1 - T_2)}{L}\sum A_i k_i$

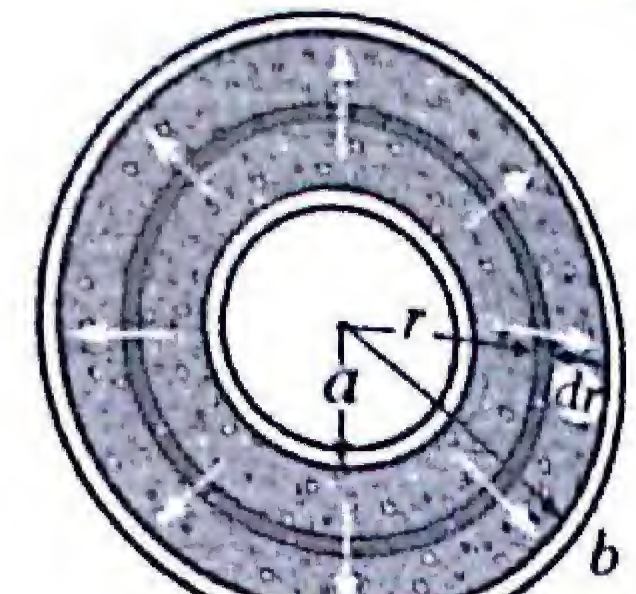
Serie: $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{A(T_1 - T_2)}{\sum L_i/k_i}$

PR-4.39. *Conducción de calor por una esfera*

Un recipiente en la forma de una esfera hueca tiene un radio interior a y un radio exterior b. El material tiene una conductividad térmica k. Si la pared interior se mantiene a una temperatura T_a y la pared exterior se mantiene a una temperatura T_b, determine la tasa de flujo de calor entre las dos superficies.



Solución. Como, $T_a > T_b$ el calor fluye en dirección radial hacia afuera. Considerando un cascarón esférico delgado de radio r y espesor dr, el área de esta esfera es $4\pi r^2$ y la tasa de flujo de calor es:



$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} = -k4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

Como dQ/dt es la misma en todas las conchas esféricas, integrando:

$$\int_{T_a}^{T_b} dT = -\frac{dQ/dt}{k4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$T_b - T_a = -\frac{dQ/dt}{k4\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b = \frac{dQ/dt}{k4\pi}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{dQ/dt}{k4\pi}\left(\frac{a-b}{ab}\right)$$

Despejando, se obtiene la tasa de flujo de calor:

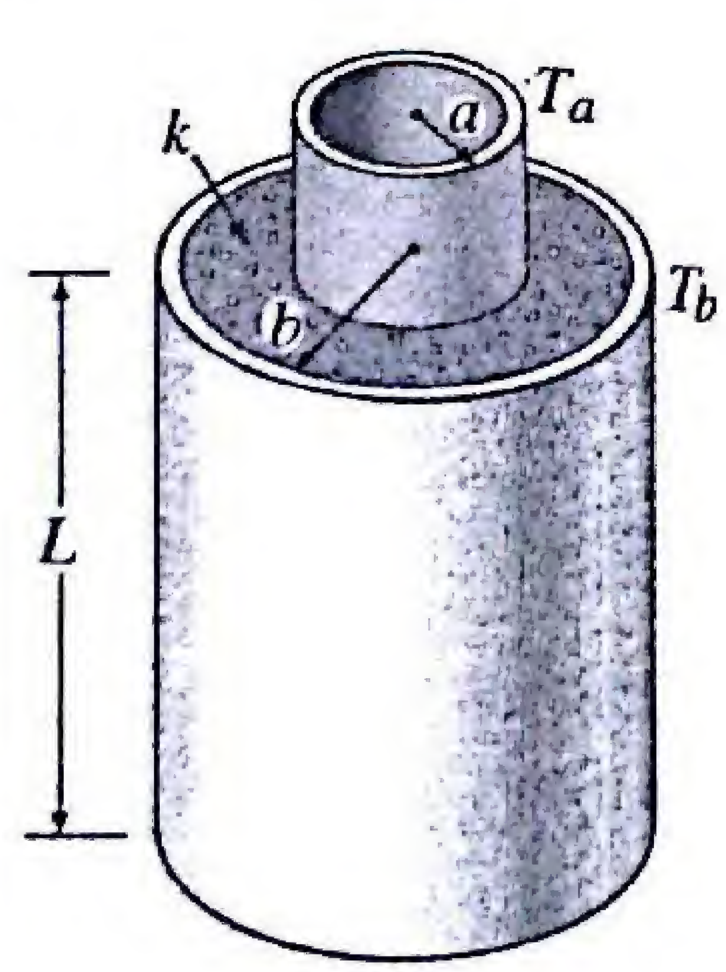
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi kab(T_a - T_b)}{b-a}$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi kab(T_a - T_b)}{b-a}}$$

PR-4.40. *Conducción radial de calor por un cilindro*

Considere una sustancia de conductividad térmica k que está dentro de dos tubos cilíndricos largos de longitud L. El tubo interno de radio a es mantenido a una temperatura constante T_a, mientras que el tubo externo es de radio b y se mantiene a una temperatura también constante, T_b. ¿Cuál es la rapidez de flujo de calor? Suponga que la longitud L es mucho mayor que los radios a y b, de forma tal que los efectos de orilla pueden despreciarse y el flujo de calor es esencialmente radial.

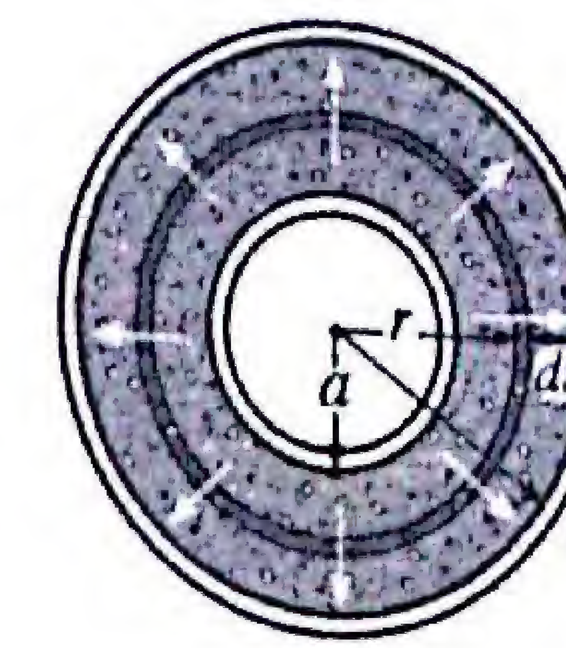


Solución. Supongamos que el borde interior del cilindro está a la temperatura mayor, $T_a > T_b$. En este caso el calor fluye en dirección radial hacia afuera respecto al eje del cilindro. Considerando una concha cilíndrica delgada de radio r y espesor dr, el área de esta concha es $2\pi rL$ y el gradiente de temperatura es (dT/dr). Sustituyendo en la expresión para la rapidez de flujo de calor:

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr}$$

Separando los términos de las variables r y T:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)\left(\frac{dr}{r}\right) = -(k2\pi L)dT$$



Integrando esta expresión:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)\int_a^b \frac{dr}{r} = -(k2\pi L)\int_{T_a}^{T_b} dT$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right) = -(k2\pi L)(T_b - T_a)$$

Finalmente despejando (dQ/dt), tenemos la tasa de flujo de calor:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k2\pi L(T_a - T_b)}{\ln(b/a)}$$

Observe que si el borde interior del calor estuviese a una temperatura menor, $T_a < T_b$, entonces (dQ/dt) daría negativo. Lo cual significa que el calor debería fluir en dirección radial hacia adentro.

Respuesta:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{k2\pi L(T_a - T_b)}{\ln(b/a)}}$$

PR-4.41 *Conserva lo frío y lo caliente: ¿Qué será?*

Un termo (o frasco Dewar) consiste de un recipiente parcialmente evacuado con doble pared de vidrio, de superficies interiores plateadas (reflectoras) para evitar pérdidas por radiación y tiene en la boca un tapón aislante que evita pérdidas por conducción y convección.

Un termo reduce la pérdida de energía térmica por los tres mecanismos

Considere un termo con un radio interno $a = 4$ cm, un radio externo $b = 5$ cm y una longitud $L = 25$ cm. El vacío no es perfecto y suponga que el aire remanente tiene una conductividad térmica $k = 0{,}01$ W/m·K. Se vierte en el termo un litro de café caliente a 90 °C. Si la pared externa permanece a la temperatura ambiente de 25 °C. ¿qué tiempo tardará el café en enfriarse hasta 50 °C?

Solución. Si consideramos al termo como un cilindro largo, podemos despreciar efectos de borde y de acuerdo al problema anterior su rapidez de pérdida de calor es:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{termo} = \frac{k2\pi L(T - T_e)}{ln(b/a)}$$

Siendo T la temperatura de la pared interna del termo (y del líquido) que es variable y T_e la temperatura de la pared externa (temperatura ambiente) que permanece constante. El calor "cedido" por el café cuando se ha enfriado desde su temperatura inicial T_o hasta la temperatura final T es:

$$Q_{café} = mc\,(T - T_o)$$

Siendo m la masa del café y c su calor específico. Por tanto la rapidez de pérdida de calor del café es:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{café} = mc\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

Como $(dQ/dt)_{café} = -(dQ/dt)_{termo}$, tenemos:

$$mc\left(\frac{dT}{dt}\right) = -\frac{k2\pi L(T - T_e)}{ln(b/a)}$$

Despejando dt:

$$dt = -\frac{mc\,ln(b/a)}{2\pi kL}\left(\frac{dT}{T - T_e}\right)$$

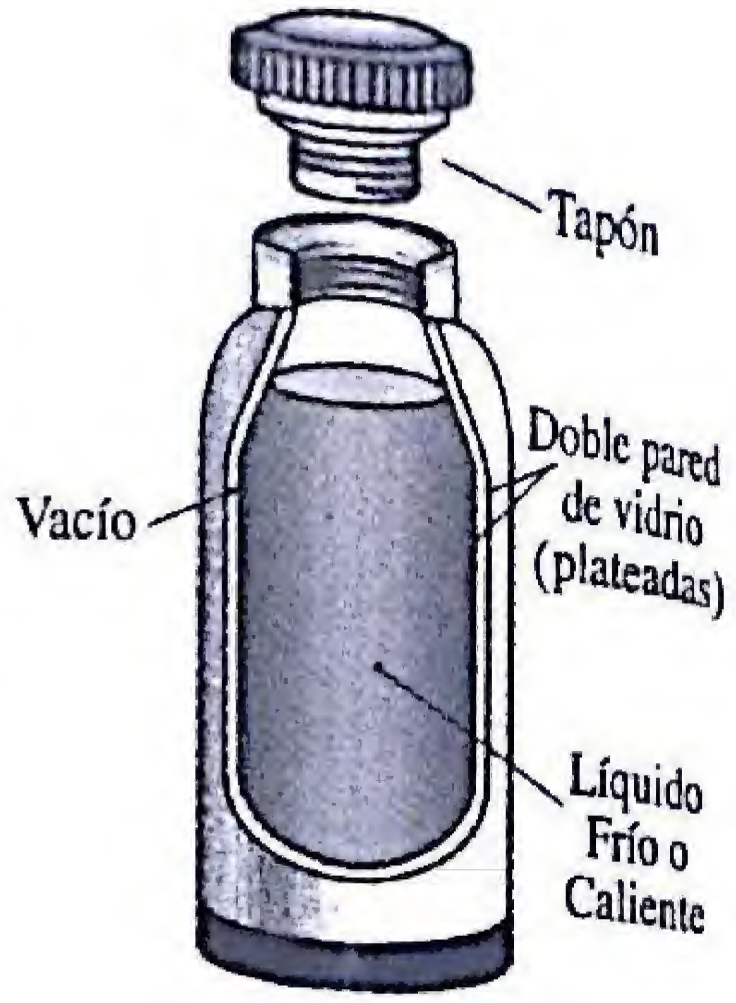
Integrando desde la temperatura inicial $T = T_i$ hasta la temperatura final $T = T_f$, se obtiene el tiempo:

$$t = -\frac{mc\,ln(b/a)}{2\pi kL}\int_{T_i}^{T_f}\frac{dT}{T - T_e} = -\frac{mc\,ln(b/a)}{2\pi kL}\,ln\left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e}\right)$$

Reemplazando los valores numéricos, tenemos finalmente:

$$t = -\frac{(1kg)(4180J/kg.K)ln(0{,}05m/0.04m)}{2\pi(0{,}01W/m.K)(0{,}25m)}\ln\left(\frac{90°C - 20°C}{50°C - 20°C}\right)$$

$$t = 50.313\ s \approx 14\ horas$$



Respuesta:

$\boxed{t = 50.313\ s \approx 14\ horas}$

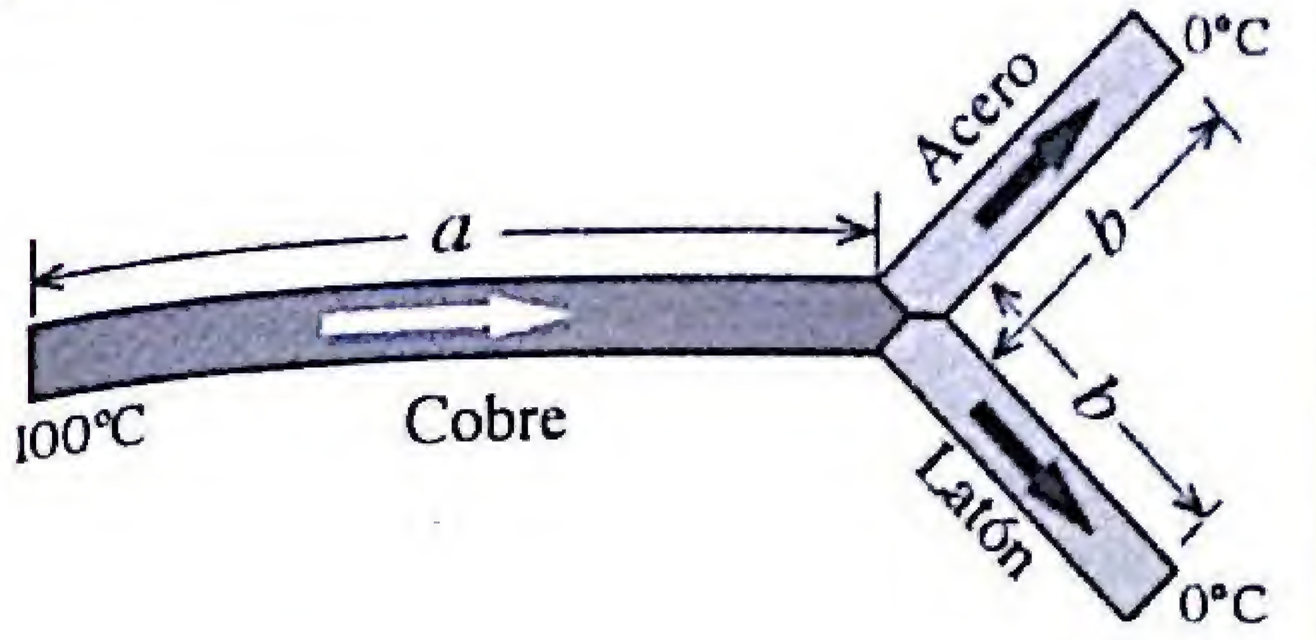
PR-4.42 *El calor se ramifica en barras metálicas*

Tres barras de igual área transversal $A = 2\ cm^2$, una de cobre, una de acero y la otra de latón se sueldan formando una "Y". La longitud de la barra de cobre es $a = 50$ cm y la de las barras de acero y de latón es $b = 15$ cm.

El extremo libre de la barra de cobre está a 100 °C y los extremos de las otras dos barras están a 0 °C. Determine:

a) La temperatura en la unión de las barras.

b) La tasa de transferencia de calor en la barra de cobre.



Solución. El calor de entrada, es transmitido por la barra de cobre y en la unión se distribuye en las otras dos barras:

$$Q = Q_1 + Q_2:$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{cobre} = \left(\frac{dQ_1}{dt}\right)_{latón} + \left(\frac{dQ_2}{dt}\right)_{acero}$$

$$k_C A\frac{(100 - T_u)°C}{a} = k_L A\frac{(T_u - 0)°C}{b} + k_A A\frac{(T_u - 0)°C}{b}$$

Cobre: $K_C = 385$ J/s·m·°C
Acero: $K_A = 50{,}2$ J/s·m.°C
Latón: $K_L = 109$ J/s·m.°C

La temperatura T_u de la unión se obtiene de la ecuación:

$$\frac{100k_C}{a} = T_u\left(\frac{k_C}{a} + \frac{k_L + k_A}{b}\right)$$

$$T_u = \frac{100k_C}{k_C + \dfrac{a}{b}(k_L + k_A)} = \frac{100°C(385)}{385 + \dfrac{0{,}50}{0{,}15}(109 + 50{,}2)} = 42{,}0°C$$

b) La tasa de transferencia de calor en la barra de cobre es:

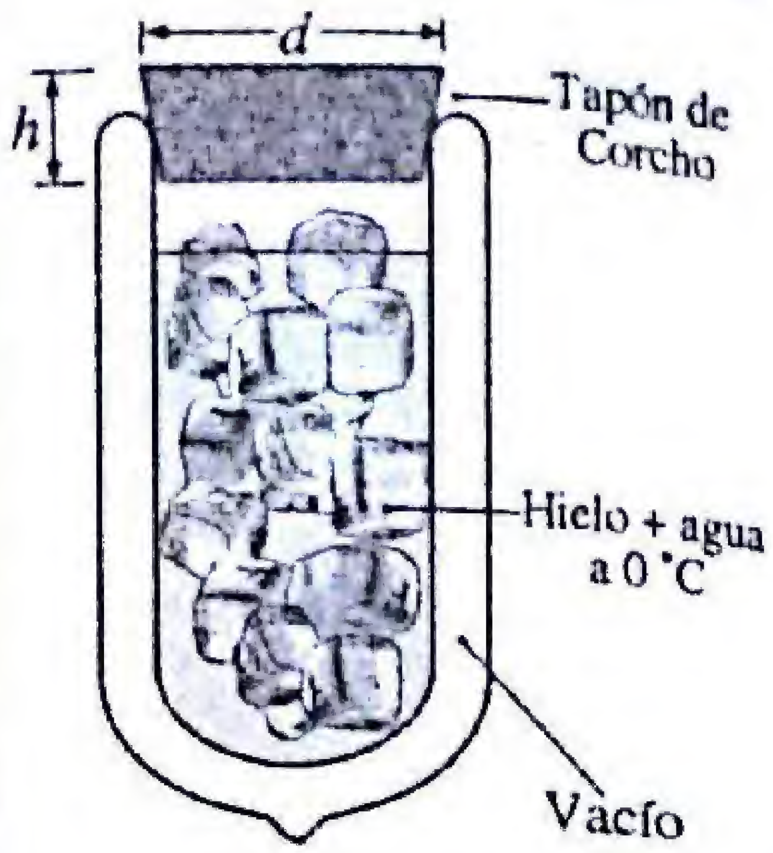
$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Cu} = k_C A\frac{(100°C - T_u)}{a}$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Cu} = (385\frac{J}{s.m.°C})(2x10^{-4}m^2)\frac{(100 - 42)°C}{0{,}50m} = 8{,}93J/s$$

Respuesta:

a) $T_u = 42{,}0°C$
b) $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Cu} = 8{,}93J/s$

PR-4.43 *¿En cuanto tiempo se derrite el hielo?*



Un termo de diámetro d = 8 cm contiene 200 g de agua y 100 g de hielo a la temperatura de 0 °C. El termo tiene paredes huecas de vidrio, entre las cuales se ha practicado un alto vacío y está cerrado mediante un tapón de corcho de espesor h = 3 cm. Se desprecia cualquier pérdida de calor a través de las paredes. Si la temperatura ambiente es de 27 °C, ¿cuánto tiempo tardará el hielo en derretirse?

Solución. La energía térmica entra al sistema únicamente por conducción a través del corcho. La tasa de absorción de energía por el hielo al fundirse es:

Conductividad térmica del corcho:
$k = 0{,}6$ W/m·K.

Calor de fusión del hielo:
$L_F = 3{,}33\text{x}10^5$ J/kg

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{m_h L_F}{\Delta t}$$

Siendo el espesor del corcho: $\Delta x = h$ y su área $A = \pi(d/2)^2$.

Por lo tanto, el tiempo transcurrido viene dado por la expresión:

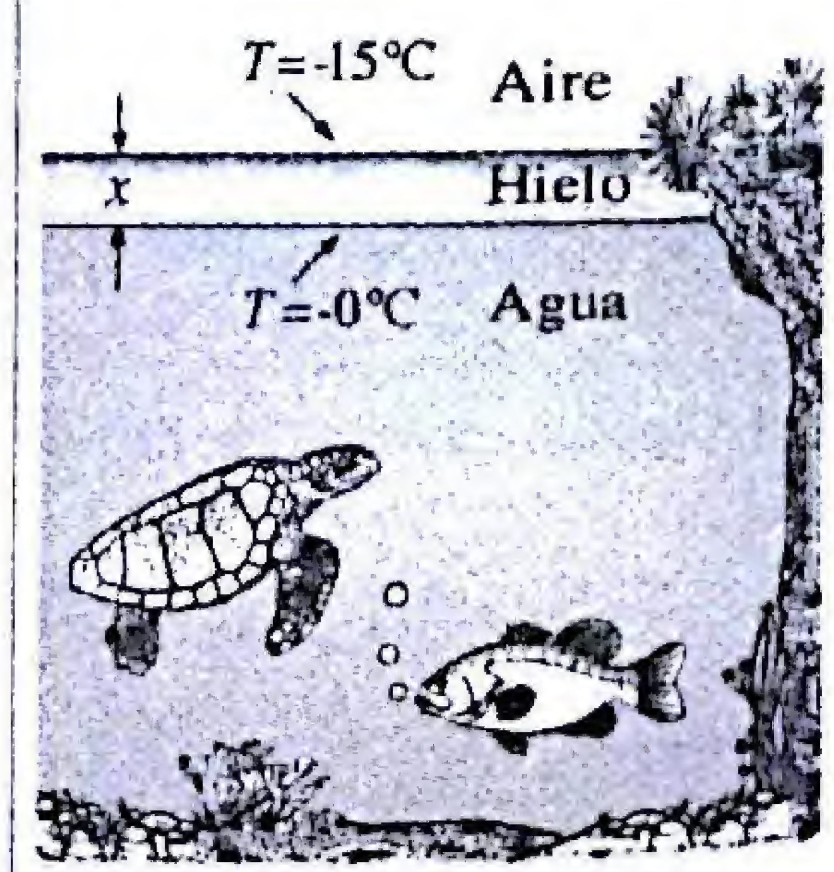
$$\Delta t = \frac{m_h L_F \Delta x}{kA\Delta T} = \frac{4 m_h L_F h}{k\pi d^2 \Delta T}$$

$$\Delta t = \frac{4(0{,}1\text{kg})(3{,}33\text{x}10^5\text{J/kg})(0.03\text{m})}{(0{,}6\text{W/m.K})\pi(0{,}08\text{m})^2(27\text{K})} = 12268\,s = 3{,}41\,h$$

Respuesta:

$\boxed{t = 3{,}41 \text{ horas}}$

PR-4.44. *¿Cuánto tarda un lago en cubrirse de hielo?*



En la superficie de un lago empieza a formarse una capa de hielo. La temperatura de la cara superior del hielo en contacto con el aire es -15 °C, y la temperatura de la cara inferior del hielo en contacto con el agua es 0 °C.

a) Halle el espesor de la capa de hielo al cabo de una hora

b) ¿A qué rapidez continúa formándose hielo en ese instante?

c) Si la profundidad del lago es 30 m, ¿cuánto tardaría en congelarse completamente?

d) ¿Por qué no se congela todo el volumen de un lago?

Solución. a) Cuando el agua se va congelando, el calor latente desprendido es conducido a través de la capa de hielo hacia el aire, el cual está a una temperatura menor. Supongamos que en un instante t dado el espesor de la capa de hielo es x. En un tiempo dt el incremento del espesor de la capa es dx y la cantidad de calor desprendida es:

$$Q = mL_f = (\rho A dx)L_f$$

Siendo L_f el calor de congelación del hielo. La rapidez de desprendimiento de calor en el instante t es:

$$\frac{dQ}{dt} = L_f\frac{dm}{dt} = \rho L_f A\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Por otra parte, para una placa de hielo de conductividad térmica k, área A, y espesor x, cuyas caras tienen una diferencia de temperatura ΔT, la rapidez de conducción de calor viene dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x} \qquad (2)$$

Podemos igualar las expresiones (1) y (2), para obtener:

$$\rho L_f A\frac{dx}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x} \qquad (3)$$

Simplificando y separando las variables x y t, tenemos:

$$x\,dx = \left(\frac{k\Delta T}{\rho L_f}\right)dt$$

Integrando:

$$\int_0^x x\,dx = \left(\frac{k\Delta T}{\rho L_f}\right)\int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{k\Delta T}{\rho L_f}\right)t \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2kt\Delta T}{\rho L_f}}$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$x = \sqrt{\frac{2(1{,}67\text{W/m°C})(3600\text{s})(15°\text{C})}{(920\text{kg/m}^3)(3{,}34\text{x}10^5\text{J/kg})}} = 2{,}42\text{cm}$$

Hielo

Calor de fusión
$L_f = 3{,}34\text{x}10^5$J/kg

Densidad
$\rho = 920$kg/m^3

Conductividad térmica
$k = 1{,}67$W/m°C

b) La rapidez de formación de hielo se obtiene despejando directamente (dx/dt) de la expresión (3):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k\Delta T}{\rho x L_f}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1{,}67\,W/m^{\circ}C \times 15^{\circ}C}{920\,kg/m^3 \times 0{,}0242\,m \times 3{,}34 \times 10^5\,J/kg}$$

$$v = 3{,}37 \times 10^{-6}\,m/s = 3{,}37 \times 10^{-4}\,cm/s$$

c) Si la profundidad del lago es 30 m, el tiempo que tardaría en congelarse es:

$$t = \frac{\rho L_f x^2}{2k\Delta T} = \frac{(920\,kg/m^3)(3{,}34 \times 10^5\,J/kg)(30\,m)^2}{2(1{,}67\,W/m^{\circ}C)(15^{\circ}C)}$$

$$t = 5{,}52 x 10^9\,s = 177 \text{ años}$$

d) El lago no llega a congelarse porque cuando el agua mas fría de la superficie alcanza una temperatura inferior a 4 ºC, se hace menos densa y permanece en la superficie, mientras tanto el agua que está ligeramente mas caliente se hace mas densa y se hunde.

El comportamiento anómalo de la densidad del agua explica cómo se preserva la vida acuática en los lagos de aquellas regiones donde el invierno es muy riguroso. El hielo se forma primero en la superficie y como el hielo es menos denso que el agua, permanece flotando y actuando como aislante térmico para el agua densa que se encuentra por debajo a 4 ºC.

Respuesta:

a) $x = 2{,}42$ cm
b) $dx/dt = 3{,}37 \times 10^{-4}$ cm/s
c) $t = 5{,}52 x 10^9\,s = 177$ años

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-4.01. ***Calor es...***

a) La misma cosa que temperatura.

b) Lo que contiene un cuerpo cuando está caliente.

c) Lo que almacena un cuerpo frío al calentarlo.

d) Flujo de energía entre un cuerpo y su entorno en virtud de una diferencia de temperatura entre ellos.

e) Una característica del estado térmico de la materia.

PE-4.02. ***El calor especifico de un cuerpo ....***

a) Es el calor que puede almacenar a una temperatura dada.

b) Es mayor tanto menor sea el calor que se le debe transferir para elevar su temperatura.

c) Es el calor necesario para elevar la temperatura de un mol de la sustancia en 1 grado.

d) Es una constante independiente de la forma en que se lleva a cabo el proceso de variación de temperatura.

PE-4.03. ***Según la primera ley de la termodinámica ...***

En la expresión: $\Delta U = Q - W$ ...

a) Q es el calor suministrado al sistema y W el trabajo efectuado por el sistema.

b) Q es el calor cedido por el sistema y W el trabajo efectuado sobre el sistema.

c) Q es el calor cedido por el sistema y W el trabajo efectuado por el sistema.

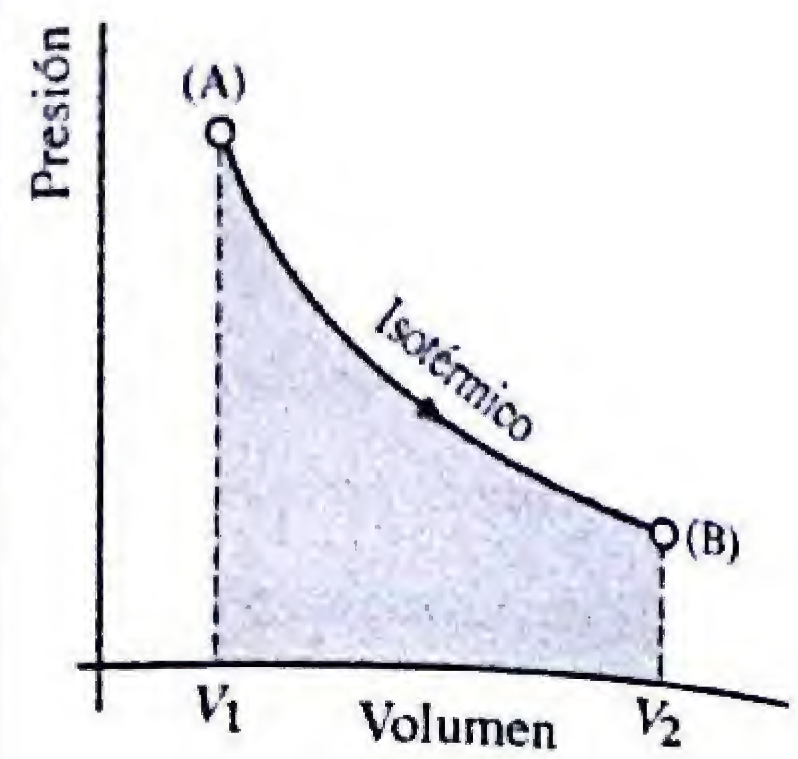
d) Q es el calor suministrado al sistema y W el trabajo efectuado sobre el sistema.

PE-4.04. *Calor y trabajo en un proceso isotérmico*

En una transformación isotérmica de un gas ideal desde el estado A hasta el estado B, ¿qué se puede decir de las tres afirmaciones siguientes?

(i) *ΔU es cero.*
(ii) *W es numéricamente igual al área bajo la curva AB.*
(iii) *Q es numéricamente igual al área bajo la curva AB.*

a) únicamente la afirmación (i) es correcta.
b) (i) y (ii) son correctas, la (iii) es incorrecta.
c) (ii) y (iii) son correctas, la (i) es incorrecta.
d) las tres afirmaciones son incorrectas.
e) las tres afirmaciones son correctas.

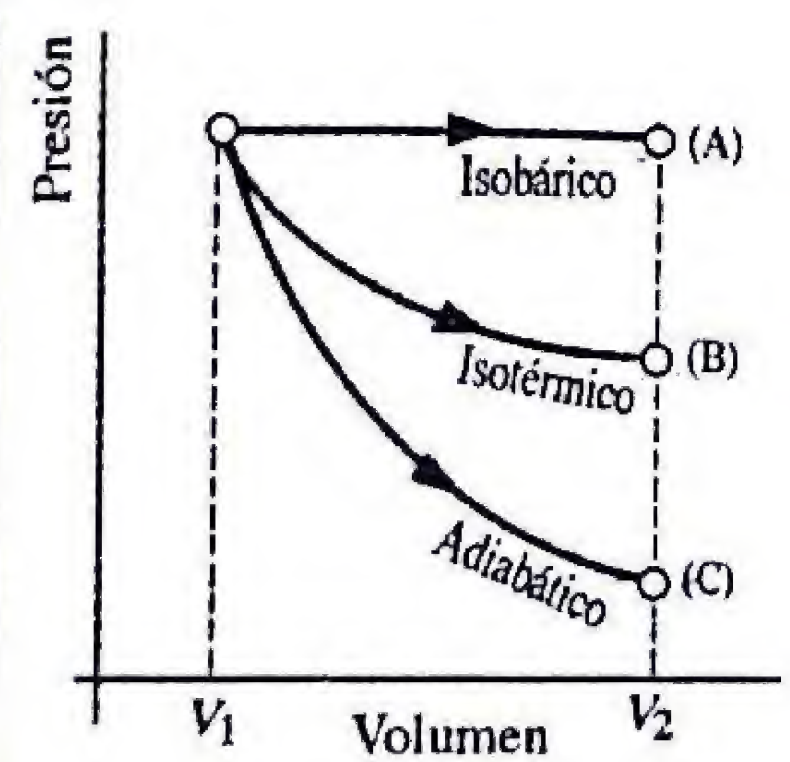


PE-4.05. *Un gas que se expansiona de tres maneras*

Un gas ideal es expandido desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2, siguiendo tres procesos diferentes: (A) isobárico, (B) isotérmico, (C) adiabático. Si comparamos estos procesos, ¿qué podemos decir de las tres afirmaciones siguientes?

i) $W_A > W_B > W_C$
ii) $Q_A > Q_B > Q_C$
iii) $\Delta U_A > \Delta U_B > \Delta U_C$

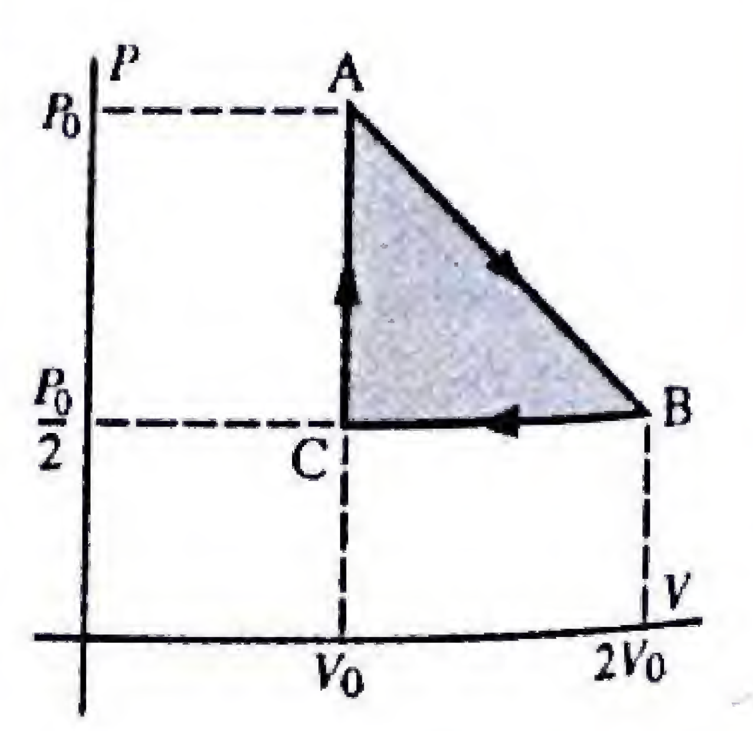
a) Unicamente la (i) es correcta.
b) La (i) y la (ii) son correctas, la (iii) es incorrecta.
c) La (i) y la (iii) son correctas, la (ii) es incorrecta.
d) Las tres afirmaciones son correctas.
e) Las tres afirmaciones son incorrectas.



PE-4.06. *Trabajo de un gas en un cilindro con émbolo*

Un gas ideal que está confinado en un cilindro cerrado con un émbolo móvil queda sometido al ciclo triangular mostrado, ABCA. ¿Cuál es el trabajo realizado en términos de la presión P_0 y volumen inicial V_0?

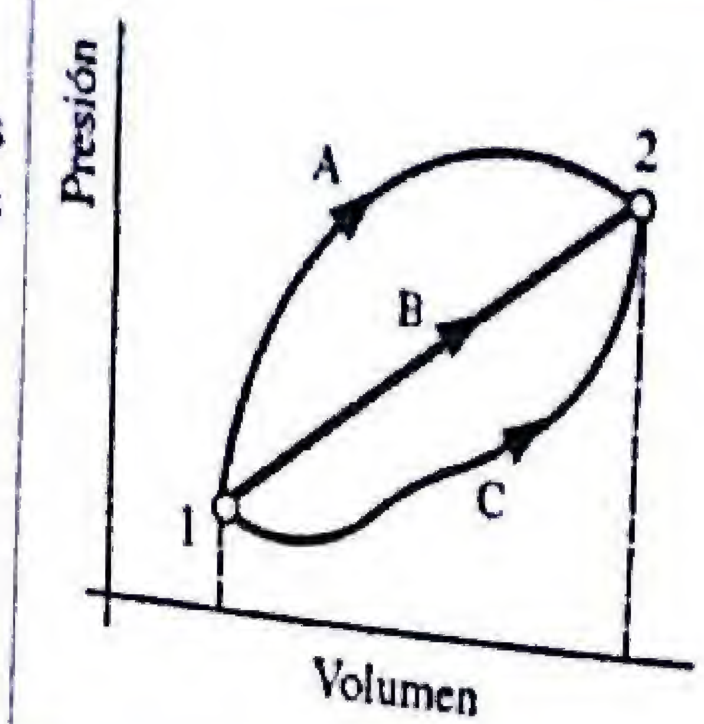
a) $4P_0V_0$ b) $2P_0V_0$ c) P_0V_0 d) $\frac{1}{2}P_0V_0$ e) $\frac{1}{4}P_0V_0$



PE-4.07. *Compare los calores transferidos*

Un gas es sometido a las tres expansiones distintas mostradas en la figura. Si comparamos los calores transferidos en estos tres procesos, podemos afirmar que:

a) $Q_A > Q_B > Q_C$
b) $Q_A < Q_B < Q_C$
c) $Q_A = Q_B = Q_C$



PE-4.08. *¿Y tu, qué respondiste en el examen?*

Una pregunta que salió en el examen fue:
¿Será posible suministrar calor a un gas sin que aumente su temperatura? Explique.
¿Cuál de estos alumnos dio la respuesta correcta?

a) *Si*: Porque este calor puede ser utilizado para aumentar la energía cinética de las moléculas.

b) *No*: Porque siempre que calentamos un cuerpo su temperatura debe aumentar.

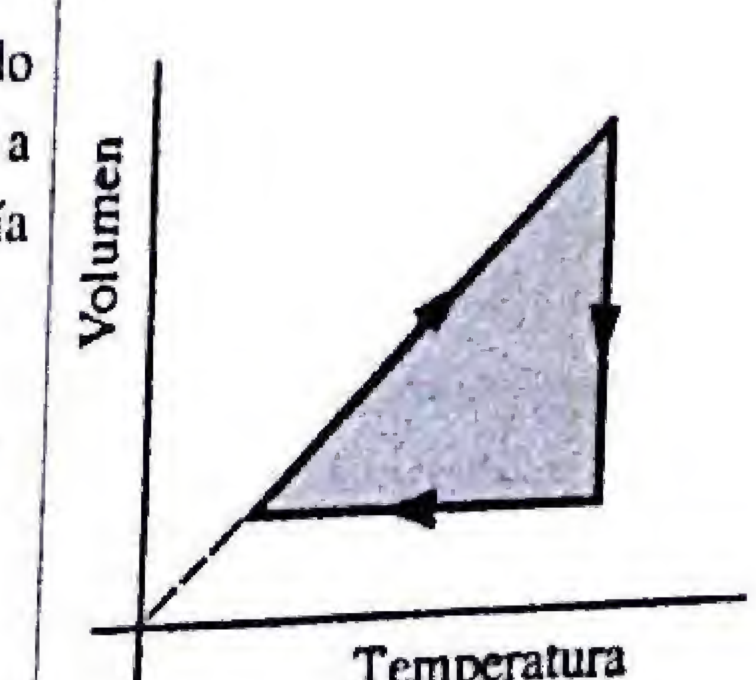
c) *Si*: Porque el gas pudiera realizar un trabajo de igual magnitud que el calor que se le proporciona.

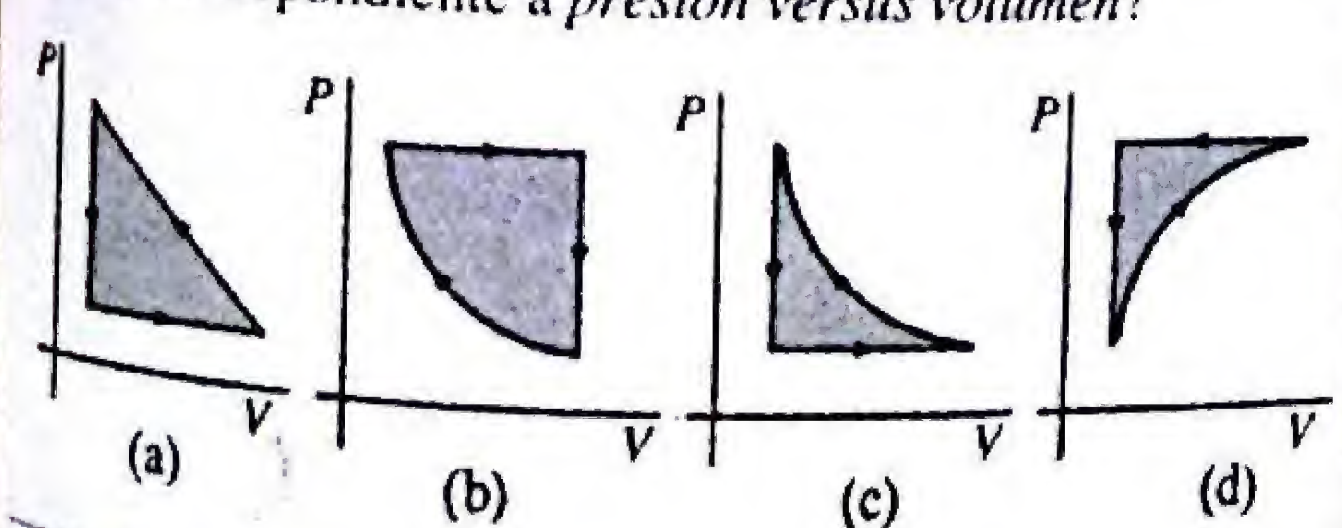
d) *No*: Porque se estaría violando el primer principio de la termodinámica.

e) *Si*: Porque el calor puede utilizarse para aumentar la energía interna del gas.

PE-4.09. *¿Cuál sería el gráfico p-V correcto?*

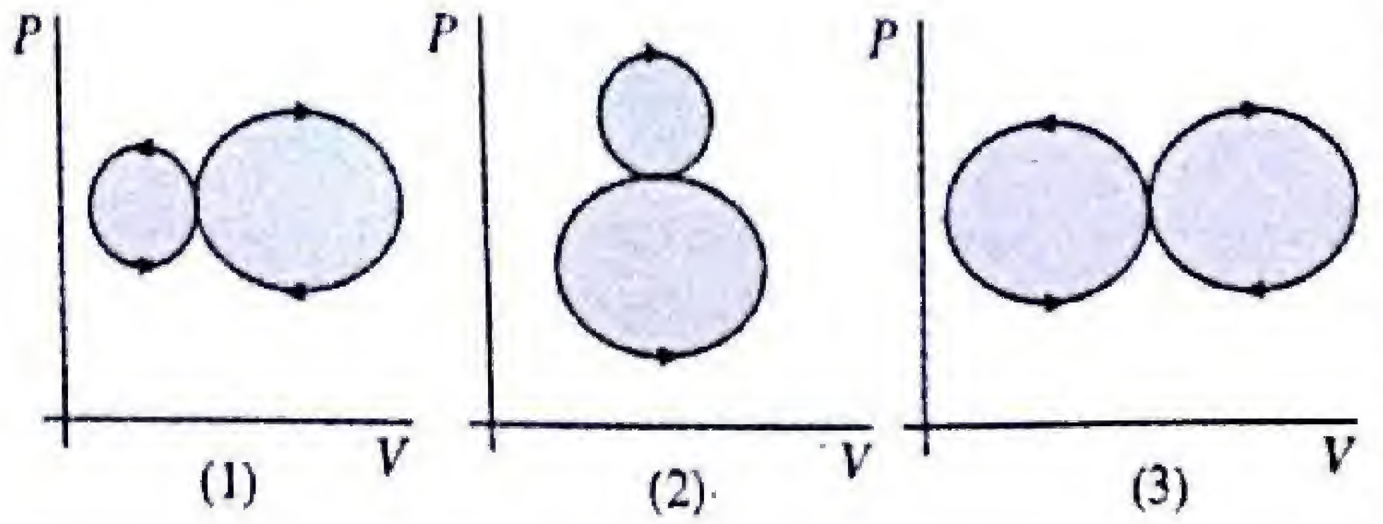
Un gas ideal ha realizado el proceso cíclico representado en el gráfico de *volumen vs. temperatura* que se muestra a la derecha. ¿Cuál de los gráficos mostrados abajo podría ser el correspondiente a *presión versus volumen*?





PE-4.10. *¿En cuál ciclo el sistema realiza más trabajo?*

Considere los tres siguientes procesos cíclicos, a los cuales es sometido un sistema en los sentidos indicados. Si comparamos el trabajo neto hecho "por el sistema" en estos ciclos, ¿cómo están relacionados?

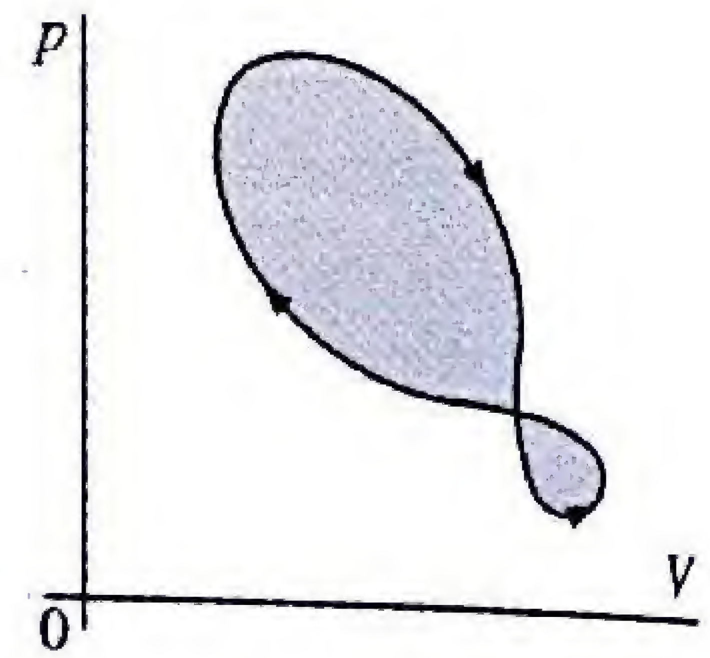


a) $W_3 > W_2 > W_1$
b) $W_1 > W_3 > W_2$
c) $W_1 > W_2 > W_3$
d) $W_2 > W_3 > W_1$
e) $W_3 > W_1 > W_2$

PE-4.11. *¿En este ciclo, entra o sale calor del sistema?*

Un sistema termodinámico efectúa el proceso cíclico que consiste de dos lazos cerrados como se muestra en la figura. Durante este ciclo, ¿entra o sale calor del sistema?

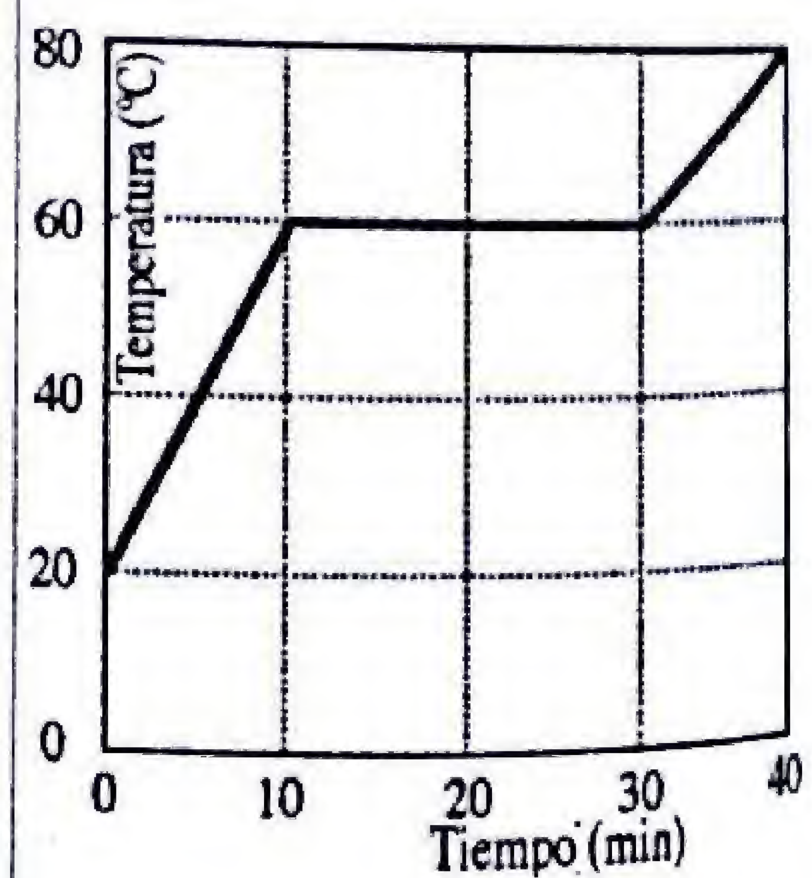
a) Entra calor
b) Sale calor
c) Ni entra ni sale calor.



PE-4.12. *¿Cómo se interpreta esté gráfico?*

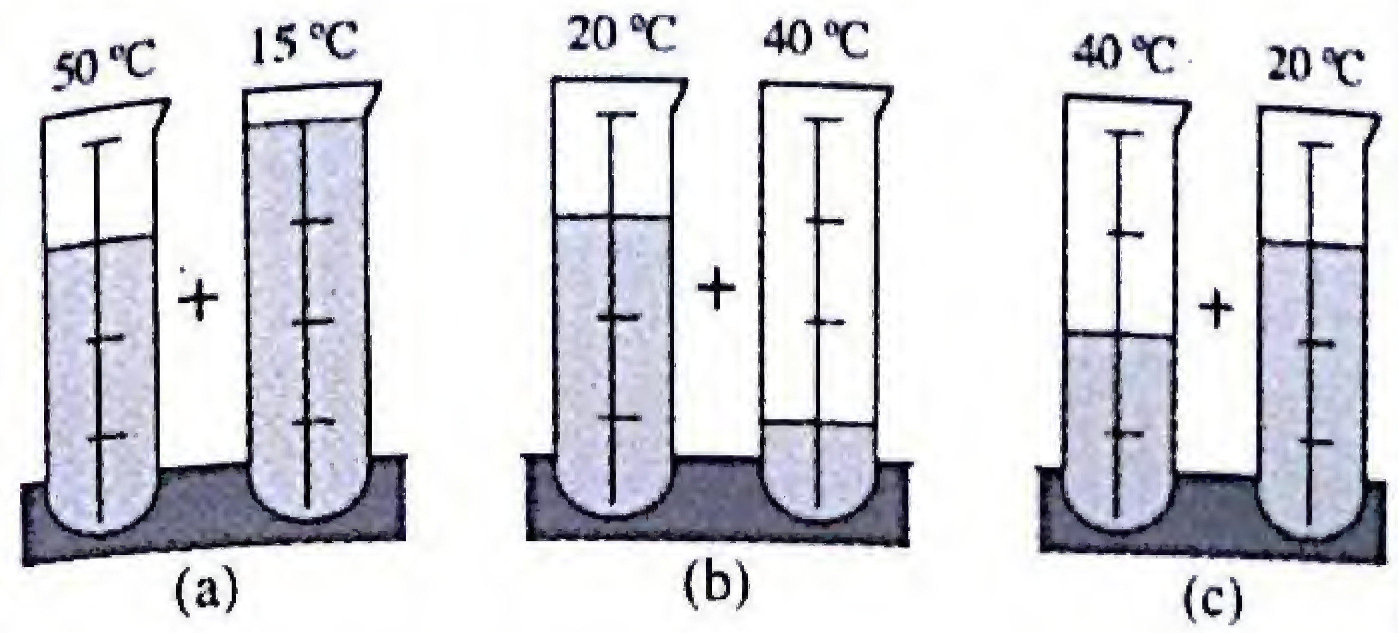
En una práctica de laboratorio de física un alumno pone a calentar un objeto sólido de masa 0,25 kg mediante una fuente que le suministra 500 J/min. En el registro de la temperatura (en °C) en función del tiempo durante 40 minutos, obtuvo el gráfico mostrado a la derecha. ¿Cuál de las siguientes conclusiones *no es necesariamente correcta*?

a) La temperatura de fusión del sólido es 60 °C.
b) El calor específico del sólido es 500 J/kg·°C.
c) El calor de fusión del sólido es 40 000 J/kg.
d) El calor específico del líquido es 1000 J/kg·°C
e) La temperatura de ebullición del líquido es 80°C



PE-4.13. *Buscando la mezcla apropiada*

Dos probetas graduadas idénticas están térmicamente aisladas y contienen diferentes cantidades de agua a las temperaturas indicadas.



¿Si mezclamos el agua de los dos recipientes, con cuál de las tres combinaciones mostradas se obtendrá una temperatura final de 25 °C?

PE-4.14. *Se puede hervir agua en un vaso de papel*

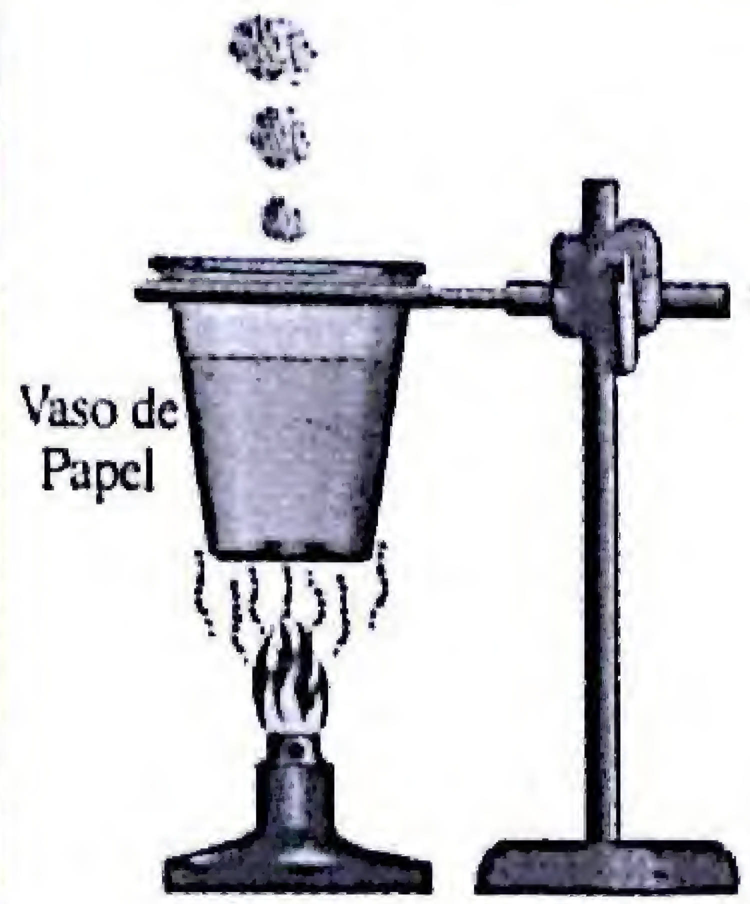
En una demo de física colocamos un vaso de papel sostenido por un aro, lo llenamos de agua y por debajo lo calentamos con una llama. Sorpresivamente el agua entra en ebullición sin que el papel llegue a inflamarse, aunque le rocen las llamas. Este fenómeno se debe a que...

a) El papel es un buen aislante térmico.

b) El papel es muy buen conductor del calor.

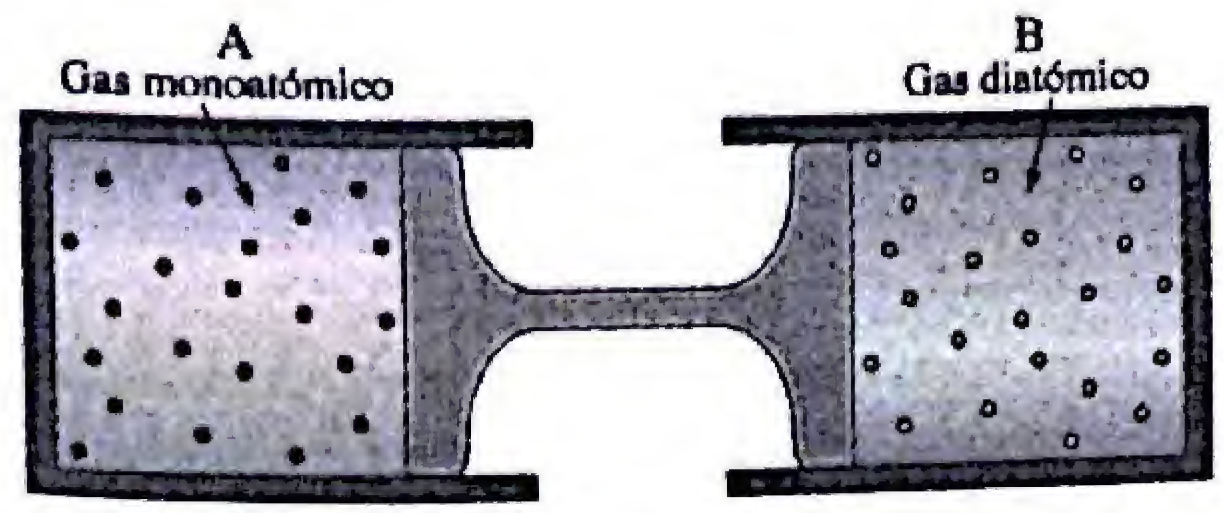
c) El agua tiene una alta capacidad calorífica que le permite absorber el exceso de calor del papel y no deja que la temperatura de éste se exceda de los 100 °C.

d) Es un papel especial que aguanta altas temperaturas.



PE-4.15. *¿Cuál de los dos gases empuja más?*

Dos cilindros provistos de pistones acoplados tienen igual número de moles de gases ideales distintos. El cilindro A contiene un gas *monoatómico* y el cilindro B contiene un gas *diatómico*.

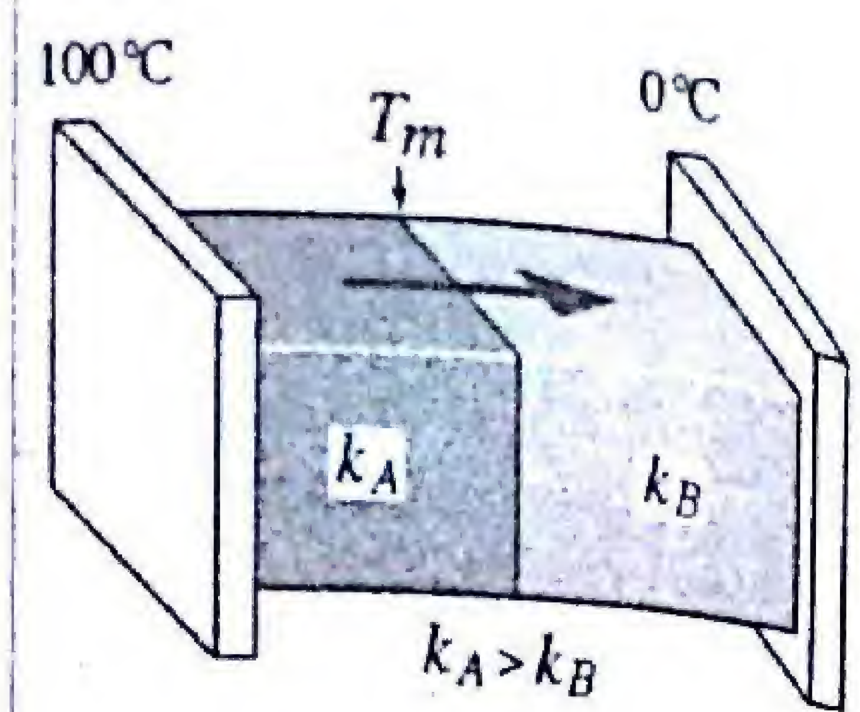


Inicialmente ambos gases ocupan el mismo volumen y están a la misma temperatura. Cuando se incrementa la temperatura de ambos sistemas por igual, ¿hacia dónde se mueven los pistones?

a) Hacia la izquierda
b) Hacia la derecha
c) No se mueven

PE-4.16. *Dos barras conductoras en serie*

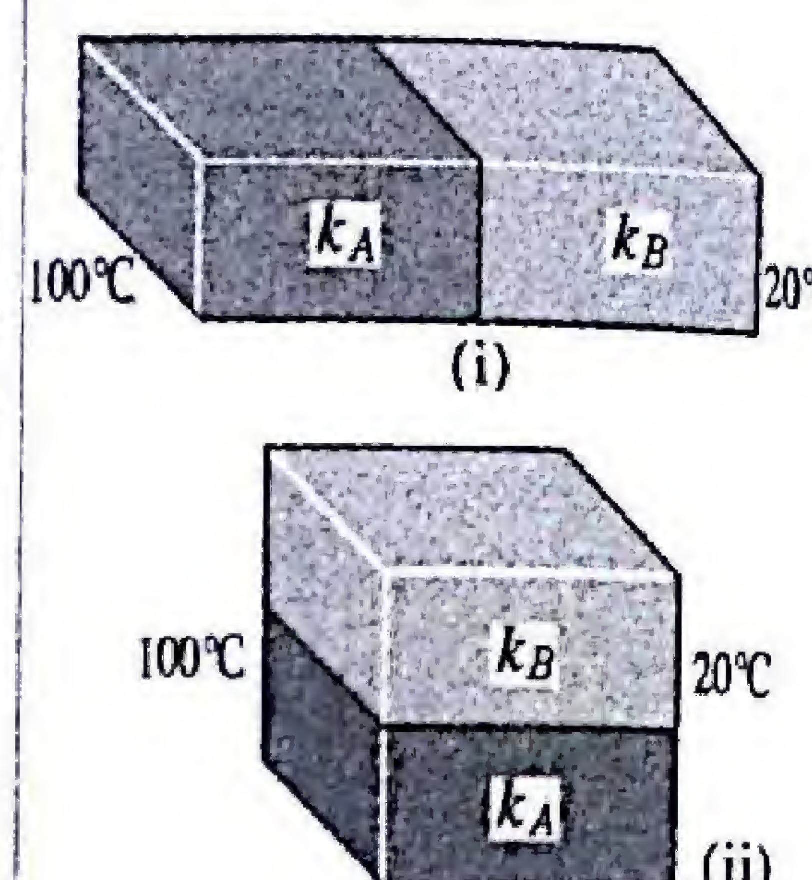
Dos barras A y B de iguales longitud y sección transversal están hechas con materiales de conductividades térmicas diferentes, $k_A > k_B$, y se unen como se indica en la figura. La cara izquierda de A se mantiene a una temperatura constante 100 °C y la cara derecha de B se mantiene a la temperatura constante de 0 °C. Después que se alcanza el régimen estacionario, podemos decir que:



a) La temperatura del punto medio, T_m es mayor de 50°C.
b) La temperatura del punto medio es: T_m = 50 °C.
c) la temperatura del punto medio, T_m, es menor de 50°C.
d) La rapidez de flujo de calor en A es mayor que en B.
e) La rapidez de flujo de calor en A es menor que en B.

PE-4.17. *Compare: Conducción en serie vs. paralelo*

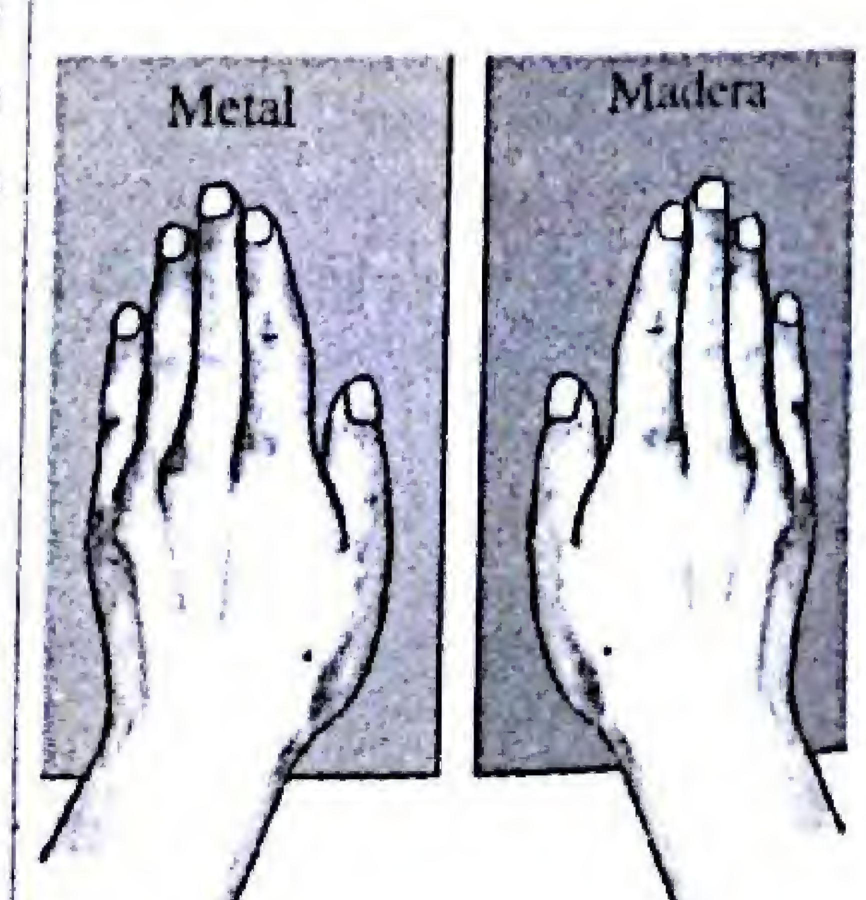
Dos barras metálicas idénticas A y B, se sueldan en dos formas diferentes. En la figura (i) están unidas una a continuación de la otra (en serie). En la figura (ii) están unidas lateralmente (en paralelo). Si los extremos están a las temperaturas indicadas, *la tasa de flujo de calor*....



a) En serie es dos veces menor que en paralelo.
b) En serie es cuatro veces menor que en paralelo.
c) En serie es igual que en paralelo.
d) En serie es dos veces mayor que en paralelo.
e) En serie es cuatro veces mayor que en paralelo.

PE-4.18. *La sensación térmica puede ser engañosa*

En una habitación donde la temperatura es homogénea, un alumno coloca una mano sobre metal y la otra sobre madera. Al alumno le parece que el metal está mas frío que la madera. Esta sensación térmica se debe a que...



a) El metal siempre está mas frío que la madera.
b) El calor específico del metal es mayor que el calor específico de la madera.
c) El metal transmite el calor por conducción y la madera por radiación.
d) El metal es mejor conductor térmico, y extrae calor de tu mano con mayor facilidad.
e) La madera conserva mejor el calor que el metal.

PE-4.19. *Transferencia de calor para secarse el cabello*

La energía térmica del secador mostrado en la figura le llega al cabello de la muchacha principalmente por un proceso de....

a) Conducción. b) Radiación c) Convección

PE-4.20. *Eres como un bombillo incandescente*

La dieta diaria normal de una persona, debe estar entre 1500 y 2500 calorías, dependiendo de su estatura, sexo y edad. Supongamos que tu consumo promedio por día es de unas 2060 calorías y que toda esta energía usada por tu organismo es eventualmente gastada como calor. Como una caloría (alimenticia) equivale a 4184 J, entonces la potencia de salida de tu cuerpo sería equivalente a la de un bombillo incandescente de...


1 Caloría (alimenticia) = 4184 J

a) 180 Watts, b) 100 Watts, c) 75 Watts,

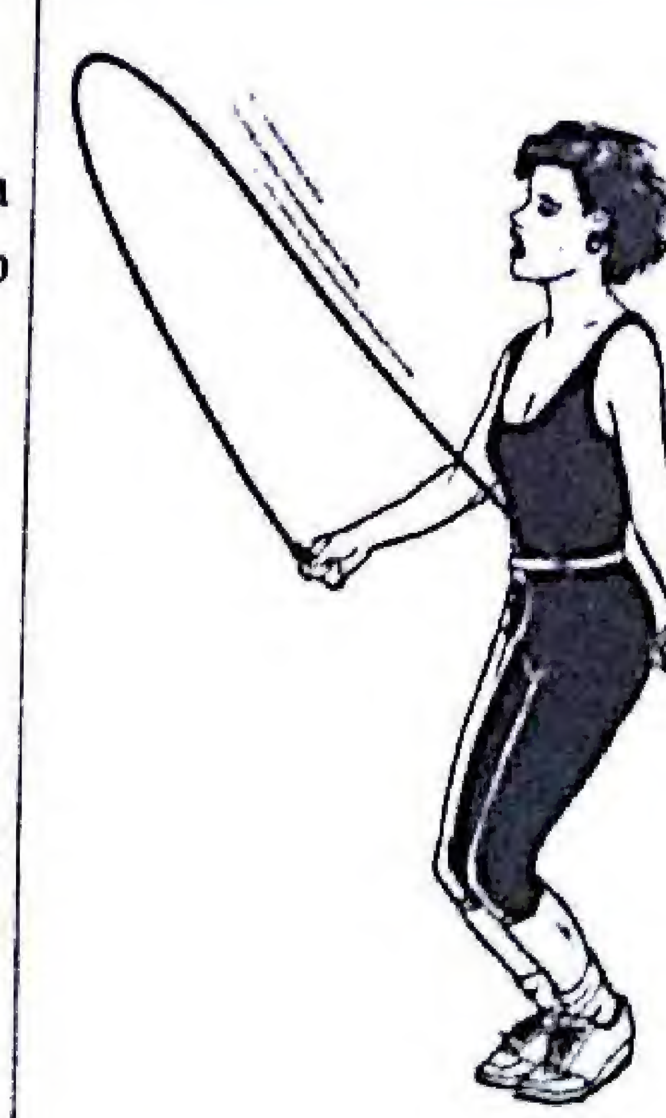
d) 25 Watts e) 15 Watts

PE-4.21. *Quemando las calorías de un pedazo de torta*

Una alumna que está bajo una dieta rigurosa, no resiste la tentación el día de su cumpleaños de comerse un pedazo de torta, el cual tenía el siguiente contenido dietético:

3,66 g de proteínas con valor energético 4 calorías /g.
31,1 g de carbohidratos de valor energético 4 calorías /g.
12,8 g de grasas con valor energético 9 calorías /g.

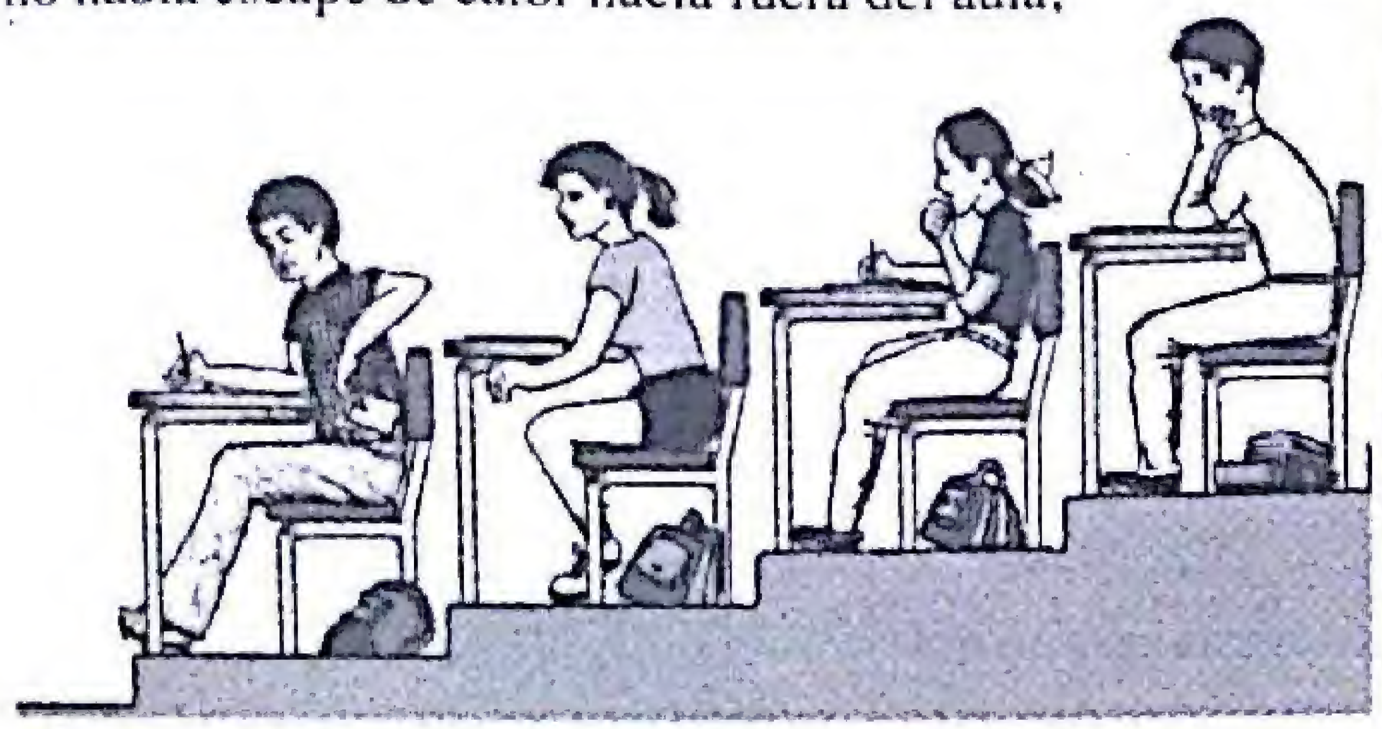
Si durante el ejercicio de saltar la cuerda ella gasta en promedio 510 Calorías por hora, ¿cuánto tiempo tendrá que ejercitarse para *quemar* el pedazo de torta que se comió?



a) 4 h, b) 2 h, c) 1 h, d) 50 min, e) 30 min,

PE-4.22. ***El día del examen se elevó la temperatura***

Cincuenta estudiantes entran a presentar el examen final de física en un aula que tiene un volumen de 1600 m^3. El examen estaba tan difícil que la producción de calor media por alumno subió a 152 W. La densidad del aire es 1,20 kg/m^3 y el calor especifico 1020 J/kg.K. El aparato de aire acondicionado estaba apagado y suponemos que no había escape de calor hacia fuera del aula.



¿Cuál fue el aumento de la temperatura al cabo de una hora?

a) 2 °C,

b) 5 °C,

c) 9 °C,

d) 14 °C

e) 18 °C

CAP. 4: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
4.01				✓	
4.03	✓				
4.05				✓	
4.07	✓				
4.09			✓		
4.11	✓				
4.13		✓			
4.15			✓		
4.17		✓			
4.19			✓		
4.21					✓

	a	b	c	d	e
4.02			✓		
4.04					✓
4.06					✓
4.08			✓		
4.10				✓	
4.12					✓
4.14			✓		
4.16	✓				
4.18				✓	
4.20		✓			
4.22				✓	

WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN)

1824 - 1907

Nació en Belfast (Irlanda). Su padre, un profesor de ingeniería, lo inició desde temprana edad en el campo de las matemáticas. Su madre murió cuando él apenas tenía seis años de edad. Fue un niño precoz que se matriculó en la Universidad de Glasgow a la temprana edad de diez años. En 1841 el joven de 16 años ingresa a la Universidad de Cambridge y en ese año sale a la luz su primer artículo que trataba sobre las series de Fourier. Es bien conocido por sus extraordinarias contribuciones a la termodinámica y al electromagnetismo. En 1848 propuso la escala absoluta de temperaturas, que es independiente de cualquier sustancia termométrica. En 1852, en colaboración con James Joule hizo un importante descubrimiento. Mientras observaba el paso de un gas a través de un tabique poroso se dio cuenta que su temperatura decrecía cuando el gas se expandía. A tal efecto se le llamaría Joule-Thomson, y es el que se aplica en la refrigeración. En 1854 descubrió el "Efecto Thomson" en termoelectricidad. Éste consiste en el calentamiento o enfriamiento producido en un conductor homogéneo al paso de la corriente eléctrica en la dirección de un gradiente de temperaturas. Elaboró una teoría dinámica del calor que contribuyó a la formulación del principio de conservación de la energía. Junto con el físico alemán E. Clausius, y usando razonamientos puramente macroscópicos, formuló la segunda ley de la termodinámica que sirvió para establecer el concepto de entropía. Levó a cabo numerosos trabajos sobre la electricidad y el magnetismo e inventó diversos dispositivos para realizar mediciones físicas, entre ellos el galvanómetro de imán móvil y el "puente de Thomson" para las medidas de las resistencias eléctricas. Construyó un dispositivo capaz de resolver mecánicamente ecuaciones diferenciales, considerado como precursor de las calculadoras analógicas. Tuvo a su cargo el tendido del primer cable submarino trasatlántico en 1866. En 1900 propuso uno de los primeros modelos atómicos, según el cual el átomo era un esfera con carga positiva, en cuyo interior se encuentran embebidos los electrones. Enseñó filosofía natural en Glasgow durante cincuenta y tres años, publicó un total de 661 trabajos científicos y patentó 70 inventos. Fue presidente de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia y de la Royal Society de Londres. La reina Victoria le nombró barón (Lord) de Kelvin en reconocimiento por su fecunda obra. En su honor la temperatura Kelvin ha sido adoptada como parte del Sistema Internacional de unidades y esta es la escala que se usa en los trabajos científicos.

5

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La primera ley de la termodinámica garantiza la conservación de la energía y establece que se puede variar la energía interna de un sistema, bien por transferencia de calor o, mediante la realización de un trabajo. Sin embargo, calor y trabajo no son totalmente intercambiables. Es posible transformar trabajo íntegramente en calor sin que ocurran otros cambios en el sistema; pero es imposible extraer una determinada cantidad de calor de un sistema y usarla toda para efectuar trabajo sin que ocurran otros cambios. En la naturaleza podemos imaginar una infinidad de procesos que no violarían la primera ley, sin embargo éstos no pueden ocurrir. Por ejemplo, el calor fluye espontáneamente de un cuerpo caliente a uno frío, pero nunca en sentido inverso. Para explicar esta carencia de reversibilidad surge la segunda ley de la termodinámica, que especifica la dirección en la cual puede ocurrir un proceso, y establece criterios que determinan la disponibilidad de la energía térmica para realizar trabajo. Quizá la aplicación práctica mas importante de la segunda ley es que pone un límite a la eficiencia que pueden alcanzar las *máquinas térmicas*. Para expresar la segunda ley en forma cuantitativa se define una nueva variable termodinámica, *la entropía*, que está asociada al desorden o desarreglo que hay en un sistema. De acuerdo con la segunda ley los sistemas siempre evolucionan hacia un estado de mayor desorden, de forma tal que la entropía del universo (sistema mas ambiente) tiende a aumentar para todo proceso natural y la energía tiende a degradarse a formas menos disponibles para efectuar un trabajo útil.

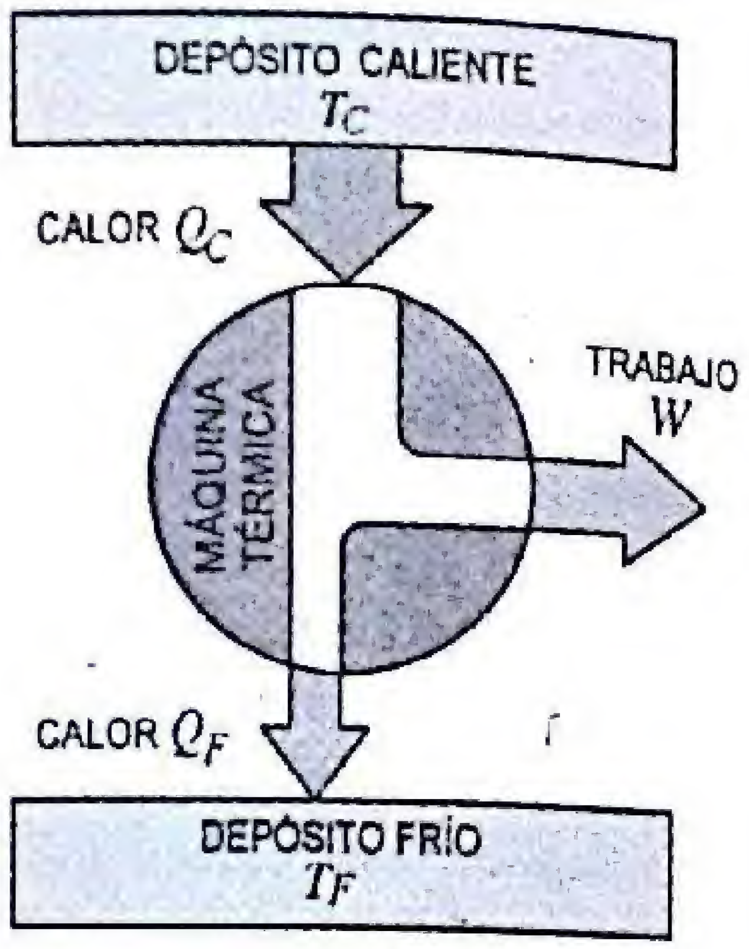
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Máquinas térmicas.
- Eficiencia de una máquina térmica.
- Segunda ley de la termodinámica.
- Procesos reversibles e irreversibles
- Ciclo de Carnot.
- Entropía.
- La entropía y la segunda ley de la termodinámica

MÁQUINAS TÉRMICAS

Una máquina térmica es cualquier dispositivo que convierte energía térmica en otras formas útiles como la energía mecánica y eléctrica. La idea básica en el funcionamiento de una máquina térmica es que…

- Extrae calor Q_C de un foco caliente a temperatura, T_C.
- Realiza un trabajo W.
- Cede calor Q_F, a un foco a menor temperatura, T_F.



Esquema de una máquina térmica

La máquina térmica es un dispositivo cíclico en que el sistema regresa repetidamente a su punto de partida, trabajando de manera continua. La energía interna del sistema no cambia durante un ciclo:

$$\Delta U = 0$$

Por lo tanto, según la primera ley de la termodinámica el trabajo neto realizado por la máquina térmica es :

$$W = Q_C - Q_F$$

$$W = Q_C - Q_F$$

EFICIENCIA DE UNA MÁQUINA TÉRMICA

La eficiencia de una máquina térmica se expresa mediante la razón entre lo que obtenemos de la máquina (el trabajo W), y lo que le suministramos o "pagamos" como combustible quemado (el calor Q_C), durante cada ciclo:

$$e = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

Está claro que si no hubiese que expulsar calor Q_F, a una fuente fría, tendríamos una máquina perfecta, es decir, 100% eficiente.

Eficiencia de una máquina

$$e = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

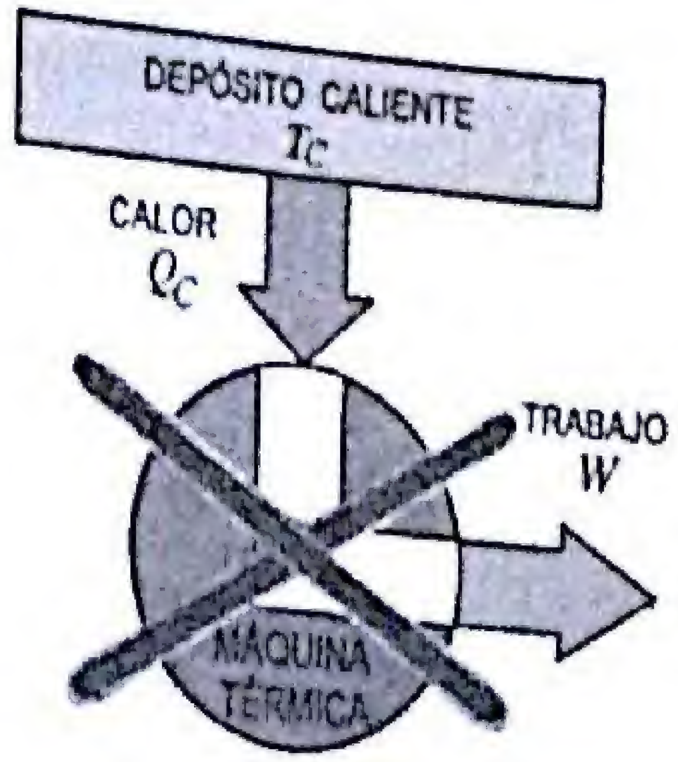
SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Existen varios enunciados equivalentes de la segunda ley de la termodinámica. Uno de éstos es el que se refiere a la imposibilidad de construir una máquina perfecta (o 100% eficiente):

Segunda ley de la termodinámica: "Es imposible una máquina térmica que trabaje cíclicamente convirtiendo íntegramente una dada cantidad de calor en una cantidad equivalente de trabajo mecánico"

Enunciado de Kelvin-Planck

En el esquema de la imposible máquina térmica perfecta se ilustra la idea que W nunca puede ser igual a Q_C ya que siempre hay que liberarse calor hacia el ambiente.



Segunda ley:
No hay máquina perfecta (100% eficiente)

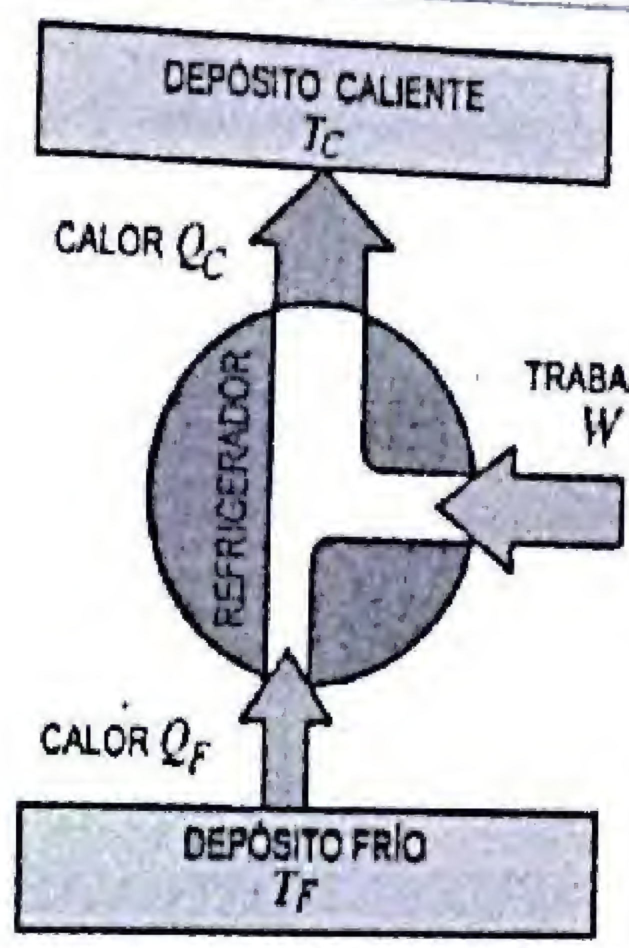
REFRIGERADOR

Un refrigerador y también un acondicionador de aire es una máquina que opera en un proceso cíclico a la inversa:

- Realiza trabajo W sobre el sistema (utilizando un compresor).
- Extrae calor Q_F de una región fría (por ejemplo, los alimentos en su interior)
- Expulsa calor Q_C a una región caliente (la habitación).

De acuerdo a la primera ley de la termodinámica, se tiene:

$$Q_C = Q_F + W$$

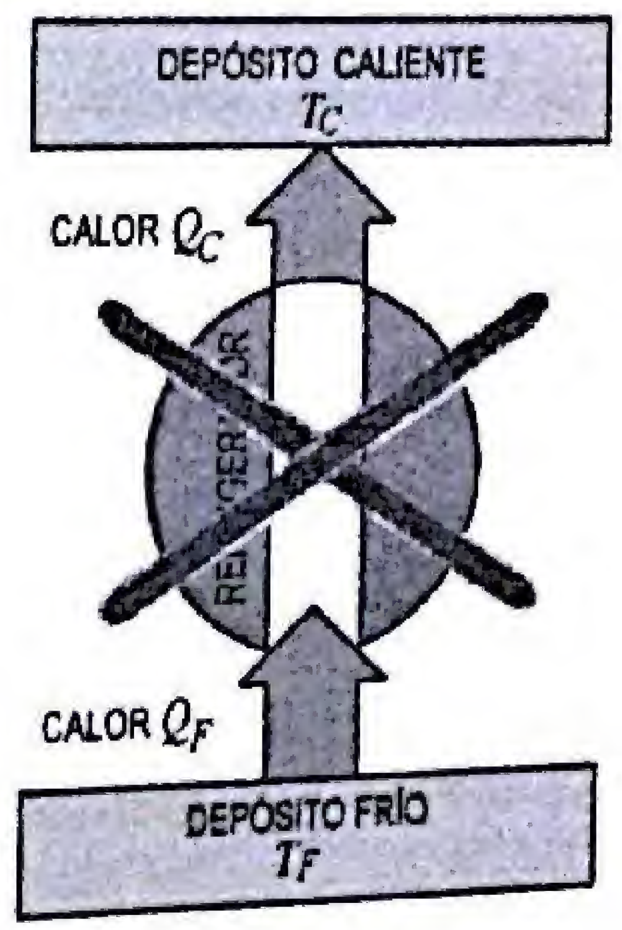


Esquema de un refrigerador

El refrigerador transfiere energía térmica de un cuerpo frío a otro que está a mayor temperatura. En la práctica sería deseable efectuar este proceso sin realizar ningún trabajo. Por ejemplo, si pudiésemos construir una nevera que enfríe los alimentos, sin necesidad de conectarla a la red eléctrica. Esto sería imposible, simplemente, porque la energía térmica no puede fluir espontáneamente de un cuerpo frío a uno caliente. Un enunciado equivalente es:

Segunda ley de la termodinámica; "Es imposible construir una máquina térmica cíclica cuyo único efecto sea transferir energía térmica continuamente de un cuerpo frío a otro a temperatura más alta"

Enunciado de Rudolf Clausius

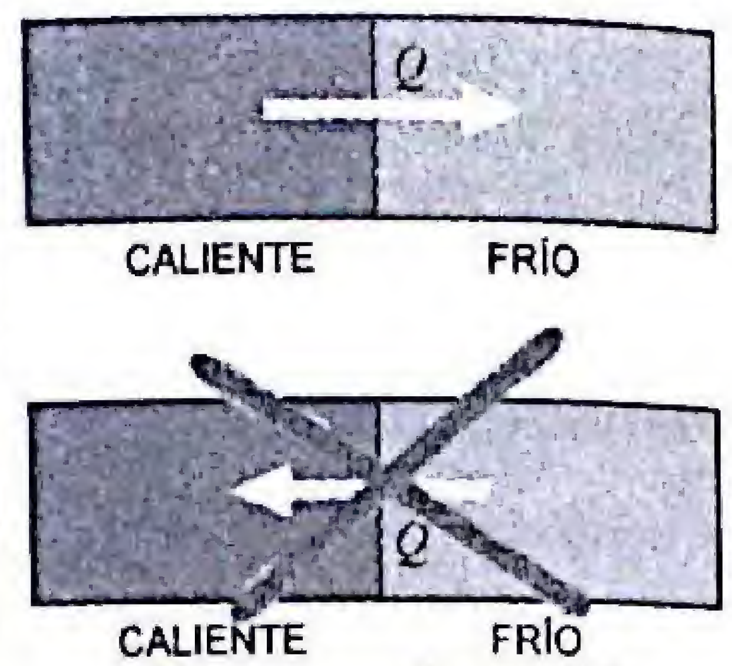


Segunda ley:
No hay refrigerador perfecto

Ahora bien, si ninguna máquina térmica puede ser 100% eficiente, ¿cuáles serían los requerimientos para que una máquina tenga la máxima eficiencia? Obviamente, la máquina no debe presentar pérdidas de energía, por ejemplo, por efectos disipativos. Pero, ¿sería esto suficiente?

IRREVERSIBILIDAD

Un aspecto de importancia crucial para establecer el límite teórico de la eficiencia de una máquina es la *irreversibilidad*. Si ponemos un objeto caliente en contacto con otro a temperatura menor, el calor fluye de forma espontánea del objeto caliente al frío; pero es imposible lograr que el calor fluya en dirección contraria, aun por pequeños cambios en la temperatura de cualquiera de los objetos.

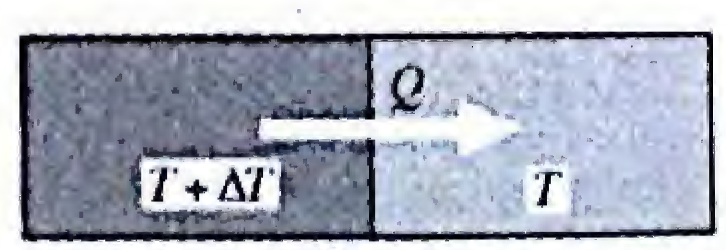


Un proceso imposible

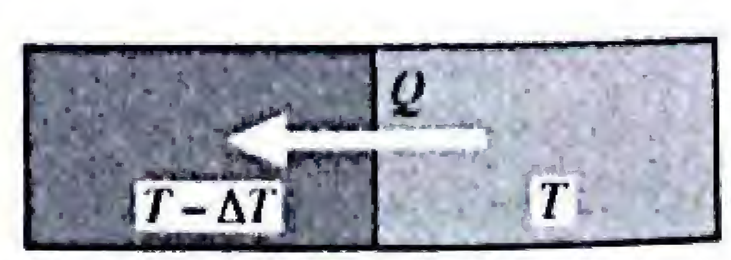
Cuando se funde un cubo de hielo, las moléculas de agua que estaban firmemente enlazadas formando una red cristalina ordenada, pasan al estado líquido de manera desordenada. Si imaginamos el proceso inverso en que las moléculas de agua pasen a formar cubos de hielo por si solas, es imposible que ocurra. Esto son ejemplos de *fenómenos irreversibles*.

PROCESOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos dos objetos en contacto térmico que están inicialmente en equilibrio a temperatura T. Si calentamos el objeto de la izquierda, incrementando su temperatura tan solo en una cantidad infinitesimal (temperatura: $T+\Delta T$), esto provocaría que la energía térmica Q fluya hacia la derecha, como se sugiere en la figura a. Por otra parte, si enfriamos el objeto de la izquierda un poquito (temperatura: $T-\Delta T$), la energía térmica Q fluiría en sentido hacia la izquierda (Figura b).



(Fig. a)

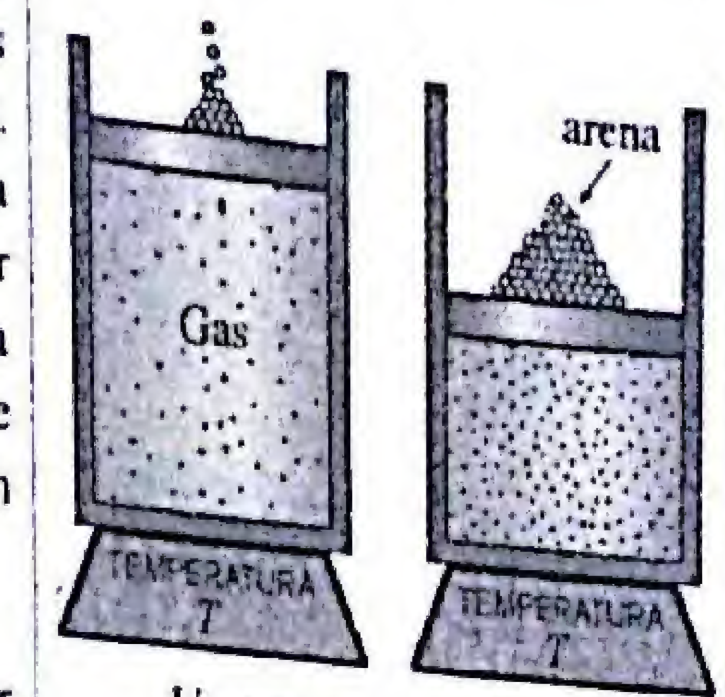


(Fig. b)

Transferencia de calor reversible

Es evidente que un proceso sería *reversible* si se desarrolla lo suficiente lento mediante pasos infinitesimales, para permitir que en cada paso el sistema sea perturbado solo ligeramente con respecto a su estado de equilibrio. El sistema pasaría por sucesivos estados de equilibrio y cada paso se podría invertir exactamente para pasar del estado final al inicial.

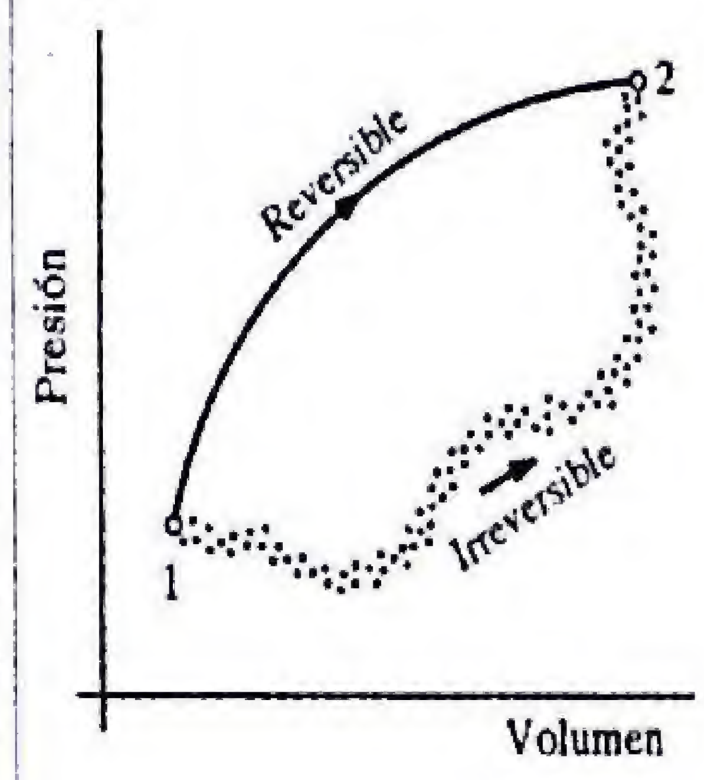
Todos los procesos reales son irreversibles. Sin embargo, podríamos aproximarnos a un proceso reversible, por ejemplo, si se comprime de un modo muy lento un gas contenido en un cilindro provisto de un émbolo móvil. Bastaría con ponerlo en contacto con un foco a temperatura T, y gradualmente vamos dejando caer minúsculos granos de arena sobre el pistón. Durante la compresión isotérmica, con cada grano de arena que cae se reduce ligeramente el volumen del gas y la presión aumenta, cambiando a un nuevo estado de equilibrio.



Un proceso isotérmico reversible

El proceso se podría invertir si luego, procedemos a quitar lentamente grano por grano, de manera tal que el gas se vaya expandiendo poco a poco hasta recuperar su volumen inicial, sin que, al final haya ocurrido cambio alguno en la magnitud del trabajo hecho ni de la energía térmica intercambiada.

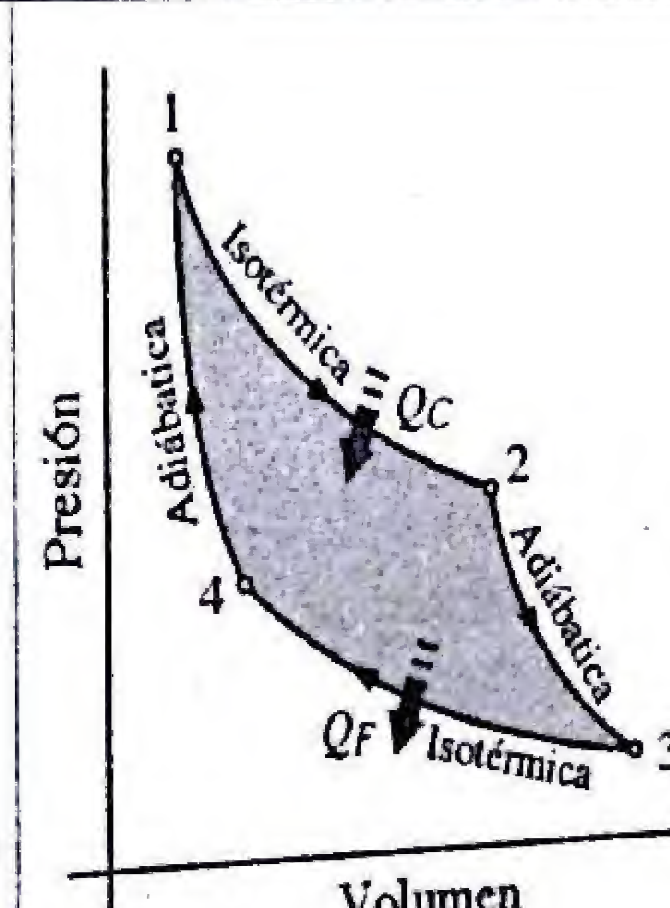
Un proceso reversible se puede representar por una sucesión de puntos de equilibrio, es decir, mediante una curva en un diagrama p-V. Cada punto sobre la curva representa un estado de equilibrio intermedio.



Por otro lado, ocurre un *proceso irreversible* si se desvía mucho de su estado de equilibrio. El sistema pasa de un estado inicial 1 a otro final 2 a través de estados intermedios de *no equilibrio*, los cuales no están caracterizados por una temperatura y presión única en toda su extensión. Por esta razón no sería posible representar el proceso irreversible por una curva continua.

EL CICLO DE CARNOT

En 1824 Sadi Carnot propuso la máquina más eficiente posible. Esta es una máquina teórica o idealizada que opera en un ciclo *reversible* constituido por cuatro etapas:



Un ciclo de Carnot

1→2: *Expansión isotérmica* (absorbe calor Q_C de un foco caliente a temperatura T_C)

2→3: *Expansión adiabática* ($Q = 0$)

3→4: *Compresión isotérmica* (cede calor Q_F a un foco a frío a temperatura T_F)

4→1: *Compresión adiabática* ($Q = 0$)

LA EFICIENCIA EN EL CICLO DE CARNOT

Calculemos la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo reversible usando un gas ideal como sustancia de trabajo.

Isotérmica (1→2): $Q_C = W_{12} = nRT_C\ln(V_2/V_1)$ (i)

Isotérmica (3→4): $Q_F = |W_{34}| = nRT_F\ln(V_3/V_4)$ (ii)

Adiabática (2→3): $T_CV_2^{\gamma-1} = T_FV_3^{\gamma-1}$ (iii)

Adiabática (4→1): $T_CV_1^{\gamma-1} = T_FV_4^{\gamma-1}$ (iv)

Combinando las ecuaciones (iii) y (iv) se obtiene:

$$V_2/V_1 = V_3/V_4$$

Tomando en cuenta esta relación entre volúmenes y dividiendo la ecuación (ii) entre la (i) y escribimos:

$$Q_F/Q_C = T_F/T_C$$

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{T_F}{T_C}$$

Con este resultado vemos que la eficiencia térmica de una máquina de Carnot es:

$$e = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Eficiencia de Carnot

$$e = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

TEOREMA DE CARNOT

El resultado anterior dice que la eficiencia de una máquina térmica que funcione en un ciclo de Carnot reversible es independiente de la sustancia con que trabaja y depende únicamente de las temperaturas de los reservorios de calor T_F y T_C.

"*Ninguna máquina térmica que trabaje irreversiblemente entre las temperaturas T_F y T_C puede ser mas eficiente que una máquina que opere reversiblemente en un ciclo de Carnot entre estas mismas temperaturas*"

Teorema de Carnot

Este es el ciclo más eficiente posible que trabaje entre dos temperaturas.

ENTROPÍA

La segunda ley de la termodinámica ha sido expresada como un enunciado de *imposibilidad* para las máquinas térmicas. Si queremos expresarla mas bien en una forma cuantitativa necesitamos introducir el concepto de entropía. La entropía S, es una función que mide el grado de desorden de un sistema termodinámico y se define por su variación durante una transformación infinitesimal reversible.

Variación de entropía proceso infinitesimal reversible

$$dS = \frac{dQ_r}{T}$$

El cambio de entropía dS, es la razón entre el calor transferido reversiblemente, dQ_r y la temperatura T (absoluta), a la cual ocurre el proceso. La unidad de la entropía en el sistema SI es:

Joule/Kelvin (J/K)

La entropía es una variable de estado, es decir, es como la energía interna, en el sentido que su valor sólo depende del estado del sistema. Por lo tanto, el cambio total de entropía, ΔS, en un proceso reversible arbitrario es el mismo para todas las trayectorias que conecten los estados inicial y final.

Proceso reversible:

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T}$$

ΔS independiente de la trayectoria

ENTROPÍA EN PROCESOS IRREVERSIBLES

Como la entropía de un sistema sólo depende del estado del mismo, el cambio ΔS que ocurre en un proceso irreversible será el mismo que el de uno reversible entre los mismos dos estados.

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T}$$

Este hecho nos permite calcular ΔS en un proceso que *no sea reversible* ya que bastaría con *imaginar* cualquier trayectoria reversible que conecte los mismos dos estados de equilibrio y usar la misma expresión.

Una consecuencia de esta propiedad es que cuando un sistema describe un ciclo y regresa a su estado inicial, el cambio en su entropía es cero.

$$\Delta S_{ciclo} = 0$$

ENTROPÍA Y 2ª LEY DE LA TERMODINÁMICA

Durante un proceso reversible la entropía total de un sistema aislado no cambia. Si consideramos el proceso reversible como una serie de transferencias isotérmicas cuasi estáticas, ya que el cambio de entropía para una parte del sistema es exactamente el negativo del correspondiente a la otra parte del sistema, entonces:

$$\Delta S_{total} = 0 .$$

Por otra parte, si el proceso es *irreversible* (un proceso real), la entropía siempre aumenta. Es decir, si por ejemplo una parte del sistema disminuye su entropía, entonces, la otra parte siempre deberá aumentarla en una cantidad mayor.

En realidad, todas las consecuencias de la segunda ley de la termodinámica se deben a que la entropía nos da una medida del grado de desorden y de la irreversibilidad de un proceso.

Se puede enunciar la segunda ley en términos de la entropía:

"La entropía de un sistema aislado permanece constante si el proceso es reversible, y , aumenta si el proceso es irreversible"

Sistemas aislados:

Proceso reversible
$\Delta S_{total} = 0$

Proceso Irreversible
$\Delta S_{total} > 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-5.01. *Eficiencia de la máquina térmica humana*

Los alimentos que ingerimos proporcionan energía interna a nuestro organismo, donde posteriormente tiene lugar un conjunto de procesos fisicoquímicos que se conoce como *metabolismo*. Parte de la energía es empleada para el crecimiento, la formación de nuevas células y reemplazar las que hayan muerto. Otra parte se transforma en calor y trabajo por la actividad del organismo. La tasa de metabolismo basal es la tasa mínima de consumo del cuerpo humano mientras descansa estando despierto.

Un joven de 20 años que pesa 65 kg tiene una tasa media de 67 Cal/h o 78 W. Suponga que este joven sube una montaña de 1000 m de altura durante 4 horas y su tasa metabólica media en esta actividad es 433 Cal/h o 500 W. ¿Cuál es la eficiencia en este proceso?

Tasas medias de metabolismo:
Joven de 20 años y 65 kg

Dormir:	72 watts
De pie:	170 watts
Caminar:	280 watts
Nadar:	720 watts
Correr :	1150 watts

Solución: La tasa de suministro de energía en los alimentos que efectivamente emplea el organismo para realizar algún trabajo es la diferencia entre la tasa actual y la tasa de metabolismo basal:

$$P = \Delta U / \Delta t = 500\text{W} - 78\text{W} = 422\text{W}$$

La energía suministrada al organismo durante el periodo de 4 horas es:

$$\Delta U = (422\text{J/s})(4\text{h})(3600\text{s/h}) = 6{,}08\text{x}10^6\,\text{J}$$

Por otra parte el trabajo que realizó la persona durante la subida de la montaña fue:

$$W = mgh = (65\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(1000\text{m}) = 6{,}37\text{x}10^5\,\text{J}$$

Por lo tanto la eficiencia de esta máquina térmica es:

$$e = \frac{W}{\Delta U} = \frac{6{,}37\text{x}10^5\,\text{J}}{6{,}08\text{x}10^6\,\text{J}}\text{x}100 = 10{,}5\%$$

Respuesta:

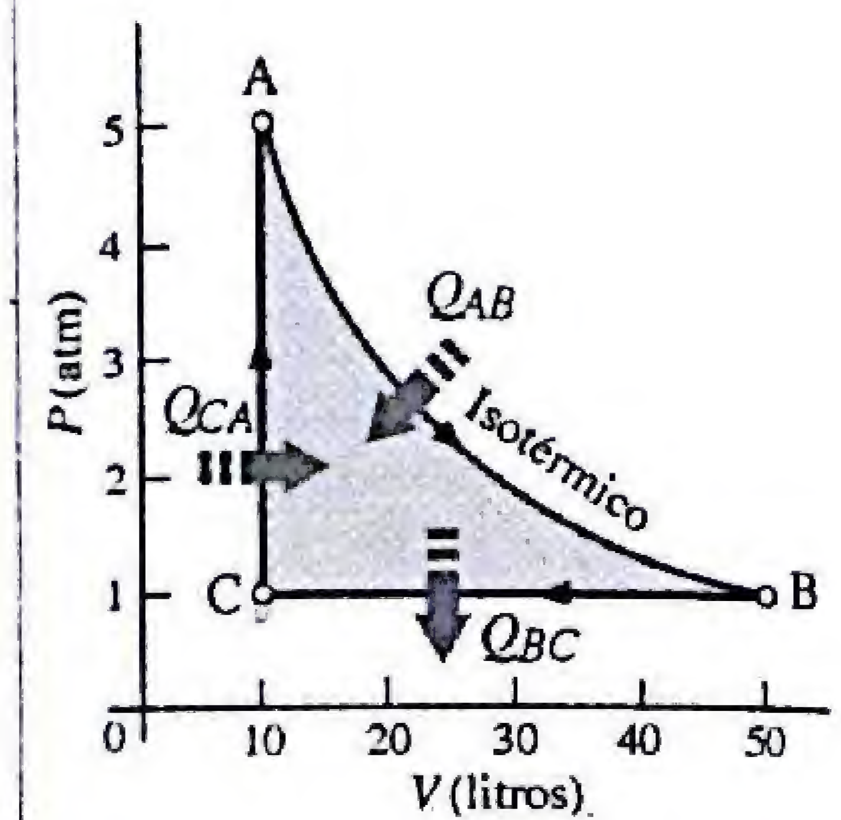
$$\boxed{e = W / \Delta U = 10{,}5\%}$$

PR-5.02. *Eficiencia en ciclo de tres etapas*

Un mol de un gas monoatómico ideal es sometido a un ciclo de tres etapas. El proceso AB es una expansión isotérmica reversible. El proceso BC es una compresión a presión constante y el proceso CA es a volumen constante. Calcule:

a) El trabajo neto ejercido por el gas.
b) El calor añadido y el expulsado por el gas.
c) La eficiencia del ciclo.

Solución: a) Para el proceso isotérmico AB el trabajo realizado es:



$$W_{AB}=\int_{V_A}^{V_B} pdV=\int_{V_A}^{V_B}\frac{nRT}{V}dV=nRT\ln(\frac{V_B}{V_A})=p_AV_A\ln(\frac{V_B}{V_A})$$

$$W_{AB}=(5\text{x}1{,}01\text{x}10^5\text{Pa})(10\text{x}10^{-3}\text{m}^3)ln(\frac{50}{10})=8{,}13x10^3\text{J}$$

Para el proceso BC es trabajo es:

$$W_{BC}=p_B(V_C-V_B)=-(1{,}01\text{x}10^5)40\text{x}10^{-3}=-4{,}04\,x10^3\text{J}$$

En el proceso CA el volumen es constante y el trabajo es nulo. $W_{CA}=0$. El trabajo total es:

$$W=W_{AB}+W_{BC}=8{,}13x10^3\text{J}-4{,}04x10^3\text{J}=+4{,}09x10^3\text{J}$$

b) Como AB es isotérmico, la energía interna no cambia, $\Delta U_{AB}=0$, y de acuerdo a la primera ley, el calor es:

$$Q_{AB}=W_{AB}=+8{,}13x10^3\text{J}$$

El calor específico del gas monoatómico a presión constante es $c_p=(5/2)R$, por lo tanto:

$$Q_{BC}=nc_p\Delta T=nc_p(T_C-T_B)=nc_p(\frac{p_CV_C}{nR}-\frac{p_BV_B}{nR})$$

$$Q_{BC}=n\frac{5}{2}R(\frac{p_CV_C}{nR}-\frac{p_BV_B}{nR})=\frac{5}{2}p_C(V_C-V_B)$$

$$Q_{BC}=\frac{5}{2}(1{,}01x10^5\text{Pa})(10-50)x10^{-3}\text{m}^3=-10{,}1x10^3\text{J}$$

Notamos que Q_{BC} es negativo y por lo tanto este calor es cedido por el gas.

En el proceso CA a volumen constante el calor específico del gas monoatómico es $c_V=(3/2)R$, por lo tanto:

$$Q_{CA}=nc_V\Delta T=nc_V(T_A-T_C)=nc_V(\frac{p_AV_A}{nR}-\frac{p_CV_C}{nR})$$

$$Q_{CA}=n\frac{3}{2}R(\frac{p_AV_A}{nR}-\frac{p_CV_C}{nR})=\frac{3}{2}V_A(p_A-p_C)$$

$$Q_{CA}=\frac{3}{2}(10\text{x}10^{-3}\text{m}^3)(5-1)(1{,}01x10^5\text{Pa})=+6{,}06\text{x}10^3\text{J}$$

El calor total absorbido es:

$$Q_{abs}=Q_{AB}+Q_{CA}=8{,}13x10^3\text{J}+6{,}06\text{x}10^3\text{J}=14{,}2\text{x}10^3\text{J}$$

c) La eficiencia del ciclo es:

$$e=\frac{W}{Q_{abs}}=\frac{4{,}09x10^3\text{J}}{14{,}2\text{x}10^3\text{J}}=0{,}288 \quad \text{o} \quad 28{,}8\%$$

Respuesta:

a) $W=+4{,}09x10^3\text{J}$
b) $Q_{abs}=14{,}2x10^3\text{J}$
c) $e=28{,}8\%$

PR-5.03. *Aprovechando el calor del tubo de escape*

Un inventor pretende patentar una máquina térmica que pueda acoplarse al tubo de escape de un automóvil. La máquina podría operar de forma tal que tome el calor del tubo de escape, a una temperatura de 127 °C y su salida estaría a la temperatura del aire circundante (27 °C)

a) ¿Cuál sería la máxima eficiencia de esta máquina?
b) Si el sistema de escape del automóvil bota calor a una tasa de $2\text{x}10^5$ J/s, ¿cuál sería la máxima potencia teórica de la máquina?

Solución. a) La eficiencia de esta máquina térmica no podría exceder el valor límite de una máquina que opere mediante el ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas T_F y T_C:

$$e_{max}=1-|\frac{T_F}{T_C}|=1-|\frac{300K}{400K}|=0{,}25$$

b) La eficiencia mide la relación entre la potencia mecánica (energía por unidad de tiempo) obtenida, W/t, y la potencia calorífica que se le suministra a la máquina Q_C/t:

$$e = \frac{W/t}{Q_C/t}$$

Por lo tanto, la máxima potencia teórica de la máquina es:

$$P_{max} = (W/t)_{max} = e_{max}\left(\frac{Q}{t}\right) = (0{,}25)(2x10^5 W) = 5x10^4 W$$

Respuesta:

a) $e_{max} = 0{,}25$

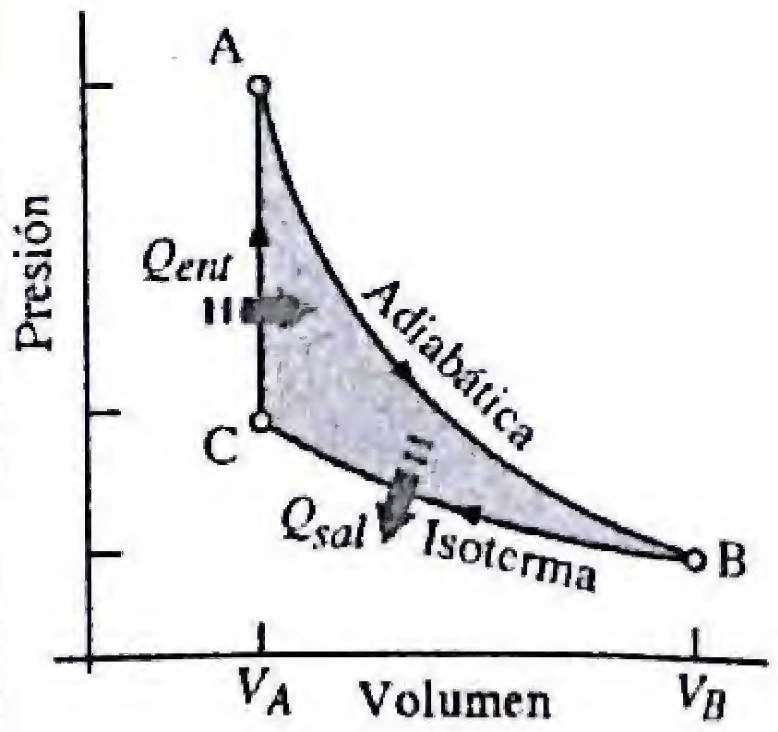
b) $P_{max} = 5x10^4 W$

PR-5.04. *Eficiencia en un ciclo de tres etapas II*

Determine la eficiencia de una máquina térmica que usa un gas ideal monoatómico de constante adiabática γ como sustancia de trabajo y opera mediante el ciclo mostrado:

A→B: Proceso adiabático
B→C: Proceso isotérmico
C→A: Proceso isocórico

Expree su resultado en términos de la relación entre los volúmenes, máximo y mínimo: V_B/V_A.



Solución. En la adiabática no hay intercambio de calor:

$$Q_{AB} = 0$$

En la isotérmica, no hay variación de energía interna, $\Delta U_{BC} = 0$, y de acuerdo a la primera ley:

$$Q_{BC} = W_{BC} = nRT_C \ln\frac{V_C}{V_B} = nRT_C \ln\frac{V_A}{V_B} < 0$$

Como $V_A < V_B$, entonces Q_{BC} es negativo y $Q_{BC} = Q_{sal}$.

En la isocórica: $Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) > 0$

Como $T_A > T_C$ entonces Q_{CA} es positivo y $Q_{CA} = Q_{ent}$.
Además, para los puntos en la adiabática, se cumple:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{|Q_{ent}| - |Q_{sal}|}{|Q_{ent}|} = 1 - \frac{|Q_{sal}|}{|Q_{ent}|} = 1 - \frac{nRT_C \ln(V_B/V_A)}{nc_V(T_A - T_C)}$$

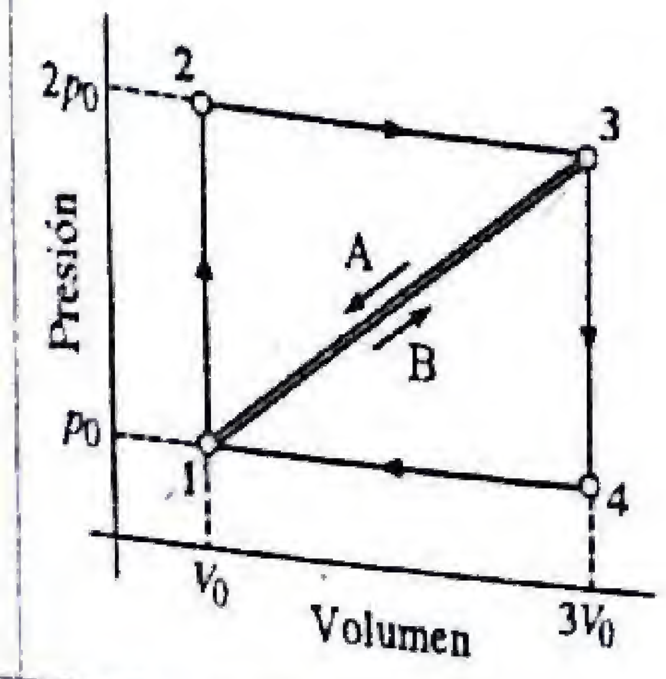
$$e = 1 - \frac{nRT_C \ln(V_B/V_A)}{nc_V T_C((V_B/V_A)^{\gamma-1} - 1)} = 1 - \frac{R\ln(V_B/V_A)}{c_V((V_B/V_A)^{\gamma-1} - 1)}$$

Respuesta:

$$e = 1 - \frac{R\ln(V_B/V_A)}{c_V((V_B/V_A)^{\gamma-1} - 1)}$$

PR-5.05. *¿Cuál de estos dos ciclos es más eficiente?*

Un mol de un gas ideal monoatómico es sometido a los dos procesos cíclicos triangulares A(1→2→3→1) y B(1→3→4→1), mostrados en la figura. Determine la eficiencia de cada ciclo. ¿Cuál de estos dos ciclos tiene mayor eficiencia?



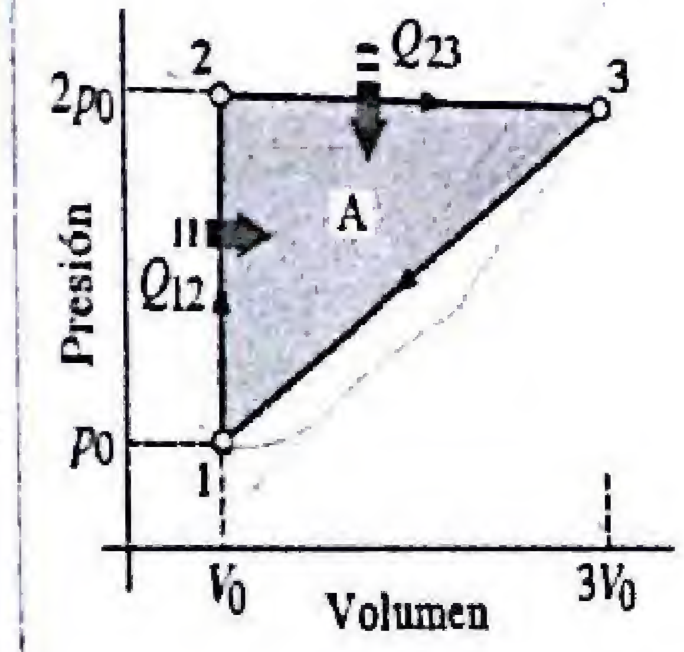
Solución: Si T_1 es la temperatura del estado inicial, aplicando la ecuación de estado (con $n = 1$), calculamos las temperaturas en los estados 2, 3 y 4.

$$T_1 = \frac{p_0 V_0}{R}, \qquad T_2 = \frac{(2p_0)V_0}{R} = 2T_1$$

$$T_3 = \frac{(2p_0)(3V_0)}{R} = 6T_1, \qquad T_4 = \frac{p_0(3V_0)}{R} = 3T_1$$

<u>Ciclo A (1→2→3→1)</u>: Para la isócora 1→2 la temperatura aumenta, $T_2 = 2T_1$ y el sistema recibe calor:

$$Q_{12} = c_V(T_2 - T_1) = c_V\frac{p_0V_0}{R}$$



Para la isóbara 2→3, se tiene, $T_3 = 6T_1$ y el sistema recibe calor:

$$Q_{23} = c_P(T_3 - T_2) = 4c_P\frac{p_0V_0}{R}$$

Como el gas es monoatómico: $c_V = 3R/2$ y $c_P = 5R/2$.
La cantidad de calor total recibida del foco caliente en el ciclo A es:

$$Q_A = Q_{12} + Q_{23} = (c_V + 4c_P)\frac{p_0V_0}{R} = \frac{23}{2}p_0V_0$$

El trabajo en este ciclo es el área del triángulo:

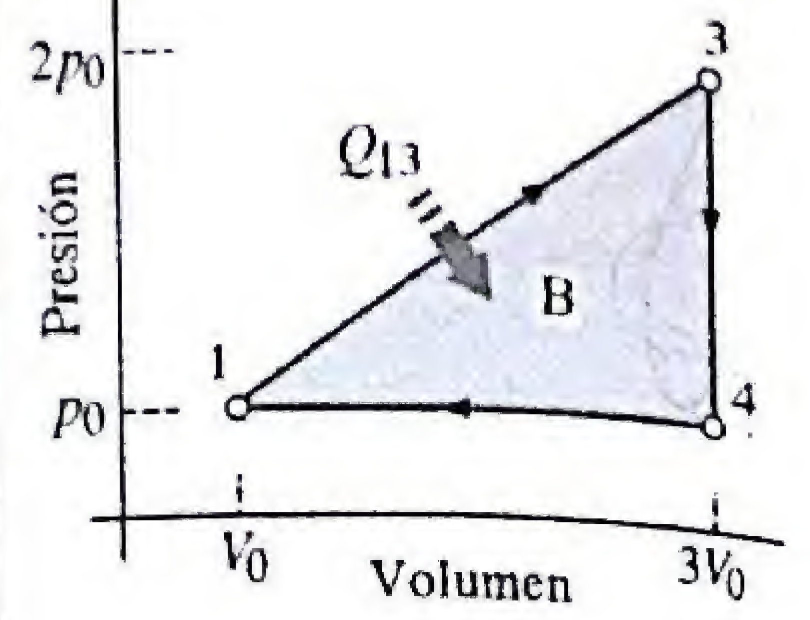
$$W_A = \frac{\text{basexAltura}}{2} = \frac{(2V_0)(p_0)}{2} = p_0V_0$$

La eficiencia del ciclo es la razón del trabajo realizado al calor recibido:

$$e_A = \frac{W_A}{Q_A} = \frac{p_0V_0}{23p_0V_0/2} = \frac{2}{23}$$

$T_3 = 4T_1$; $T_4 = 6T_1$

Ciclo B (1→3→4→1): El gas se calienta solo en la recta diagonal 1→3. Tomando en cuenta que: $\Delta U_{13} = -\Delta U_{31}$ y $W_{13} = -W_{31}$, tenemos $Q_{13} = -Q_{31}$. Usando el resultado obtenido para todo el ciclo A:



$$\Delta U_A = 0 = Q_A - W_A = (Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}) - W_A$$

$$Q_{31} = W_A - (Q_{12} + Q_{23}) = p_0V_0 - 23p_0V_0/2 = -21p_0V_0/2$$

$$Q_B = Q_{13} = -Q_{31} = +21p_0V_0/2$$

El trabajo en este ciclo es el área del triángulo:

$$W_B = \frac{(2V_0)(p_0)}{2} = p_0V_0$$

Por lo tanto, la eficiencia del ciclo es:

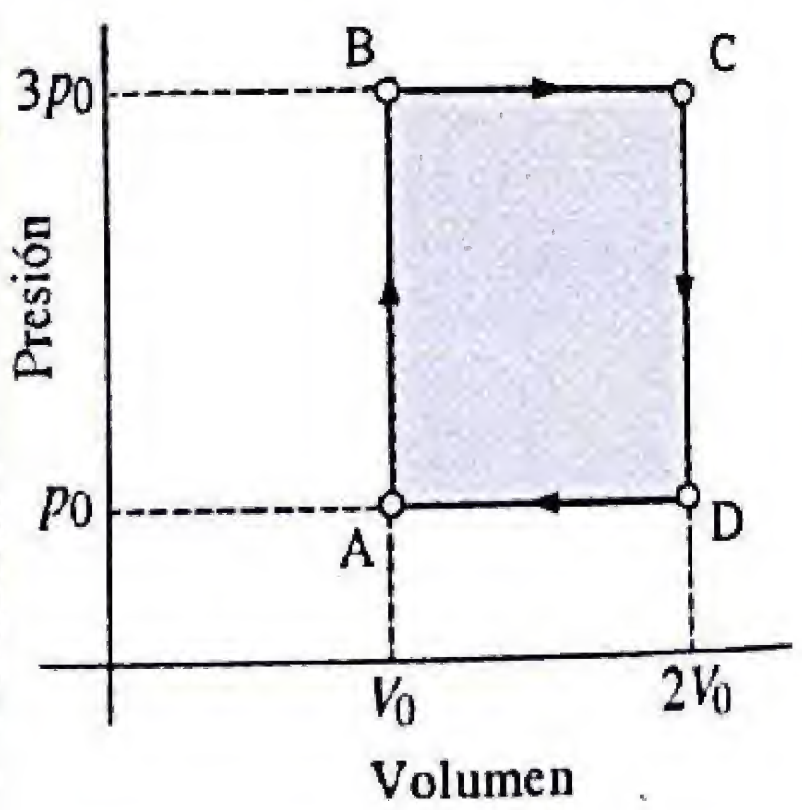
$$e_B = \frac{W_B}{Q_B} = \frac{p_0V_0}{21p_0V_0/2} = \frac{2}{21}$$

Respuesta:

Ciclo A (1231): $e_A = 8{,}70\%$
Ciclo B (1341): $e_B = 9{,}52\%$
El ciclo B es mas eficiente!

PR-5.06. *Eficiencia de un ciclo rectangular*

Un mol de un gas ideal monoatómico es sometido al ciclo reversible mostrado en la figura. Determine:
a) El calor absorbido y el calor liberado en el ciclo.
b) Demuestre que la diferencia entre el calor absorbido y el calor liberado, es justamente el trabajo neto que se realiza en el ciclo.
c) Calcule la eficiencia de una máquina que opere en este ciclo reversible y compare esta eficiencia con la de una máquina de Carnot que trabaje entre las dos mismas temperaturas extremas.



Solución. Las temperaturas respectivas en los cuatro estados A, B, C y D, se obtienen aplicando la ecuación de estado del gas ideal con $n = 1$:

$$T_A = \frac{p_0V_0}{R} = T_0 \qquad T_B = \frac{(3p_0)V_0}{R} = 3T_0$$

$$T_C = \frac{(3p_0)(2V_0)}{R} = 6T_0 \qquad T_D = \frac{(p_0)(2V_0)}{R} = 2T_0$$

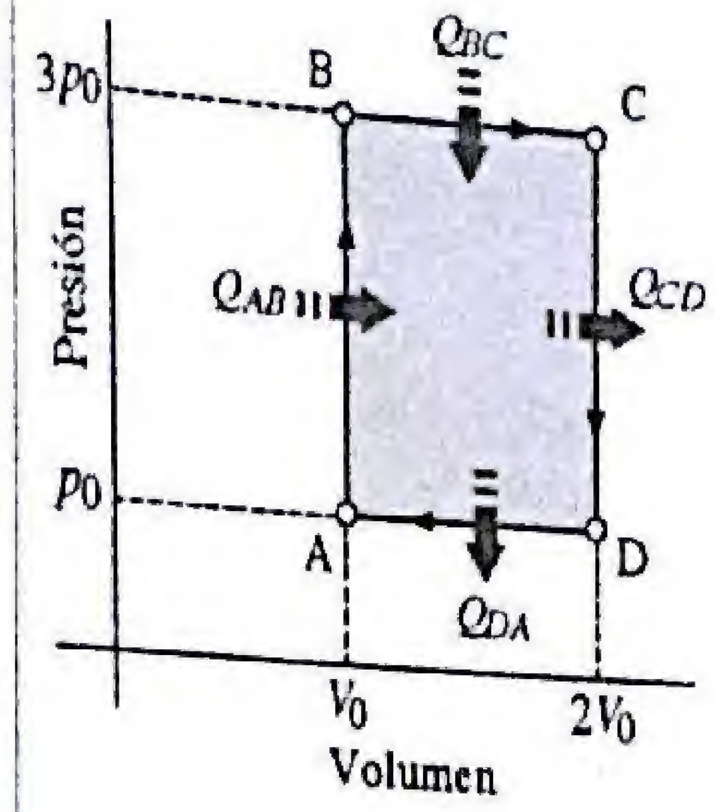
Temperaturas

A	B	C	D
T_0	$3T_0$	$6T_0$	$2T_0$

Como el gas es monoatómico los calores específicos son:

$$c_V = 3R/2 \text{ y } c_P = 5R/2.$$

a) Proceso AB: El proceso es a volumen constante y el calor absorbido es:



$$Q_{AB} = c_V(T_B - T_A) = (\frac{3}{2}R)(3T_0 - T_0) = 3RT_0 = +3p_0V_0$$

Proceso BC: El proceso es a presión constante y el calor absorbido es:

$$Q_{BC} = c_P(T_C - T_B) = \frac{5}{2}R(6T_0 - 3T_0) = \frac{15}{2}RT_0 = +7{,}5\,p_0V_0$$

Proceso CD: El proceso es a volumen constante y el calor cedido es:

$$Q_{CD} = c_V(T_D - T_C) = \frac{3}{2}R(2T_0 - 6T_0) = -6RT_0 = -6\,p_0V_0$$

Proceso DA: El proceso es a presión constante y el calor cedido es:

$$Q_{DA} = c_P(T_A - T_D) = \frac{5}{2}R(T_0 - 2T_0) = -2{,}5RT_0 = -2{,}5\,p_0V_0$$

b) El calor neto absorbido y cedido en el ciclo es, respectivamente:

$$Q_{abs} = |Q_{AB} + Q_{BC}| = 3p_0V_0 + 7{,}5\,p_0V_0 = 10{,}5\,p_0V_0$$

$$Q_{ced} = |Q_{CD} + Q_{DA}| = |-6p_0V_0 - 2{,}5\,p_0V_0| = 8{,}5\,p_0V_0$$

El calor neto es:

$$Q_{neto} = Q_{abs} - Q_{ced} = 10{,}5\,p_0V_0 - 8{,}5\,p_0V_0 = 2p_0V_0$$

Por otra parte, el trabajo neto en el ciclo es el área encerrada por el rectángulo:

$$W = (3p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

$$W = Q_{neto} = 2p_0V_0$$

Lo cual está de acuerdo con la primera ley de la termodinámica, ya que $\Delta U = 0$ para el ciclo.

c) Finalmente la eficiencia del ciclo es:

$$e_{ciclo} = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{2p_0V_0}{10{,}5p_0V_0} = 0{,}190$$

Esto es mucho menor que la máxima eficiencia teórica:

$$e_{carnot} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{T_0}{6T_0} = 0{,}833$$

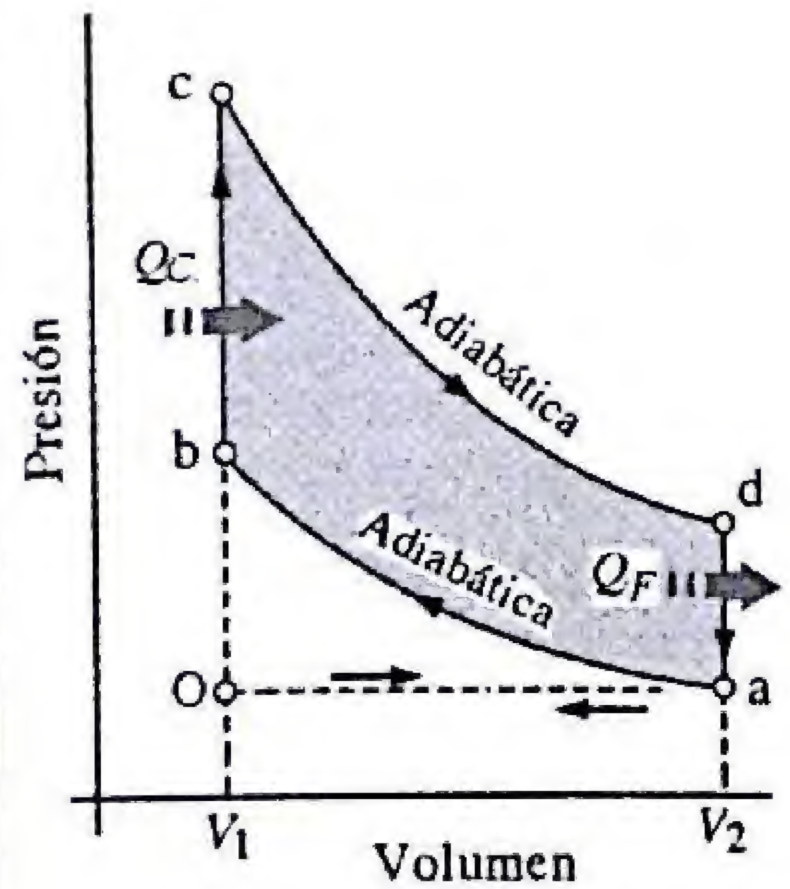
Respuesta:

a) $Q_{abs} = 10{,}5p_0V_0$
$Q_{ced} = 8{,}5p_0V_0$
b) $Q_{neto} = 2p_0V_0 = W$
c) $e_{ciclo} = 0{,}190$

PR-5.07. *El motor de gasolina: Ciclo de Otto*

El motor de gasolina común usado en los vehículos, funciona mediante procesos termodinámicos que pueden aproximarse por el ciclo de Otto. El ciclo consiste de cinco pasos y tiene dos adiabáticas y dos isócoras:

O→a: Se admite aire al cilindro a la presión atmosférica.
a→b: Se comprime la mezcla de aire y combustible.
b→c: La combustión ocurre y se añade calor Q_C al gas.
c→d: El gas se expande y realiza trabajo.
d→a: Se extrae calor Q_F y el gas se enfría.
a→O: Carrera de escape, los gases residuales se expulsan.



Suponiendo que la mezcla es un gas ideal, demuestre que la eficiencia de este ciclo idealizado es independiente de las temperaturas entre las cuales trabaja y mas bien solo depende de la constante del gas, $\gamma = c_P / c_V$, y de la relación de compresión $r = V_2 / V_1$.

Solución. En la isócora $d \to a$ se libera calor:

$$Q_F = \Delta U_{da} = nc_V(T_a - T_d) < 0$$

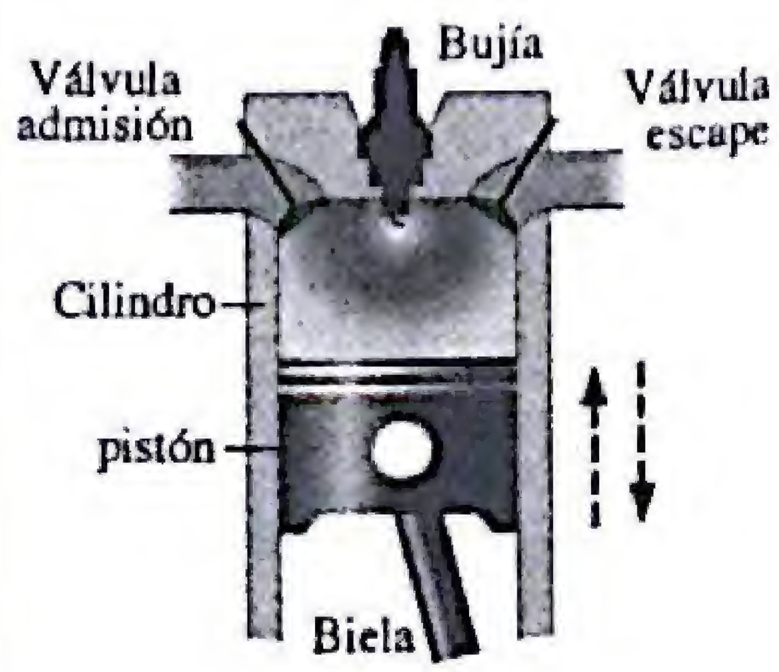
En la isócora $b \to c$ se absorbe calor:

$$Q_C = \Delta U_{bc} = nc_V(T_c - T_b) > 0$$

En términos de las temperaturas, la eficiencia es:

$$e = \frac{W}{Q_C} = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{nc_V(T_d - T_a)}{nc_V(T_c - T_b)}$$

$$e = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b} = \frac{T_c - T_b + T_a - T_d}{T_c - T_b}$$



Usando las relaciones de procesos adiabáticos, se tiene:

$$T_aV_a^{\gamma-1} = T_bV_b^{\gamma-1} \qquad T_cV_c^{\gamma-1} = T_dV_d^{\gamma-1}$$

$$e = \frac{T_d(V_d/V_c)^{\gamma-1} - T_a(V_a/V_b)^{\gamma-1} + T_a - T_d}{T_d(V_d/V_c)^{\gamma-1} - T_a(V_a/V_b)^{\gamma-1}}$$

$$e = \frac{T_d((V_d/V_c)^{\gamma-1} - 1) - T_a((V_a/V_b)^{\gamma-1} - 1)}{T_d(V_d/V_c)^{\gamma-1} - T_a(V_a/V_b)^{\gamma-1}}$$

Como: $V_a/V_b = V_d/V_c = V_2/V_1$, encontramos:

$$e = \frac{(T_d - T_a)((V_2/V_1)^{\gamma-1} - 1)}{(T_d - T_a)(V_2/V_1)^{\gamma-1}}$$

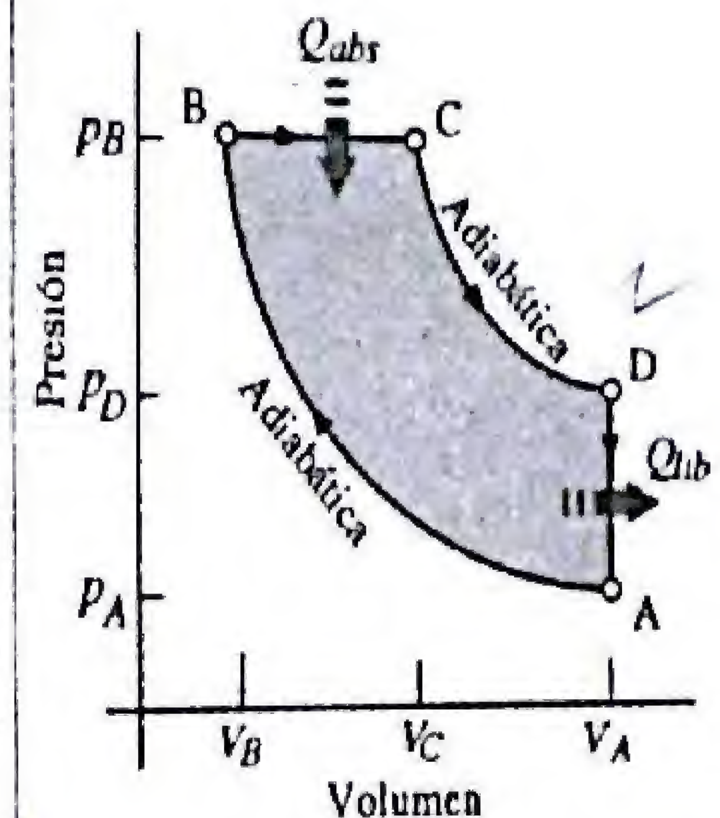
$$e = 1 - \frac{1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = 1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}$$

Respuesta:

$$e = 1 - \frac{1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = 1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}$$

• PR-5.08. *La máquina de ciclo diesel*

Una máquina Diesel ideal opera según el ciclo mostrado en la figura. En el punto A se admite aire (no representado) y se comprime adiabáticamente (A→B). El combustible diesel es rociado hacia el cilindro en el punto B de máxima compresión. La combustión es lenta y durante la primera parte de la carrera de potencia, el gas se expande a presión constante (B→C). El resto de la carrera de potencia (C→D) es adiabática y finalmente la trayectoria D→A corresponde a la carrera de escape.
Determine la eficiencia de este ciclo en términos de las relaciones volumétricas de compresión: $r_C = (V_A/V_B)$ y de expansión: $r_E = (V_A/V_C)$



Solución. Los calores intercambiados en cada etapa son:

$$Q_{AB} = Q_{CD} = 0 \quad \text{(por ser procesos adiabáticos)}$$

$$Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) > 0 \qquad \text{ya que } T_C > T_B$$

$$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) < 0 \qquad \text{ya que } T_A < T_D$$

Por lo tanto, los calores absorbido y liberado son, respectivamente:

$$Q_{abs} = nc_P(T_C - T_B) \qquad Q_{liber} = nc_V(T_A - T_D)$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{|Q_{abs}| - |Q_{lib}|}{|Q_{abs}|} = 1 - \frac{|Q_{lib}|}{|Q_{abs}|} = 1 - \frac{n c_V (T_D - T_A)}{n c_P (T_C - T_B)}$$

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right) = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D / T_A - 1}{T_C / T_B - 1}\right)\frac{T_A}{T_B} \qquad \text{(i)}$$

En esta expresión podemos sustituir las relaciones entre temperaturas en términos de relaciones entre volúmenes. El proceso (A→B) es adiabático, por lo tanto:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} \qquad \text{(ii)}$$

Para el proceso isobárico (B→C), aplicando la ecuación de estado:

$$\frac{p_C V_C}{T_C} = \frac{p_B V_B}{T_B} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_C}{T_B} = \frac{V_C}{V_B} \qquad \text{(iii)}$$

Para el proceso isocórico (D→A), y tomando en cuenta que $V_A = V_D$, se tiene: $T_D / T_A = p_D / p_A$. Aplicando las ecuaciones de las adiabáticas C→D y B→A y tomando en cuenta que $p_B = p_C$ se tiene:

$$\frac{T_D}{T_A} = \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C (V_C / V_D)^{\gamma}}{p_B (V_B / V_A)^{\gamma}} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma} \qquad \text{(iv)}$$

Relación de compresión: $r_C = \dfrac{V_A}{V_B}$

Relación de expansión: $r_E = \dfrac{V_A}{V_C}$

Reemplazando en (i) las relaciones (ii), (iii) y (iv), resulta:

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma} - 1}{\left(\frac{V_C}{V_B}\right) - 1}\right]\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma}}{\left(\frac{V_C}{V_A}\right) - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)}\right]$$

Siendo las relaciones volumétricas respectivas de compresión: $r_C = (V_A/V_B)$ y de expansión: $r_E = (V_A/V_C)$.

Respuesta:

$$\boxed{e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{(r_E)^{-\gamma} - (r_C)^{-\gamma}}{(r_E)^{-1} - (r_C)^{-1}}\right)}$$

• **PR-5.09.** ***Entropía en expansión isotérmica reversible***

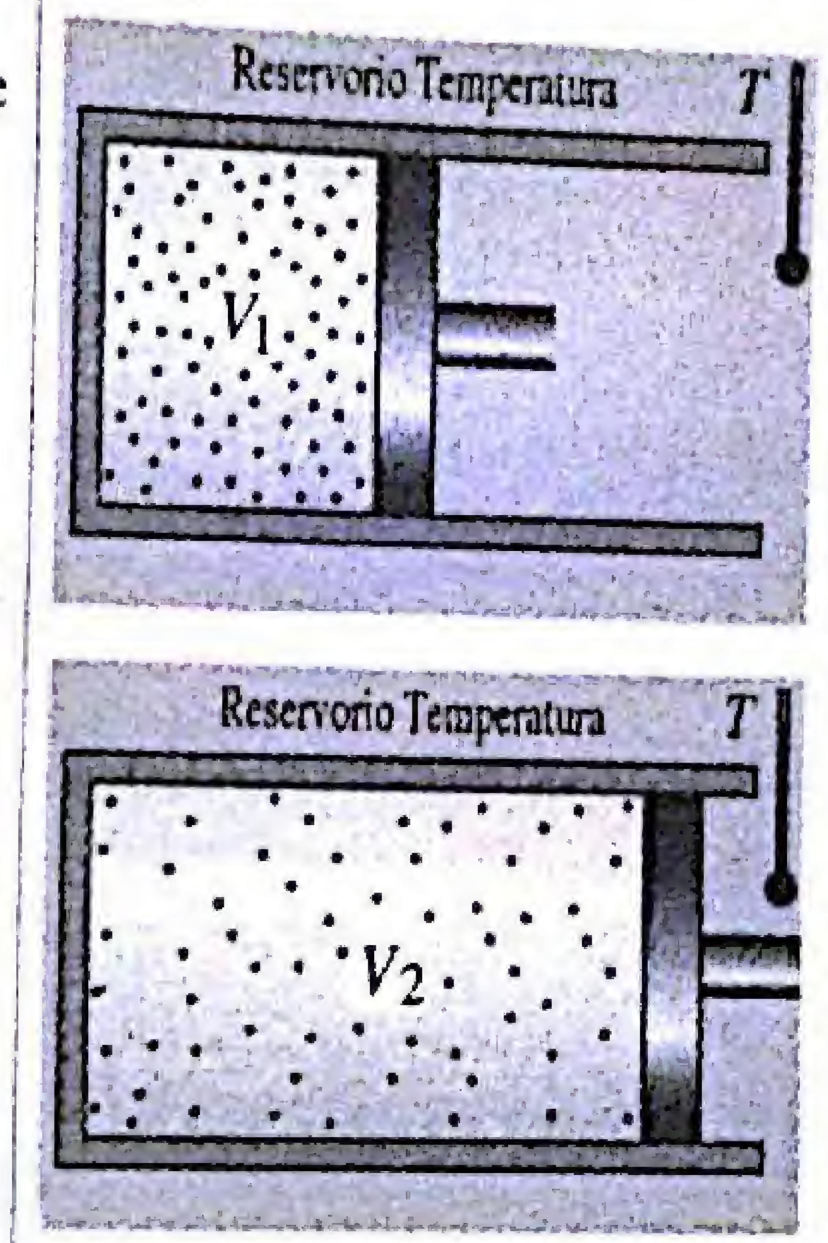
Considere una expansión isotérmica reversible de un gas ideal a una temperatura T, desde un estado inicial de volumen V_1 hasta un volumen final V_2.

a) Determine la variación de entropía del gas.

b) Determine la variación del universo, es decir, del sistema más su entorno.

Solución: El gas realiza un trabajo W y absorbe una cantidad de calor Q del reservorio a temperatura T. Como $\Delta U = 0$, el calor absorbido por el gas ideal es igual al trabajo. Aplicando la ecuación de estado ($pV = nRT$), se obtiene:

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$



Expansión isotérmica reversible

La temperatura es constante y la variación de entropía del gas es:

$$\Delta S_{gas} = \frac{Q}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Esta variación de entropía es positiva porque $V_2 > V_1$.

b) Como la cantidad de calor que abandona el reservorio es la misma que absorbe el gas, su entropía disminuye en la misma cantidad que el gas:

$$\Delta S_{res} = \frac{-Q}{T} = -nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Por lo tanto, la variación de entropía neta del universo es cero:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{res} = 0$$

Esto ilustra un resultado general: *En un proceso reversible la variación de entropía del universo es nula.* Por universo entendemos el sistema gas más su entorno.

Respuesta:

a) $\Delta S_{gas} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

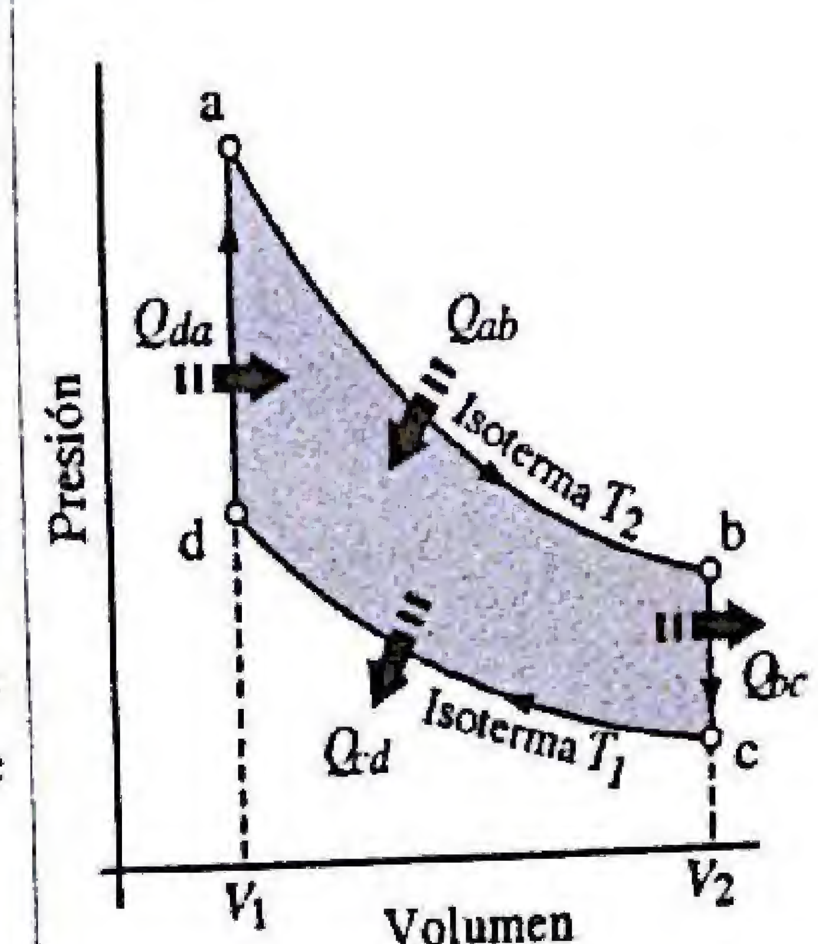
b) $\Delta S_{uni} = 0$

• **PR-5.10.** ***Máquina de ciclo Stirling***

La máquina de stirling opera en un ciclo comprendido entre dos isócoras, V_1 y V_2 y dos isotermas T_1 y $T_2 > T_1$.

a) Determine la eficiencia de la máquina de Stirling.

b) Suponga que un mol de un gas ideal monoatómico es sometido al ciclo de Stirling con las isotermas a temperaturas $T_1 = T_0$ y $T_2 = 3T_0$ y las isócoras a volúmenes $V_1 = V_0$ y $V_2 = 3V_0$, respectivamente. Compare la eficiencia de esta máquina con la de una máquina de Carnot que opere entre las mismas temperaturas T_0 y $3T_0$.



Solución. Aplicando la primera ley de la termodinámica en cada etapa, resultan los calores respectivos:

Isoterma T_2 (a→b): $\Delta U_{ab} = 0$

$$Q_{ab} = W_{ab} = nRT_2 \ln(\frac{V_2}{V_1}) > 0 \quad \text{(entra calor)}$$

Isócora V_2 (b→c):

$$Q_{bc} = nc_V(T_c - T_b) = nc_V(T_1 - T_2) < 0 \quad \text{(sale calor)}$$

Isoterma T_1 (c→d): $\Delta U_{cd} = 0$

$$Q_{cd} = W_{cd} = nRT_1 \ln(\frac{V_1}{V_2}) < 0 \quad \text{(sale calor)}$$

Isócora V_1 (d→a):

$$Q_{da} = nc_V(T_a - T_d) = nc_V(T_2 - T_1) > 0 \quad \text{(entra calor)}$$

El calor neto que entra al sistema es:

$$Q_{ent} = |Q_{ab}| + |Q_{da}| = nRT_2 \ln(\frac{V_2}{V_1}) + nc_V(T_2 - T_1)$$

El calor neto de salida del sistema es:

$$Q_{sal} = |Q_{bc}| + |Q_{cd}| = nc_V(T_2 - T_1) + nRT_1 \ln(\frac{V_2}{V_1})$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = \frac{W}{Q_{ent}} = \frac{Q_{ent} - Q_{sal}}{Q_{ent}} = \frac{nR(T_2 - T_1)\ln(V_2/V_1)}{nRT_2 \ln(V_2/V_1) + nc_V(T_2 - T_1)}$$

b) Para el ciclo Stirling:

$$e_s = \frac{R(3T_0 - T_0)\ln(3V_0/V_0)}{R3T_0 \ln(3V_0/V_0) + (3R/2)(3T_0 - T_0)}$$

$$e_s = \frac{2\ln 3}{3\ln 3 + 3} = 34{,}9\%$$

Para el ciclo Carnot, la eficiencia sería casi el doble:

$$e_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_0}{3T_0} = \frac{2}{3} = 66{,}7\%$$

Respuesta:

a)
$$e = \frac{R(T_2 - T_1)\ln(V_2/V_1)}{RT_2 \ln(V_2/V_1) + c_V(T_2 - T_1)}$$

b) Stirling: $e_s = 34{,}9\%$
Carnot: $e_c = 66{,}7\%$

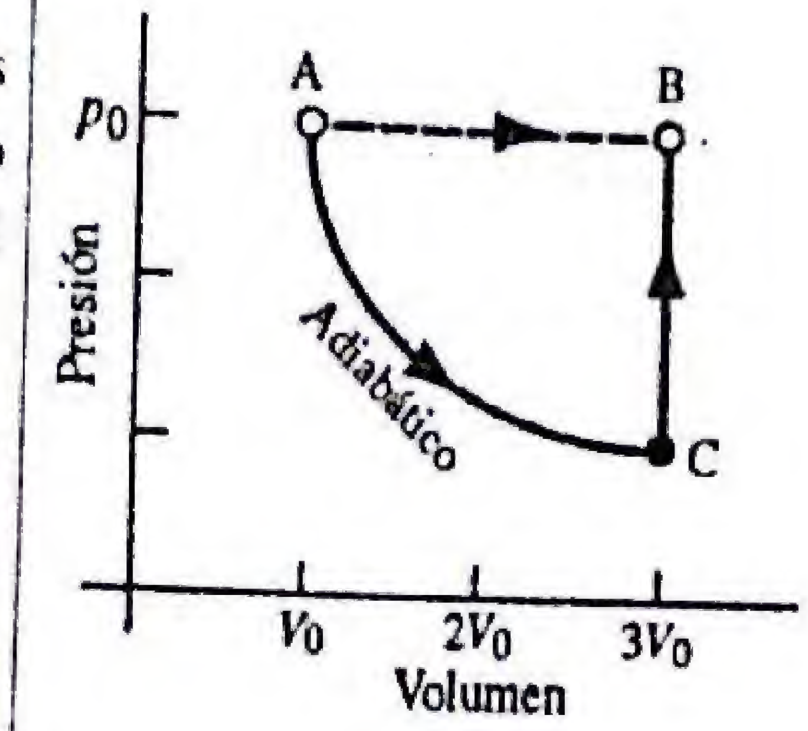
PR-5.11. *El cambio ΔS es independiente del camino !*

Considere un sistema que consiste de n moles de un gas ideal, el cual pasa de un estado A hasta un estado B cuyo volumen es tres veces su volumen inicial. Determine el cambio de entropía en los dos casos siguientes:

a) Un proceso directo (A→B) que es isobárico reversible.

b) El proceso de dos etapas: Una adiabática reversible (A→C) seguida de una isocórica reversible (C→B).

c) Demuestre que el cambio de entropía, ΔS es el mismo por los dos caminos.



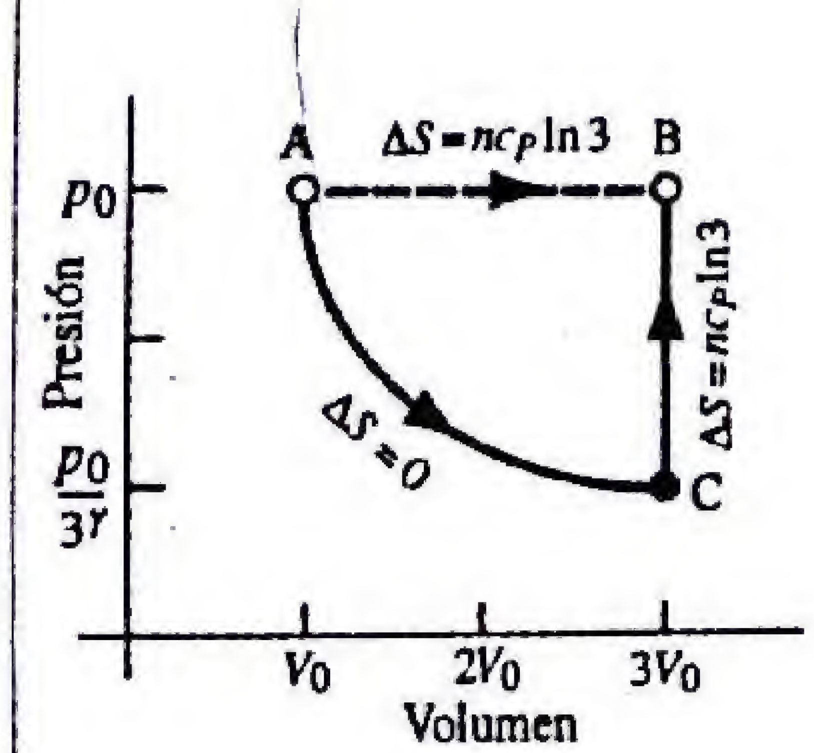
Solución. a) El proceso directo (A→B) es isobárico: Por tratarse de un gas ideal, podemos escribir:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}$$

$$\frac{p_0 V_0}{T_A} = \frac{p_0(3V_0)}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_B = 3T_A$$

Por lo tanto, el cambio de entropía es:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_P dT}{T} = nc_P \ln(\frac{T_B}{T_A}) = nc_P \ln 3$$



b) Para el proceso adiabático (A→C):

$$dQ_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{AC} = 0$$

Por ser un proceso adiabático:

$$p_A V_A^\gamma = p_C V_C^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_0 V_0^\gamma = p_C (3V_0)^\gamma$$

$$p_C = p_0 / 3^\gamma$$

Además, como se trata de un gas ideal:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0 V_0}{T_B/3} = \frac{(p_0/3^\gamma)(3V_0)}{T_C}$$

$$T_C = T_B / 3^\gamma$$

Para el proceso isocórico (C→ B):

$$\Delta S_{CB} = \int_C^B \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_C}^{T_B} \frac{nc_V dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right) = nc_V \ln 3^{\gamma}$$

$$\Delta S_{CB} = n\gamma c_V \ln 3 = n(c_P/c_V)c_V \ln 3 = nc_P \ln 3$$

c) Sumando las entropías en los dos procesos tenemos:

$$\Delta S_{ACB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = 0 + nc_P \ln 3 = nc_P \ln 3$$

Así vemos que:

$$\Delta S_{ACB} = \Delta S_{AB}$$

En general, si elegimos cualquier otro proceso entre A y B, debemos obtener el mismo resultado (ver siguiente problema).

Respuesta:

$\Delta S_{AB} = \Delta S_{ACB} = nc_p \ln 3$
¡ΔS independiente del camino!

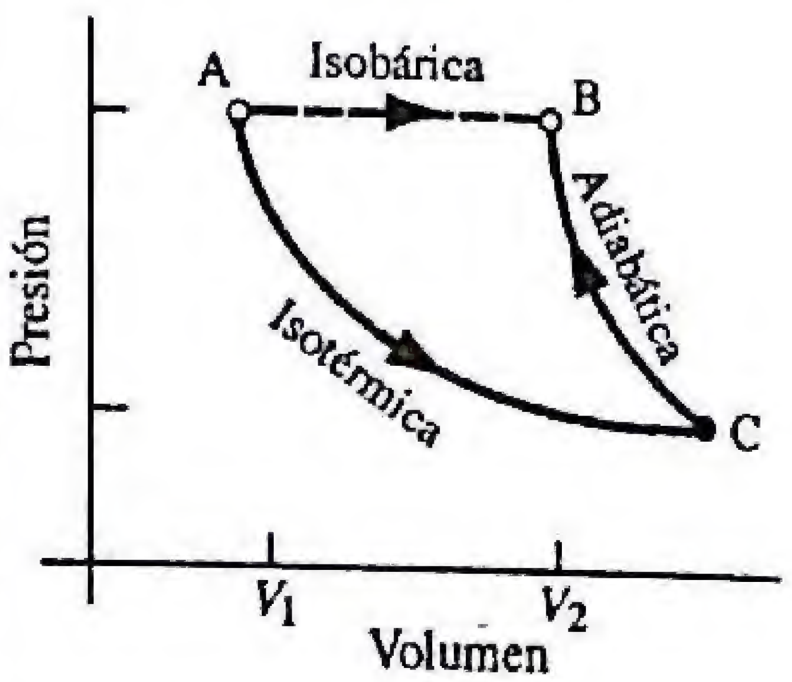
PR-5.12. *El cambio ΔS es independiente del camino II*

Considere un gas ideal que se somete a una expansión desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2. Determine el cambio de entropía en los dos casos siguientes:

a) Un proceso directo (A→B) que es isobárico reversible.

b) El proceso de dos etapas: Una isotérmica reversible (A→C) seguida de una adiabática reversible (C→B).

c) Demuestre que el cambio de entropía, ΔS es el mismo por los dos caminos.



Solución: a) Para el proceso isobárico reversible directo (A→B), el cambio de entropía es:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_P dT}{T} = nc_P \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

Como $P_B = P_A$, por la ecuación de estado del gas ideal:

$$\frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{V_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S_{AB} = nc_P \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

a) Proceso reversible indirecto (A→C→B). Para el proceso AC a temperatura constante, $dU = 0$, por la primera ley: $dQ = dW = pdV$ y el cambio de entropía es:

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C \frac{dQ_r}{T} = \int_A^C \frac{pdV}{T} = nR\int_A^C \frac{dV}{V} = nR\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)$$

Pero los volúmenes V_A, V_B y V_C guardan las siguientes relaciones:

Adiabática CB: $\quad P_C V_C^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} = P_A V_B^{\gamma}$

Isotérmica AC: $\quad P_C V_C = P_A V_A$

Dividiendo estas dos ecuaciones: $\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma}$

Por lo tanto: $\Delta S_{AC} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

Pero: $\quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{c_P/c_V}{c_P/c_V - 1} = \frac{c_P}{c_P - c_V} = \frac{c_P}{R}$

Por lo tanto,

$$\Delta S_{AC} = nc_P \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

En el proceso adiabático $Q_{CB} = 0$ y $\Delta S_{CB} = 0$, por lo tanto:

$$\Delta S_{ACB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = nc_P \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Podríamos generalizar el resultado diciendo que el valor de ΔS es el mismo para "todas" las trayectorias reversibles que conectan los estados inicial y final.

Respuesta:

a) $\Delta S_{AB} = nc_P \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

b) $\Delta S_{ACB} = nc_P \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

ΔS no depende del camino

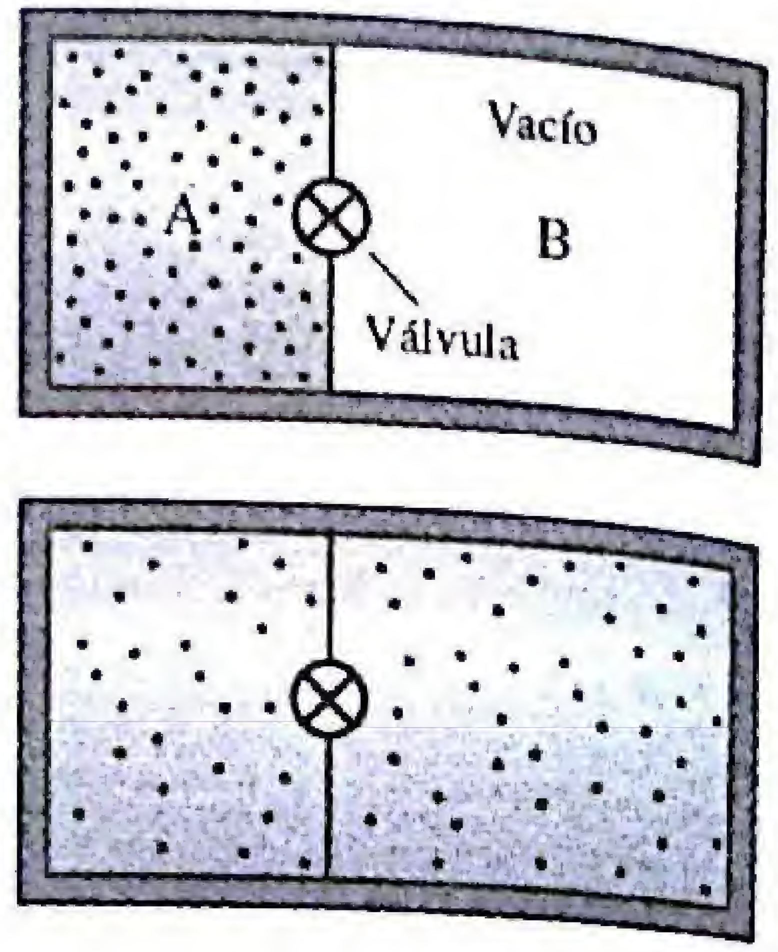
PR-5.13. *Entropía en una expansión libre irreversible*

Un gas ideal está en equilibrio, confinado a un volumen V_A y separado de un compartimiento evacuado de volumen V_B. Al abrir la válvula se inicia una expansión incontrolable, el gas se difunde hasta que alcanza una situación final de equilibrio en que ocupa ambos compartimientos.

a) ¿Cuál es el cambio de entropía del gas?

b) ¿Cuál es el cambio de entropía del universo?

Solución: Cuando se abre la válvula que separa los dos compartimientos, el gas se expansiona rápidamente hacia la cámara vacía. Como las paredes son rígidas no se realiza trabajo ($W = 0$) y como el sistema está térmicamente aislado ($Q = 0$), se deduce entonces que no hay variación de la energía interna ($\Delta U = 0$), y por lo tanto la temperatura T no cambia.



Expansión libre (irreversible)

La expansión libre es un proceso irreversible y los estados intermedios no están bien definidos, por lo tanto, no podemos hallar el cambio de entropía ΔS mediante la integración de dQ/T. Sin embargo, los estados inicial y final son los mismos que para el proceso isotérmico del problema anterior. Como la entropía es una función de estado, para el cálculo de ΔS podemos imaginar un *proceso isotérmico reversible*, en el que el gas desplaza un pistón aumentando su volumen desde el valor inicial V_A hasta el volumen final ($V_A + V_B$).

Como la temperatura es constante, por la primera ley se tiene:

$$dU = 0 = dQ - dW \quad \Rightarrow \quad dQ = dW = pdV$$

$$dS = \frac{dQ_r}{T} = \frac{pdV}{T} = nR\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T} = nR\int_{V_A}^{V_A+V_B} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_A})$$

b) El reservorio de temperatura que hemos agregado para ejecutar el proceso imaginario de expansión isotérmica no es real, de modo que la entropía que éste pierde tampoco es real. La expansión libre es un proceso isotérmico irreversible en el cual no hay intercambio de calor con el entorno ($Q = 0$), por lo tanto $\Delta S_{ent} = 0$. La entropía del universo es:

$$\Delta S_{uni} = \Delta S_{sis} + \Delta S_{ent} = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_A}) > 0$$

Esto es un resultado de validez general: *En un proceso irreversible la entropía del universo aumenta.*

Respuesta:

a) $\Delta S_{sis} = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_A})$

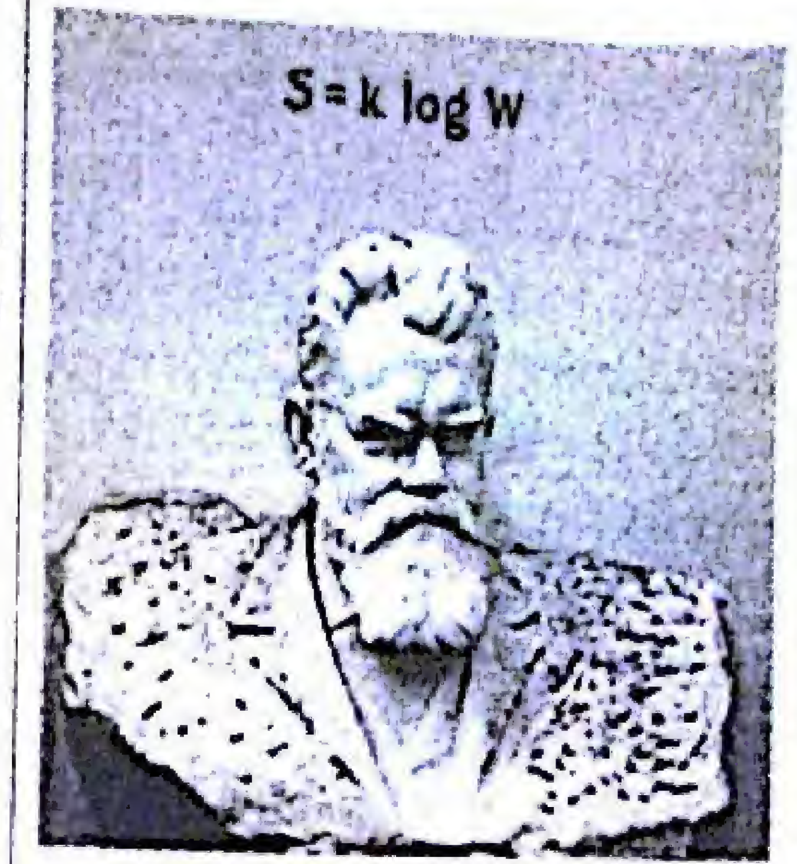
b) $\Delta S_{uni} = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_A}) > 0$

PR- 5.14. *Entropía y probabilidad*

La entropía está relacionada con la probabilidad relativa de diferentes maneras de distribuir las moléculas de un sistema. Esta relación fue propuesta por Boltzmann:

$$S = k\ln W$$

Donde k es la constante de Boltzmann y W es el numero de maneras distintas de ordenar las moléculas que corresponden al mismo estado macroscópico. Aplique esta relación para calcular el cambio de entropía en la expansión libre del gas ideal del problema anterior.



Inscripción en la lápida de Ludwig Boltzmann (1844-1906)

Solución: Usando la expresión de Boltzmann, el cambio de entropía al ir de un estado inicial i hasta un estado final f es:

$$\Delta S = S_f - S_i = k\ln W_f - k\ln W_i = k\ln(\frac{W_f}{W_i})$$

La diferencia de entropía depende de la relación de la probabilidad W_f de encontrar una partícula en el estado inicial y la probabilidad W_i de encontrarla en el estado final. Los microestados de un gas en un volumen V a temperatura T se describen mediante todas las posiciones y velocidades. Si T no cambia, la distribución de velocidades no cambia y basta con considerar las posiciones de las moléculas para comparar la cantidad de microestados. La cantidad de posibles posiciones para cada molécula es proporcional al volumen disponible: $W_f / W_i = V_f / V_i$. Para N moléculas, las probabilidades combinadas resultan:

$$W_f / W_i = (V_f / V_i)^N$$

De modo que el cambio de entropía en la expansión libre de un gas de N moléculas desde el volumen V_A al volumen final ($V_A + V_B$) es:

$$\Delta S_{sis} = k\ln(\frac{V_f}{V_i})^N = Nk\ln(\frac{V_f}{V_i}) = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_B})$$

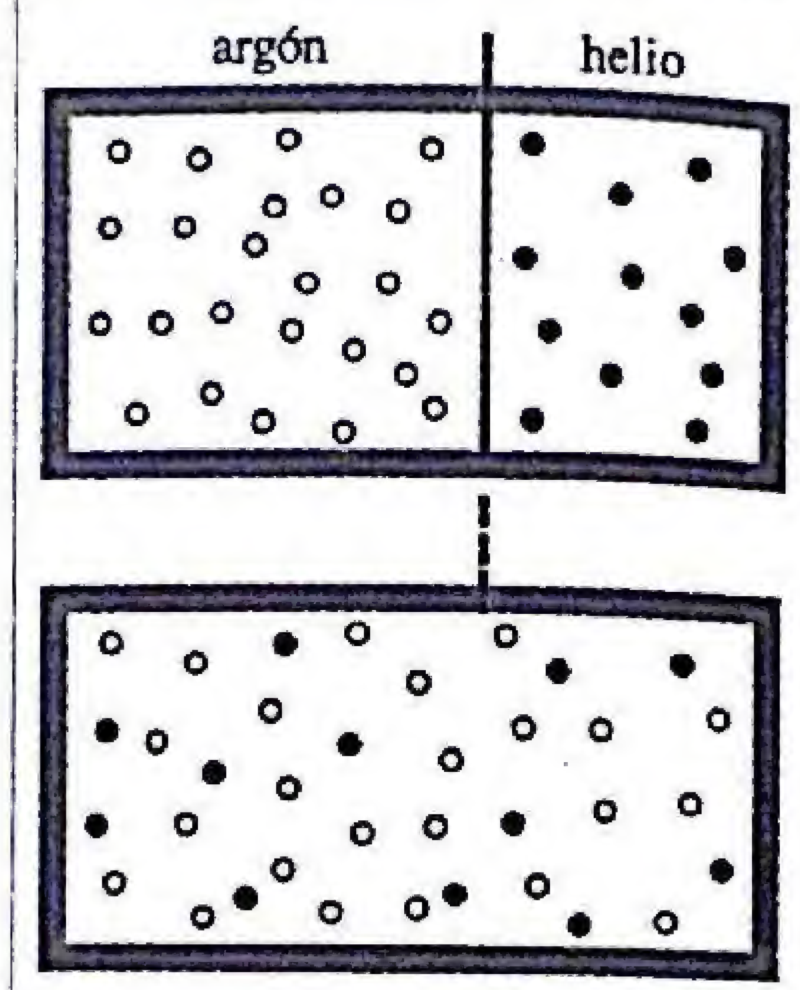
Este es el mismo resultado que habíamos encontrado en el problema anterior.

Respuesta:

$\Delta S_{sis} = nR\ln(\frac{V_A + V_B}{V_A})$

PR-5.15. *La mezcla de gases produce mas desorden*

Un recipiente de volumen $V = 0{,}03\ m^3$ tiene dos compartimientos separados por una pared divisoria. En la parte izquierda de volumen $0{,}02\ m^3$ hay gas argón y en la parte derecha, de volumen $0{,}01\ m^3$ hay gas helio. Ambos compartimientos están a la temperatura ambiente (300 K) y a la presión atmosférica ($1{,}01\times10^5$ Pa).
Si se procede a quitar la división...
a) ¿Cuál será la nueva configuración de equilibrio?
b) ¿Cuál será el cambio de entropía?



Solución: a) El número de moles que hay en cada gas se obtiene de la ecuación de estado del gas ideal: $n = pV/RT$

$$n_{A_r} = \frac{pV_{Ar}}{RT} = \frac{(1{,}01\times10^5\text{Pa})(0{,}02\text{m}^3)}{(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K})} = 0{,}81\text{mol}$$

$$n_{He} = \frac{pV_{H_e}}{RT} = \frac{(1{,}01\times10^5\text{Pa})(0{,}01\text{m}^3)}{(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K})} = 0{,}41\text{mol}$$

Cuando se quita la división, en la nueva configuración de equilibrio, la presión será:

$$p = \frac{(n_{A_r} + n_{He})RT}{V} = \frac{(0{,}81 + 0{,}405)(8{,}31\text{J/mol.K})(300\text{K})}{0{,}03\text{m}^3}$$

$$p = 1{,}01\times10^5\text{Pa}$$

Es decir, tanto la temperatura como la presión total de la mezcla se mantienen igual a las del ambiente. Sólo que disminuye la presión parcial de cada gas al expandirse.

b) Como la temperatura se mantiene constante los cambios de entropía se calculan de la expresión:

$$\Delta S = nc_V \ln(\frac{T_2}{T_1}) + nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) = 0 + nR\ln(\frac{V_2}{V_1})$$

El cambio de entropía respectivo de cada gas es:

$$\Delta S_{Ar} = (0{,}81\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})ln(\frac{0{,}03\text{m}^3}{0{,}02\text{m}^3}) = +2{,}73\text{J/K}$$

$$\Delta S_{He} = (0{,}405\text{mol})(8{,}31\text{J/mol.K})ln(\frac{0{,}03\text{m}^3}{0{,}01\text{m}^3}) = +3{,}70\text{J/K}$$

El cambio total de entropía es:

$$\Delta S = \Delta S_{Ar} + \Delta S_{He}$$

$$\Delta S = 2{,}73\text{J/K} + 3{,}70\text{J/K} = 6{,}43\text{J/K}$$

Vemos que después de quitar la división el desorden aumenta ($\Delta S>0$), la razón es que ahora una molécula puede estar en cualquier lugar de un volumen mayor.

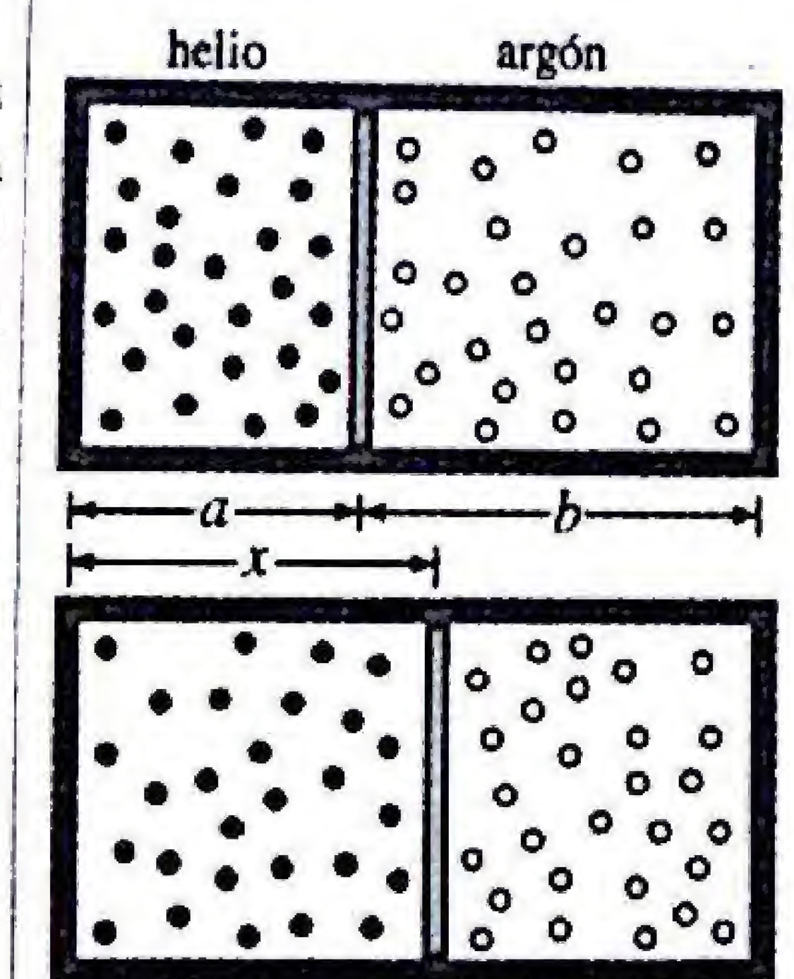
Respuesta:

a) La temperatura y la presión se mantienen igual.
b) $\Delta S = +6{,}43\text{J/K}$

PR-5.16. *¿Dónde quedará el pistón en reposo?*

Un recipiente cilíndrico tiene dos compartimientos separados por un pistón. El recipiente de la izquierda contiene un mol de gas helio a la presión $p_{H_e} = 5$ atm. El compartimiento de la derecha está lleno con gas argón a la presión $p_{A_r} = 1$ atm. Inicialmente el pistón está fijo a una distancia $a = 30$ cm de la pared izquierda y a una distancia $b = 50$ cm de la pared de la derecha. El cilindro está en un baño a la temperatura ambiente. Cuando se libera el pistón, éste alcanza finalmente una nueva posición de equilibrio a la temperatura del ambiente.

a) ¿A qué distancia del extremo izquierdo del cilindro se posiciona de nuevo el pistón?
b) ¿Cuál será el aumento total de entropía del sistema?



Solución: a) La razón de número de moles se obtiene de la ecuación del estado inicial para cada gas ideal: $n = pV/RT$:

$$\frac{n_{H_e}}{n_{A_r}} = \frac{p_{H_e}V_{H_e}}{p_{A_r}V_{A_r}} = \frac{p_{H_e}(aA)}{p_{A_r}(bA)} = \frac{(5\text{Atm})(30\text{cm})}{(1\text{Atm})(50\text{cm})} = 3$$

En el estado final las presiones de los dos gases se igualan, $p'_{H_e} = p'_{A_r} = p_0$. Por lo tanto:

$$\frac{n_{H_e}}{n_{A_r}} = \frac{p_0 V'_{H_e}/RT}{p_0 V'_{A_r}/RT} = \frac{Ax'_{H_e}}{Ax'_{A_r}} = \frac{x'_{H_e}}{x'_{A_r}} = 3$$

Como, $x'_{A_r} + x'_{H_e} = 80\text{cm}$, entonces las longitudes finales son:

$$x'_{H_e} = 60\text{cm} \qquad x'_{A_r} = 20\text{cm}.$$

b) Como la temperatura no cambia, la variación de entropía para cada gas ideal se calcula de la expresión: $\Delta S = nR\ln(V_f / V_i)$. La variación total de entropía es:

$$\Delta S = n_{He} R \ln\frac{V'_{He}}{V_{He}} + n_{Ar} R \ln\frac{V'_{Ar}}{V_{Ar}}$$

$$\Delta S = (1\text{mol})R\ln(\frac{60\text{cm}}{30\text{cm}}) + (\frac{1}{3}\text{mol})R\ln(\frac{20\text{cm}}{50\text{cm}}) = 0{,}388R$$

$$\Delta S = (0{,}388\text{mole})(8{,}314\text{J/mole.K}) = 3{,}22\text{J/K}$$

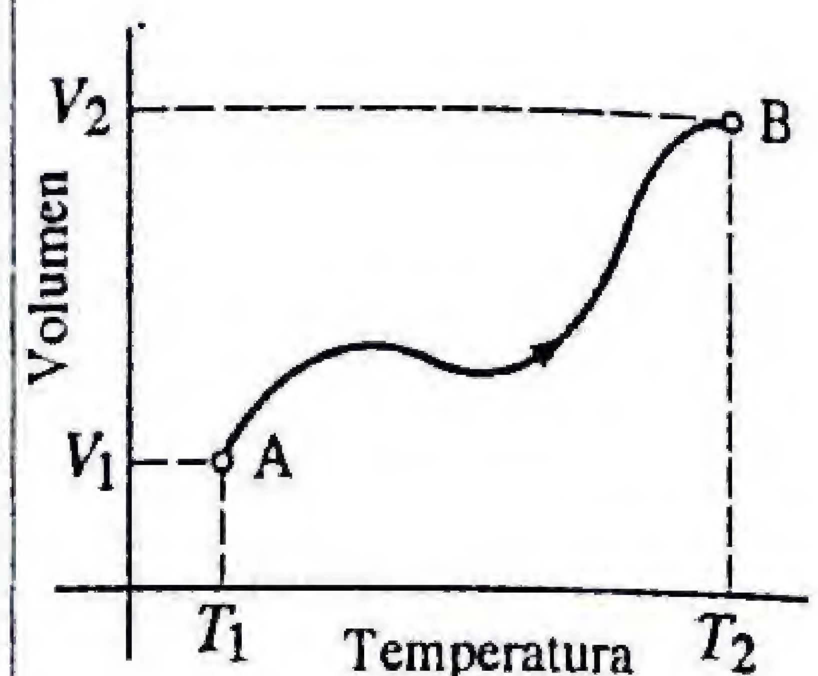
Respuesta:

a) $x = 60$ cm
b) $\Delta S = 3{,}22$ J/K

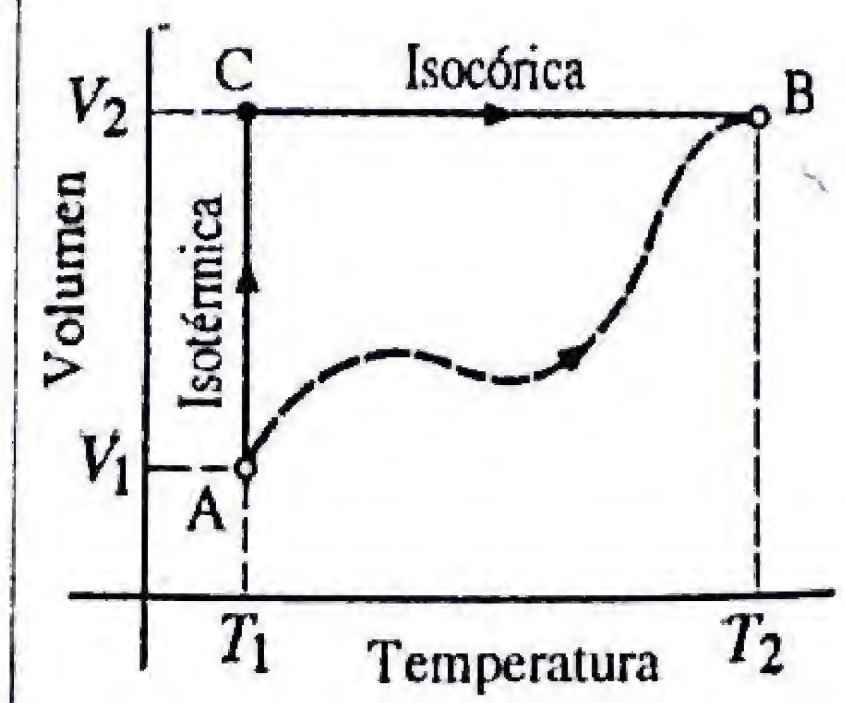
PR- 5.17. *Entropía en proceso reversible de gas ideal*

Un gas ideal está inicialmente en un estado A con volumen V_1 y temperatura T_1 y pasa por una sucesión de estados intermedios de equilibrio hasta alcanzar un estado final B con volumen V_2 y temperatura T_2. Demuestre que el cambio de entropía del gas en cualquier proceso reversible viene dado por la expresión:

$$\Delta S = nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) + nc_V\ln(\frac{T_2}{T_1})$$



Solución: La entropía es una función de estado termodinámico y su variación solo depende de los estados inicial y final, sin importar la trayectoria reversible. Para calcular ΔS_{AB} podemos emplear una combinación de un proceso isotérmico AC, seguido de uno isocórico CB.



En AC la temperatura es constante, $\Delta U = 0$ y por la primera ley de la termodinámica, $Q = W$:

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV$$

$$\Delta S_{AC} = nR\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} dV = nR\ln(\frac{V_2}{V_1})$$

Para la isócora CB, no se realiza trabajo y por la primera ley:

$$dQ = dU = nc_V dT$$

Por lo tanto, el cambio de entropía es:

$$S_{CB} = \int_C^B \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nc_V dT}{T} = nc_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = nc_V \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

Finalmente, el cambio total de entropía es:

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) + nc_V\ln(\frac{T_2}{T_1})$$

Respuesta:

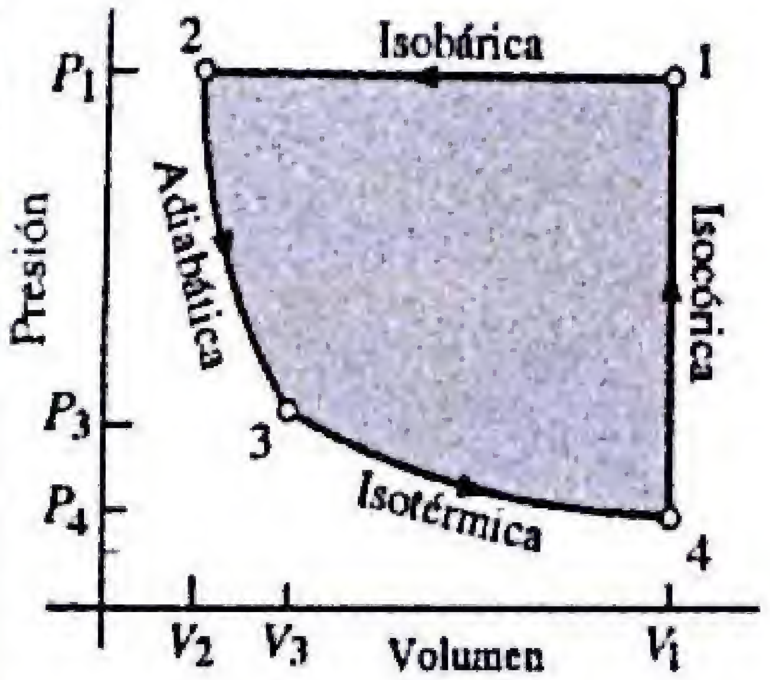
$$\boxed{\Delta S = nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) + nc_V\ln(\frac{T_2}{T_1})}$$

PR-5.18. *En un ciclo reversible la entropía no cambia*

Un gas monoatómico ideal es sometido a cuatro procesos reversibles completando el ciclo mostrado en la figura. Compresión isobárica: 1→2, Expansión adiabática: 2→3, Expansión isotérmica: 3→4, Transform. Isocórica: 4→1.

a) Determine los cambios de entropía para cada etapa en términos de las temperaturas T_1, T_2 y T_3.

b) Verifique que el cambio neto de entropía en este ciclo es cero.



Solución: Compresión isobárica (1→2): Tenemos $P_2 = P_1$. Por la ecuación de estado del gas ideal:

$$\frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Usando la expresión para ΔS obtenida en el problema anterior:

Gas ideal monoatómico

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5R/2}{3R/2} = \frac{5}{3}$$

$$\Delta S_{12} = nR\ln(\frac{T_2}{T_1}) + nc_V\ln(\frac{T_2}{T_1}) = n(R + c_V)\ln(\frac{T_2}{T_1})$$

Como se trata de un gas ideal monoatómico, $c_P = (5/2)R$:

$$\Delta S_{12} = nc_P\ln(\frac{T_2}{T_1}) = \frac{5}{2}nR\ln(\frac{T_2}{T_1})$$

Expansión adiabática (2→3): $Q = 0$ y $\Delta S_{23} = 0$.

Expansión isotérmica (3→4): Aquí $T_3 = T_4$ y $V_4 = V_1$. Si relacionamos los volúmenes con las temperaturas en la adiabática 2→3, ($T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$), tenemos:

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_3} = (\frac{V_1}{V_2})(\frac{V_2}{V_3}) = (\frac{T_1}{T_2})(\frac{T_3}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\frac{T_1}{T_2})(\frac{T_3}{T_2})^{3/2} = \frac{T_1 T_3^{3/2}}{T_2^{5/2}}$$

Aplicando la expresión para ΔS del problema anterior, se obtiene:

$$\Delta S_{34} = nR\ln(\frac{V_4}{V_3}) = nR\ln(\frac{T_1 T_3^{3/2}}{T_2^{5/2}})$$

Expansión isocórica: (4→1): $V_4 = V_1$ y $T_4 = T_3$.

$$\Delta S_{41} = nR\ln(\frac{V_1}{V_4}) + nc_V \ln(\frac{T_1}{T_4}) = 0 + \frac{3}{2}nR\ln(\frac{T_1}{T_3})$$

b) Ciclo completo: Si sumamos los cambios en cada etapa encontramos que el cambio total de entropía es cero:

$$\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41}$$

$$\Delta S_{ciclo} = \frac{5}{2}nR\ln(\frac{T_2}{T_1}) + 0 + nR\ln(\frac{T_1 T_3^{3/2}}{T_2^{5/2}}) + \frac{3}{2}nR\ln(\frac{T_1}{T_3}) = 0$$

Respuesta:

$$\Delta S_{12} = \frac{5}{2}nR\ln(\frac{T_2}{T_1})$$
$$\Delta S_{23} = 0$$
$$\Delta S_{34} = nR\ln(\frac{T_1 T_3^{3/2}}{T_2^{5/2}})$$
$$\Delta S_{41} = \frac{3}{2}nR\ln(\frac{T_1}{T_3})$$
$$\Delta S_{ciclo} = \sum_{jk} \Delta S_{jk} = 0$$

PR-5.19. *Entropía en un ciclo de Carnot*

Considere un ciclo de Carnot.

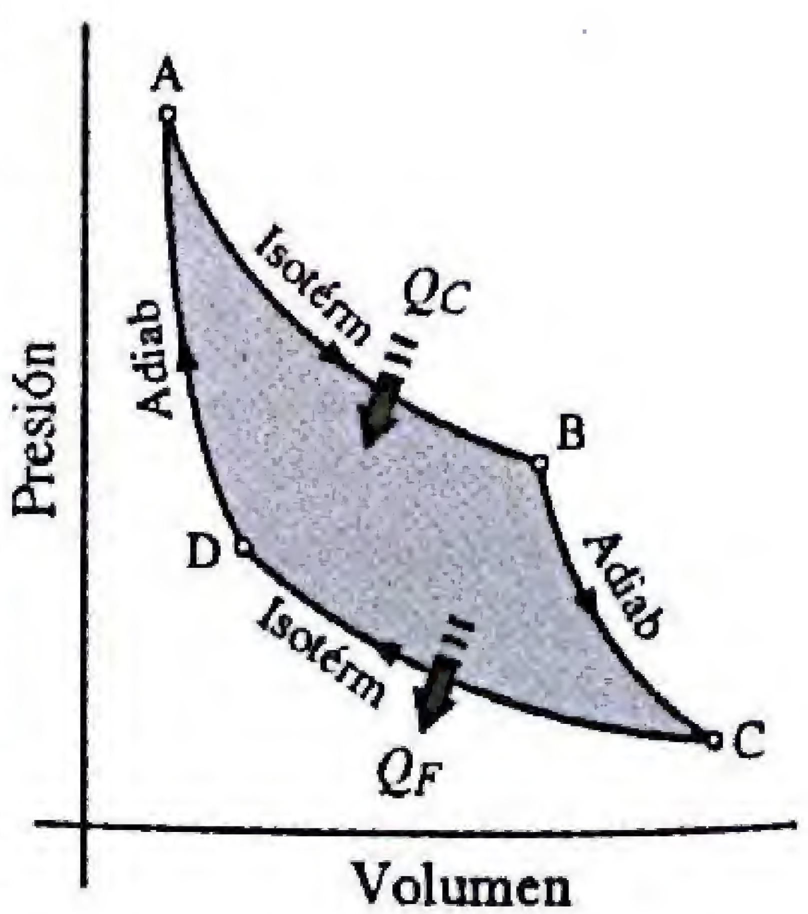
a) ¿Por qué razón el cambio neto de entropía en un ciclo de Carnot debe ser cero ?

b) Realice los cálculos para demostrar que $\Delta S = 0$.

c) Dibuje un diagrama de entropía vs. temperatura.

d) ¿Qué es lo que representa el área bajo la curva S vs. T?

Solución: a) La entropía es una propiedad del estado del sistema. Al completar un ciclo reversible, todas las variables de estado permanecen inalteradas, por lo tanto, la entropía no puede cambiar en ningún proceso cíclico reversible. Esto ya lo hemos verificado para el ciclo reversible del problema anterior.



b) El cambio total de entropía en el ciclo de Carnot es:

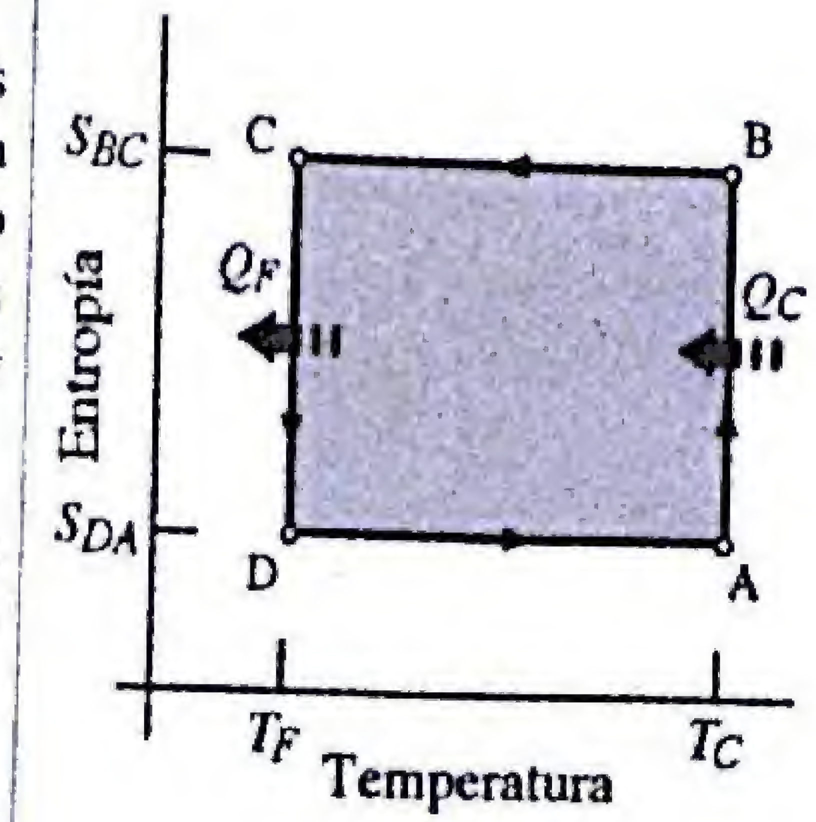
$$\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA}$$

$$\Delta S_{ciclo} = \frac{Q_C}{T_C} + 0 + (-\frac{Q_F}{T_F}) + 0$$

Luego para el ciclo de Carnot se cumple:

$$\frac{Q_C}{T_C} = \frac{Q_F}{T_F} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{ciclo} = 0$$

c) En el gráfico de la entropía S vs temperatura T, las dos líneas verticales AB y CD son las isotermas a temperaturas respectivas: T_C (foco caliente) y T_F (foco frío). Las dos líneas horizontales BC y DA representan las adiabáticas en las cuales no ocurre transferencia de calor y por lo tanto no hay cambio de entropía.



d) El área del rectángulo $(\Delta S)(\Delta T)$ en el diagrama de S vs T, representa el flujo neto de calor y por lo tanto el trabajo hecho, ya que:

$$\int_A^B T dS = Q_C \qquad \int_C^D T dS = Q_F$$

Por lo tanto:

$$\text{Area rectángulo} = (\Delta S)(\Delta T) = Q_C - Q_F = W$$

El trabajo neto resulta igual que en el del gráfico p vs. V

Respuesta:

Area rectángulo: $(\Delta S)(\Delta T) = W$

PR-5.20. *En un ciclo irreversible la entropía sí cambia*

Un mol de un gas ideal monoatómico está en el estado A, en equilibrio con un reservorio a temperatura T_1 y su presión es p_0. Luego es sometido al siguiente proceso:

1) Se traslada a otro reservorio a temperatura $T_2 > T_1$, en forma tal que su presión permanece constante y cuando se establece el equilibrio queda en el estado B.

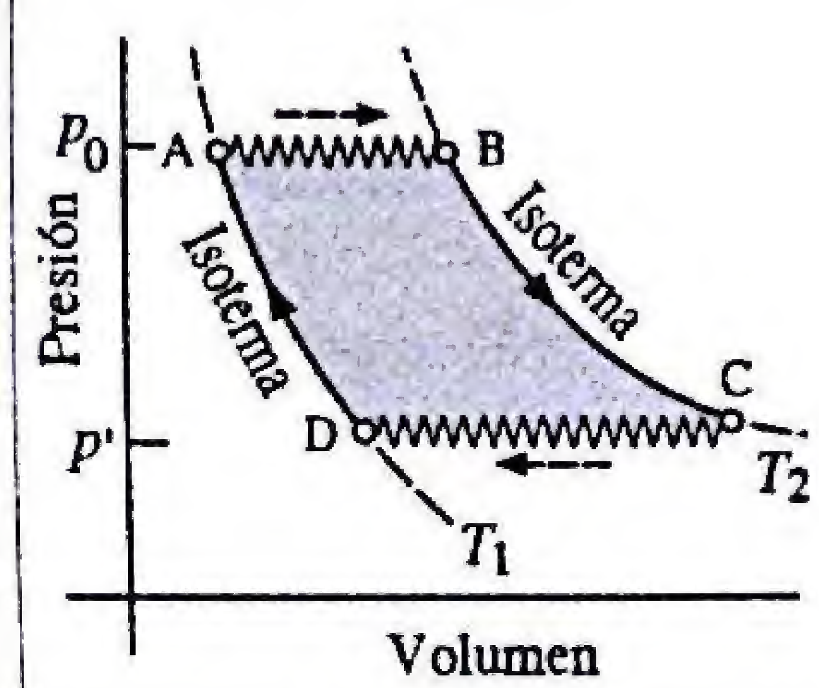
2) Se expande reversiblemente a la temperatura T_2, hasta alcanzar el estado C a una presión p'.

3) Se traslada al reservorio original de forma tal que su presión es constante. Cuando se establece el equilibrio a temperatura T_1 el gas queda en el estado D.

4) Se comprime reversiblemente a la temperatura T_1, hasta regresar al estado inicial A a la presión p_0.

a) Calcule el cambio de entropía en el proceso A→B y demuestre que este proceso no es reversible.

b) Calcule el cambio total de entropía en todo el ciclo.



Solución: a) Para calcular el cambio de entropía en el proceso A→B ideamos un proceso *reversible* a presión constante: Mientras se mantiene un peso encima del pistón, el cilindro inicialmente a la temperatura T_1 se calienta lentamente hasta T_2, poniéndolo sucesivamente en contacto con una serie de reservorios que difieren de manera infinitesimal dT.

Los cambios de entropía son:

$$\Delta S_{AB}(\text{gas}) = \int_A^B \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_P dT}{T} = c_P \ln(\frac{T_2}{T_1}) = \frac{5}{2} R \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\Delta S_{AB}(\text{res}) = \frac{Q_{ced}}{T_2} = \frac{-c_P(T_2 - T_1)}{T_2} = -\frac{5}{2} R(1 - \frac{T_1}{T_2})$$

El cambio de entropía del universo es la suma de estos dos términos:

$$\Delta S_{AB}(\text{uni}) = \Delta S_{AB}(\text{gas}) + \Delta S_{AB}(\text{res}) = \frac{5}{2} R[\frac{T_1}{T_2} - 1 - \ln(\frac{T_1}{T_2})]$$

Ahora bien, para $x < 1$ se cumple la desigualdad:

$$\ln x < (x - 1)$$

Luego si llamamos la variable: $x = (T_1/T_2) < 1$, entonces:

$$x - 1 - \ln x > 0$$

Por lo tanto:

$$\Delta S_{AB}(\text{universo}) > 0 \qquad \text{(el proceso es irreversible)}$$

b) Los procesos isotérmicos B→C y D→A son reversibles y por lo tanto la variación de entropía del universo es cero.

$$\Delta S_{BC}(\text{uni}) = 0, \quad \Delta S_{DA}(\text{uni}) = 0$$

Para el proceso C→D, el cálculo de ΔS es enteramente análogo al del proceso A→B, obteniéndose:

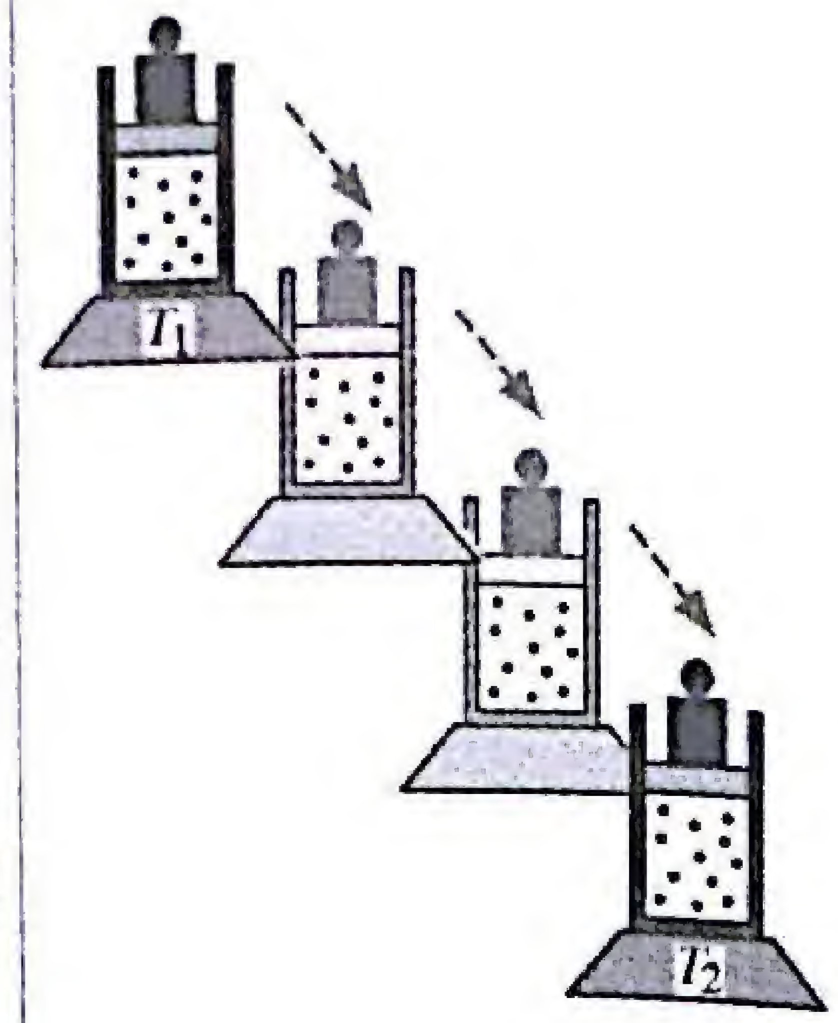
$$\Delta S_{CD}(\text{uni}) = \Delta S_{CD}(\text{gas}) + \Delta S_{CD}(\text{res}) = \frac{5}{2} R[\frac{T_2}{T_1} - 1 - \ln(\frac{T_2}{T_1})]$$

El cambio total de entropía del universo durante el ciclo es:

$$\Delta S_{ciclo}(\text{uni}) = \Delta S_{AB}(\text{uni}) + \Delta S_{CD}(\text{uni}) = \frac{5}{2} R[\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} - 2]$$

$$\Delta S_{ciclo}(\text{uni}) = \frac{5}{2} R[\frac{T_2^2 + T_1^2 - 2T_1T_2}{T_1T_2}] = \frac{5}{2} R[\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1T_2}] > 0$$

Es decir, el cambio de entropía del universo en el ciclo es positivo y podemos concluir que este ciclo es *irreversible*.



Proceso A→B es irreversible

Respuesta:

Las entropías del universo son:

$$\Delta S_{AB} = \frac{5}{2} R[\frac{T_1}{T_2} - 1 - \ln(\frac{T_1}{T_2})] > 0$$

$$\Delta S_{ciclo} = \frac{5}{2} R[\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1T_2}] > 0$$

PR-5.21. *Compresión irreversible de gas por un pistón*

Un gas ideal constituido por n moles se encuentra confinado en un cilindro de paredes adiabáticas provisto de un pistón móvil de masa m_1. Inicialmente el pistón está en equilibrio a una altura h_1 y el gas está a una temperatura T_1. Cuando se coloca una masa m_2 sobre el pistón, éste al comienzo desciende y oscila erráticamente hasta que finalmente se posiciona a una altura desconocida h_2.

Determine:
a) La temperatura final T_2 del gas.
b) La altura final h_2.
c) el cambio de entropía ΔS_{12} del gas en el caso particular en que $n = 1$ mol y $m_2 = 2m_1$.

Solución: a) Inicialmente el pistón está en equilibrio, y la presión del gas es:

$$p_1 = m_1 g/A$$

El volumen original del gas es $V_1 = h_1 A$, siendo A el área del pistón. De acuerdo a la ecuación de estado del gas ideal:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{m_1 g h_1}{nR} \tag{1}$$

Cuando se le coloca la masa m_2, la trayectoria del pistón es complicada y desconocida, sin embargo el trabajo hecho por la gravedad sobre el gas es independiente de esta trayectoria, por tratarse de una fuerza conservativa y lo que importa son las posiciones de equilibrio donde comienza y donde termina el pistón. El trabajo hecho "sobre" el gas es:

$$W = (m_1 + m_2)g(h_1 - h_2)$$

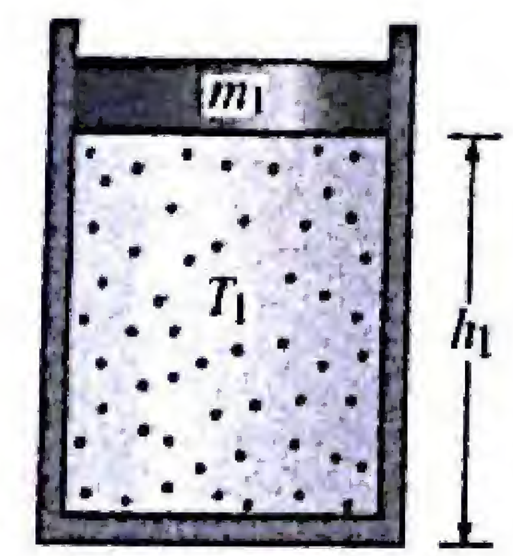
Como las paredes son adiabáticas $Q = 0$ y de acuerdo a la 1ª ley de la termodinámica, la variación de energía interna del gas es igual al trabajo hecho por la gravedad "sobre el gas"

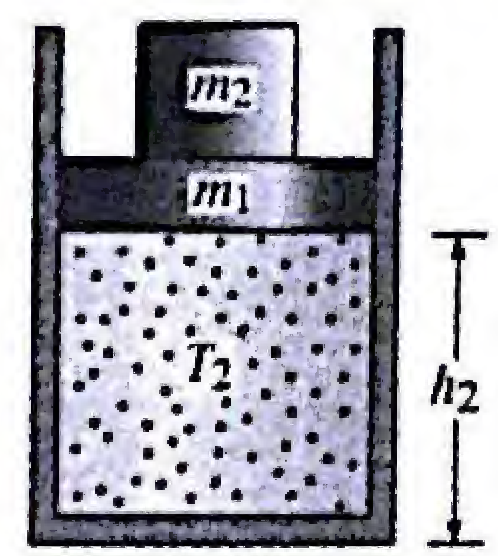
$$(m_1 + m_2)g(h_1 - h_2) = nc_V \Delta T = nc_V(T_2 - T_1)$$

Sustituyendo, $(m_1 + m_2)g = p_2 A$ y $c_V = (3/2)R$, tenemos:

$$p_2 A(h_1 - h_2) = p_2 V_1 - p_2 V_2 = (3/2)nR(T_2 - T_1)$$

Usando la ecuación de estado: $P_2 V_2 = nRT_2$, la ecuación anterior queda:





$$p_2V_1 = (5/2)nRT_2 - (3/2)nRT_1$$

Despejando T_2 y sustituyendo T_1 de la ecuación (1), tenemos la temperatura final de equilibrio:

$$T_2 = \frac{p_2V_1 + 3nRT_1/2}{5nR/2} = \frac{2(m_1+m_2)gh_1}{5nR} + \frac{3}{5}\frac{m_1gh_1}{nR}$$

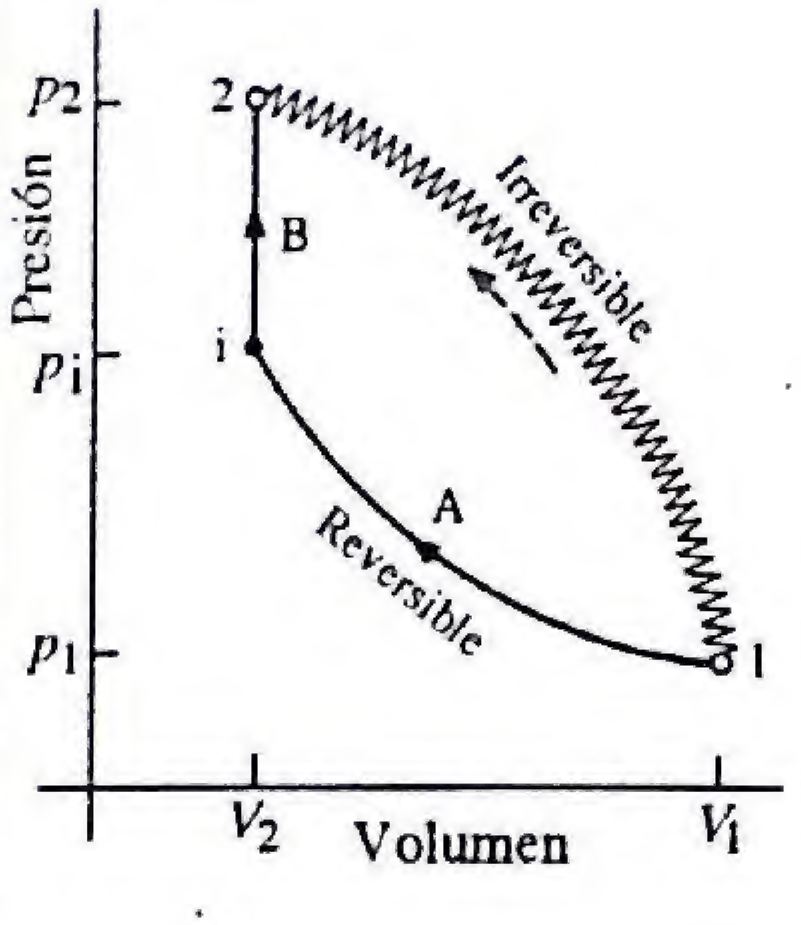
$$T_2 = \frac{(5m_1 + 2m_2)gh_1}{5nR} \qquad (2)$$

Para hallar h_2 usamos de nuevo la ecuación de estado:

$$p_2V_2 = \frac{(m_1+m_2)g}{A}(h_2A) = nRT_2$$

Despejando h_2 y sustituyendo T_2 de la ecuación (2) tenemos:

$$h_2 = \frac{nR}{(m_1+m_2)g}T_2 = \frac{(5m_1+2m_2)}{5(m_1+m_2)}h_1 \qquad (3)$$



Finalmente, para calcular ΔS en este proceso irreversible, ideamos un proceso "reversible" que conecte los mismos estados 1 y 2, pasando por un estado intermedio i. En la figura se ilustra el camino reversible que hemos escogido: En la etapa A se comprime el gas adiabáticamente y en la etapa B se le aumenta la presión manteniendo el volumen constante. Para la compresión adiabática no ocurre cambio de entropía, $\Delta S_A = 0$.

Para el proceso isocórico, el cambio de entropía es:

$$\Delta S_B = \int_i^2 \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_i}^{T_2} \frac{nc_VdT}{T} = nc_V \ln(\frac{T_2}{T_i})$$

Siendo T_i la temperatura intermedia. Esta puede ser calculada relacionándola con la temperatura T_1 al comienzo del proceso adiabático.

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_iV_2^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_1(Ah_1)^{\gamma-1} = T_i(Ah_2)^{\gamma-1}$$

Por lo tanto:

$$T_i = T_1(\frac{h_1}{h_2})^{\gamma-1}$$

Sustituyendo T_i, en la expresión de ΔS_B, obtenemos finalmente el cambio total de entropía buscado:

$$\Delta S_{12} = \Delta S_A + \Delta S_B = nc_V \ln[(\frac{T_2}{T_1})(\frac{h_2}{h_1})^{\gamma-1}]$$

En el caso particular: $n = 1$ mol y $m_2 = 2m_1$, entonces:

$$T_2 = (9/5)T_1 \text{ (ecuaciones 1 y 2)}$$

$$h_2 = (3/5)h_1 \text{ (ecuación 3)}$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5R/2}{3R/2} = \frac{5}{3}$$

Reemplazando estos valores en la expresión anterior, tenemos :

$$\Delta S_{12} = \frac{3}{2}R\ln(\frac{9}{5}) + R\ln(\frac{3}{5})$$

Respuesta:

a) $T_2 = \frac{(5m_1 + 2m_2)gh_1}{5nR}$

b) $h_2 = \frac{(5m_1 + 2m_2)}{5(m_1+m_2)}h_1$

c) $\Delta S_{12} = \frac{3}{2}R\ln(\frac{9}{5}) + R\ln(\frac{3}{5})$

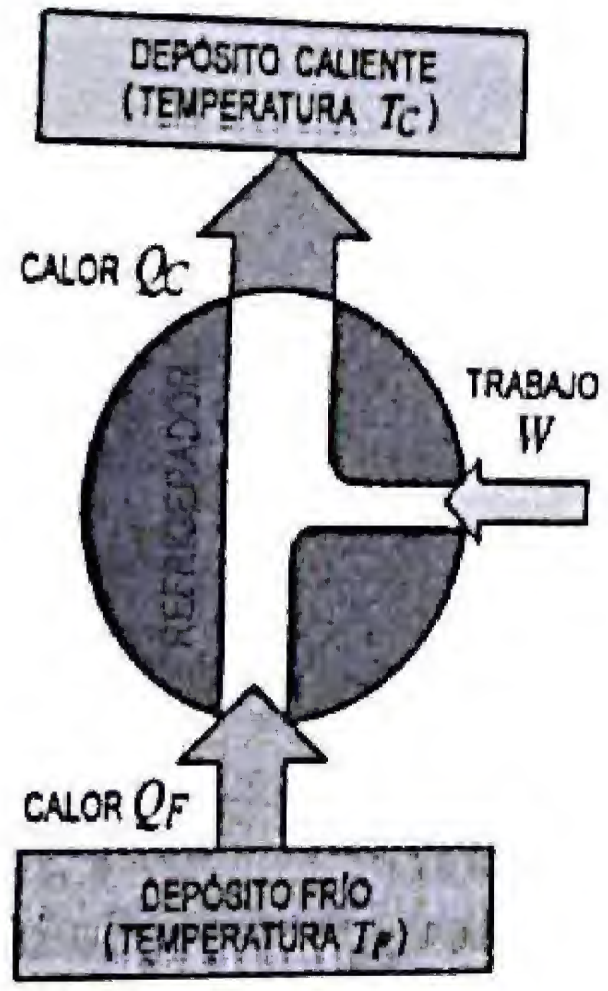
PR-5.22. *¿Cómo funciona un refrigerador?*

En un refrigerador, y también en un aparato de aire acondicionado, se extrae calor Q_F, de un depósito a temperatura baja, T_F y se descarga calor Q_C, en un depósito a temperatura alta T_C. Para ello se debe efectuar un trabajo W.

a) ¿Cómo funciona el refrigerador?

b) La capacidad de enfriar de un refrigerador se mide por lo que se logra en relación con lo que se pone. Esto se expresa por el coeficiente de eficacia o razón del calor extraído al trabajo realizado: $K_e = Q_F/W$. ¿Cuál es el coeficiente K_e mas alto teóricamente posible?

c) ¿Cuánto trabajo debe efectuar el compresor para extraer calor Q_F del compartimiento frío del refrigerador, a temperatura T_F, y liberar calor al medio ambiente?



Solución: a) Mediante un compresor se hace circular un fluido refrigerante que tiene un punto de ebullición bajo*. El gas llega al compresor, a baja presión y a temperatura ambiente); en él se comprime y es licuado por el trabajo del pistón, pasa por un serpentín (el condensador), donde baja su temperatura liberando calor hacia el aire de la habitación. Este líquido pasa por un estrangulamiento (válvula de expansión), donde se expande y disminuye su presión. Al penetrar en el serpentín dentro del refrigerador se presenta como una mezcla de liquido y vapor fríos.

Este enfriamiento ocurre gracias a una expansión brusca en la cual el gas realiza trabajo utilizando su propia energía interna. En el serpentín evaporador, el fluido absorbe calor (de los alimentos) lo que lleva al líquido restante a evaporarse. El gas pasa al compresor donde es licuado para comenzar un nuevo ciclo. El efecto neto es que el compresor conectado a la red eléctrica produce un trabajo mecánico W, que se emplea en extraer calor Q_F, del compartimiento de alimentos a baja temperatura y ceder calor Q_C, a la atmósfera de la cocina a alta temperatura.

b) Según la primera ley de la termodinámica, para un proceso cíclico se tiene:

$$\Delta U = Q - W = 0$$

Donde el trabajo W es negativo si es realizado *sobre* el sistema. El calor Q es positivo si *entra* al sistema y negativo si sale. De acuerdo al esquema del refrigerador mostrado se tiene:

$$(Q_F - Q_C) - (-W) = 0 \quad \Rightarrow \quad W = Q_C - Q_F$$

El coeficiente de eficacia del refrigerador es lo que se obtiene Q_C en relación con lo que se pone W:

$$K_e = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{Q_C - Q_F}$$

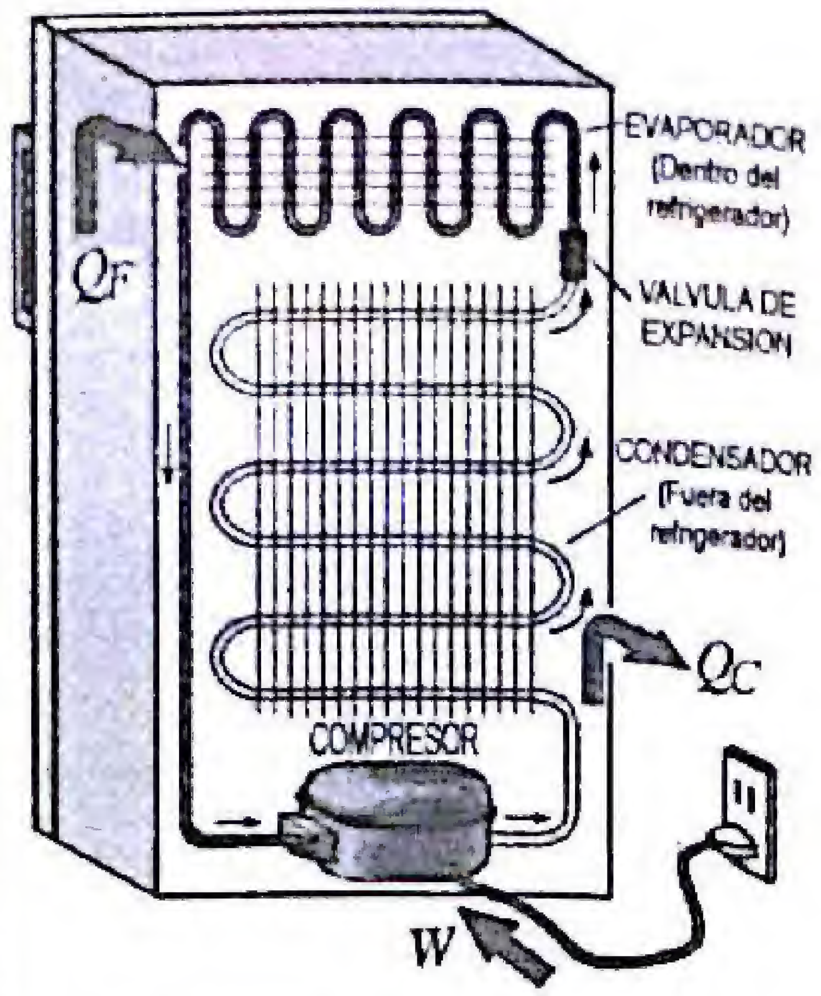
El valor de K_e mas alto posible se consigue si la sustancia de trabajo se lleva por un ciclo de Carnot operando a la inversa, donde se cumple: $Q_C / Q_F = T_C / T_F$. Por lo tanto:

$$K_e(\max) = \frac{1}{Q_C/Q_F - 1} = \frac{1}{T_C/T_F - 1} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

Observe que el máximo valor del coeficiente K_e del refrigerador aumenta si se acercan los extremos de temperatura entre las cuales trabaja.

c) El trabajo que debe realizar el compresor de un refrigerador que opera según un ciclo de Carnot es:

$$W = Q_C - Q_F = Q_F\left[\frac{Q_C}{Q_F} - 1\right] = Q_F\left[\frac{T_C}{T_F} - 1\right] = Q_F\left[\frac{T_C - T_F}{T_F}\right]$$



Esquema de funcionamiento de un refrigerador

* Hasta recientemente la sustancia de trabajo de los refrigeradores era el freón, gas que resultaba dañino para la atmósfera. Ahora se usa el HFC (tetrafluoroetano), un gas que se licúa a –26°C.

Respuesta:

a) Max.$K_e = \dfrac{T_F}{T_C - T_F}$

b) $W = Q_F\left(\dfrac{T_C - T_F}{T_F}\right)$

PR-5.23. *Lo que cuesta obtener cubos de hielo*

Suponga un refrigerador ideal que opera mediante un ciclo de Carnot, fabricando cubos de hielo a temperatura T_F =-13 °C y botando calor a la habitación a temperatura T_C = 27 °C.

a) ¿Cuál sería su máximo coeficiente de eficacia, K_e?

b) ¿Qué trabajo habría que hacer para producir cada cubo de hielo de 20 g?

c) ¿Qué cantidad de calor debería expulsar a la habitación?

Solución. a) Aplicando el resultado del problema anterior, el coeficiente de eficacia teórica máximo del refrigerador es:

$$K_e = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{1}{T_C/T_F - 1} = \frac{1}{300K/260K - 1} = 6{,}5$$

b) Para producir un cubo de hielo de 20 g hay que extraer calor del foco frío en tres diferentes etapas:

1) Enfriamiento del agua de 27°C hasta 0°C: $mc_A \Delta T_A$

2) Congelación del agua: mL_F

3) Enfriamiento del hielo de 0°C hasta -13°C: $mc_H \Delta T_H$

La cantidad de calor total extraída del foco frío es:

$$Q_F = m[c_A \Delta T_A + L_F + c_H \Delta T_H]$$

$$Q_F = (0{,}02\text{kg})[(4190\text{J/kg°C})(27°\text{C}) + 3{,}35\text{x}10^5\text{J/kg} + (2220\text{J/kg°C})(13°\text{C})] = 9540\text{J}$$

El trabajo realizado por ciclo para producir un cubo de hielo de 20 g es:

$$W = \frac{Q_F}{K} = \frac{9540\text{J}}{6{,}5} = 1468\text{J}$$

c) La cantidad de calor expulsada a la habitación es:

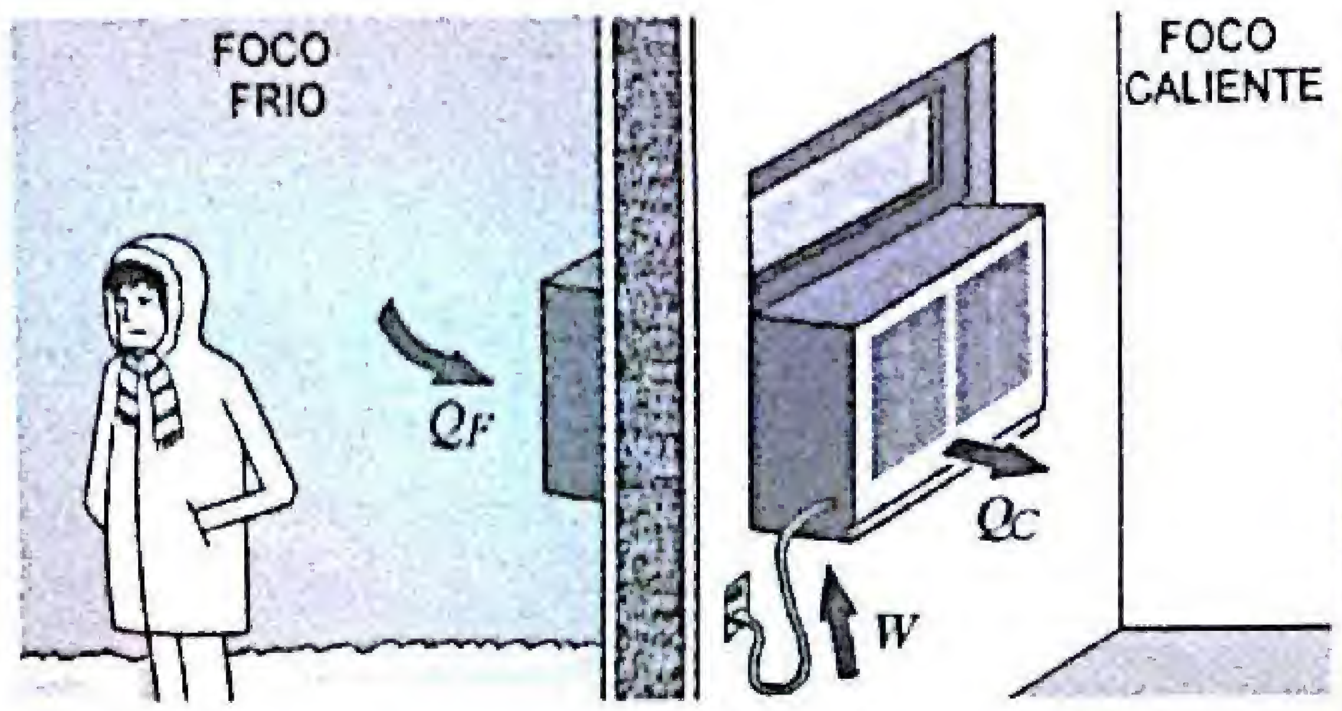
$$Q_C = W + Q_F = 1468\text{J} + 9540\text{J} = 11008\text{J}$$

Respuesta

a) $K_e^{\max} = 6{,}5$
b) W = 1468 J
c) Q_C = 11008 J

PR-5.24. *La bomba de calor: Puede enfriar o calentar*

Una bomba de calor puede utilizarse para enfriar una casa en verano o calentarla en invierno. En el verano actúa como un aparato de aire acondicionado, enfriando el aire del interior al bombear calor hacia el exterior. En el invierno puede funcionar como un calefactor; se invierte el proceso removiendo calor Q_F del aire *frío* exterior y bombeando calor Q_C hacia el interior más caliente de la casa. El trabajo del compresor, $W = Q_C - Q_F$, se realiza a expensas de la energía eléctrica.



Bomba de calor funcionando como calefactor

Suponga que la temperatura del exterior es −5 °C, calcule la potencia eléctrica requerida para mantener el interior en 22 °C, si la casa pierde energía térmica por las paredes y el techo a razón de 5 kW. Considere los siguientes casos:

a) Se utiliza un calentador convencional de resistencia eléctrica.

b) Se utiliza una bomba de calor cuyo coeficiente de rendimiento tiene el 60 % del valor del ciclo de Carnot.

c) ¿Cuál de los dos sistemas ahorra mayor energía (y dinero)?

Solución. a) Si la casa pierde energía térmica por las paredes y el techo a razón de 5 kW, entonces la potencia de suministro que se debe emplear en el calentamiento usando directamente una resistencia eléctrica es:

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 5000 \text{ W}$$

b) La capacidad de calentamiento de una bomba de calor se mide por lo que se logra en relación con lo que le ponemos. El coeficiente de eficacia se define como la razón entre el calor Q_C transferido al depósito caliente (el interior de la casa) y el trabajo W, requerido para transferir ese calor:

$$K_e = \frac{Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C - Q_F}$$

Para un ciclo ideal de Carnot operando entre estas temperaturas se cumple: $Q_C / Q_F = T_C / T_F$ y el coeficiente de eficacia es:

$$K_e^{carnot} = \frac{1}{1 - Q_F/Q_C} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{295\text{K}}{295\text{K} - 268\text{K}} = 10{,}9$$

Mientras que el coeficiente de eficiencia para esta bomba de calor real es:

$$K_e = 0{,}6 K_e^{carnot} = (0{,}6)(10{,}92) = 6{,}55 = Q_C / W$$

Luego, para suministrar 5000 W de calor al interior de la casa requiere de una potencia eléctrica:

$$P = W/t = (Q_C/t)/6{,}55 = 5000W/6{,}55 = 763\text{W}$$

c) En un calentador de resistencia ordinario toda la energía eléctrica que se consume, es decir, el trabajo de la corriente eléctrica se transforma en calor (5000 W). Por otra parte, la bomba de calor ahorra mucho más energía ya que cuando se enchufa a la red eléctrica de la casa, consume apenas 763W de electricidad (que es lo que pagamos) y depositará a la habitación 5000 W de calor.

Respuesta

a) Potencia consumida usando resistencia eléctrica: $P = 5000$ W

b) Potencia consumida usando bomba de calor: $P = 763$ W

c) ¡La bomba de calor tiene mayor rendimiento!

PR-5.25. *Equivalencia de enunciados de la Segunda ley*

Vamos a considerar las tres siguientes maneras de enunciar la Segunda ley de la termodinámica:

(1) *Kelvin-Planck*: Es imposible que una maquina cíclica extraiga calor de un foco y lo transforme todo en trabajo.

(2) Clausius: Es imposible que un refrigerador transfiera calor de un foco frío a otro caliente sin que se realice trabajo.

(3) La variación de entropía del universo no puede disminuir.

Queremos probar que si uno de los dos enunciados, el (1) o el (2) es falso, entonces el enunciado (3) también será falso. Es decir:

a) Si Kelvin-Planck fuese falso, la entropía del universo disminuiría.

b) Si Clausius fuese falso, la entropía del universo disminuiría.

Solución: a) Si el enunciado de Kelvin-Planck no fuese verdad, no habría necesidad de transferir calor Q_F al depósito frío y en este caso el cambio de entropía del universo sería:

$$\Delta S(universo) = \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q_C}{T_C} = 0 - \frac{Q_C}{T_C} < 0$$

b) Si el enunciado de Clausius no fuese verdadero, se podría transferir calor Q del depósito frío a temperatura T_F, al depósito caliente a temperatura $T_C > T_F$, sin que se realice trabajo.

En este caso el cambio de entropía del universo sería:

$$\Delta S(universo) = \frac{Q}{T_C} - \frac{Q}{T_F} = Q(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F}) = Q(\frac{T_F - T_C}{T_C T_F}) < 0$$

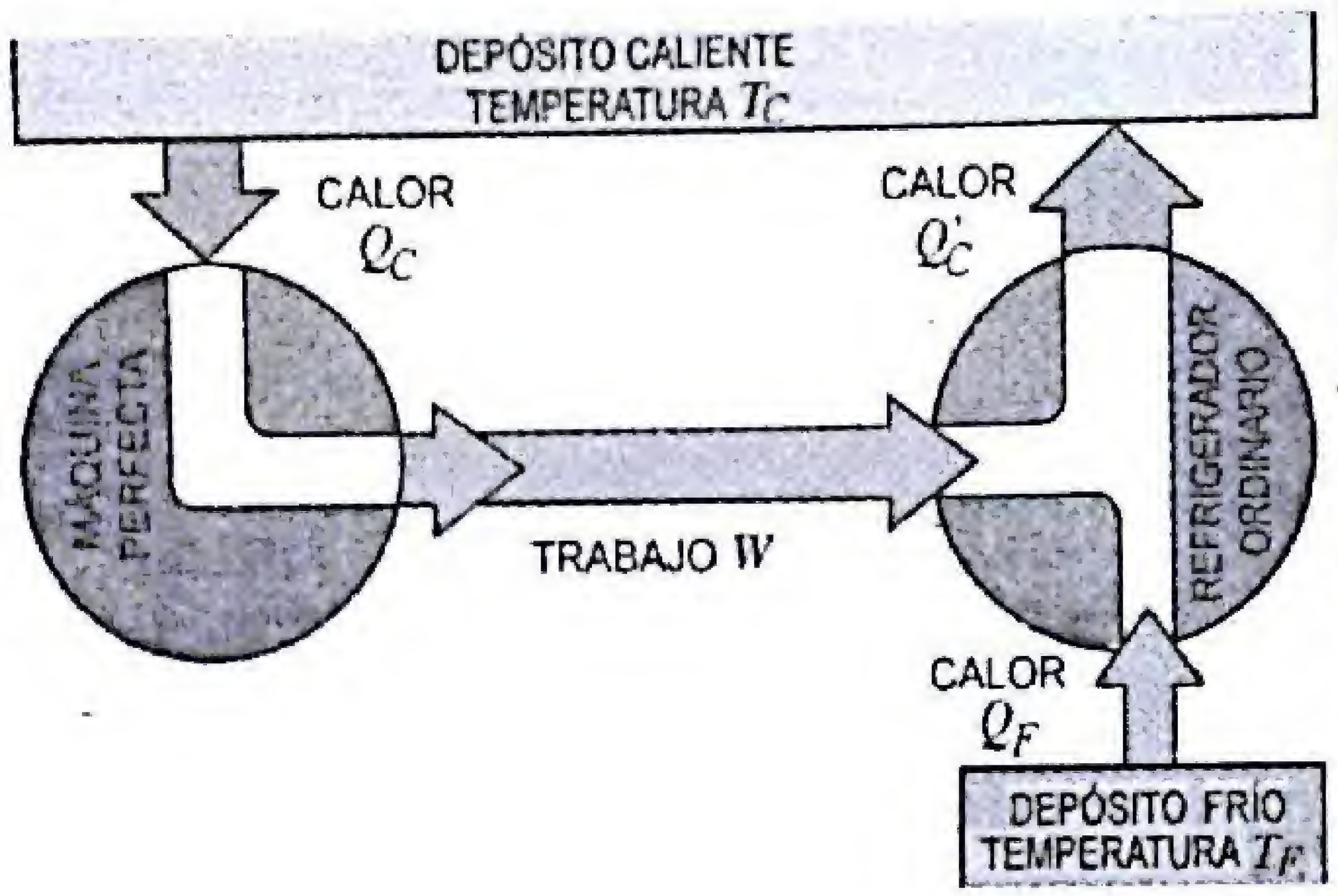
Se observa que ambos enunciados de la segunda ley, llevan a la misma contradicción de que la entropía del universo disminuye.

Respuesta:

En ambos casos, se llega a la misma contradicción: $\Delta S(universo) < 0$

PR-5.26. *La máquina perfecta: Pura ilusión*

Suponga que el enunciado de Kelvin-Planck fuera falso y que pudiésemos construir una máquina perfecta, que toma calor Q_C de un depósito caliente y lo convierte todo en trabajo útil, $W = Q_C$.

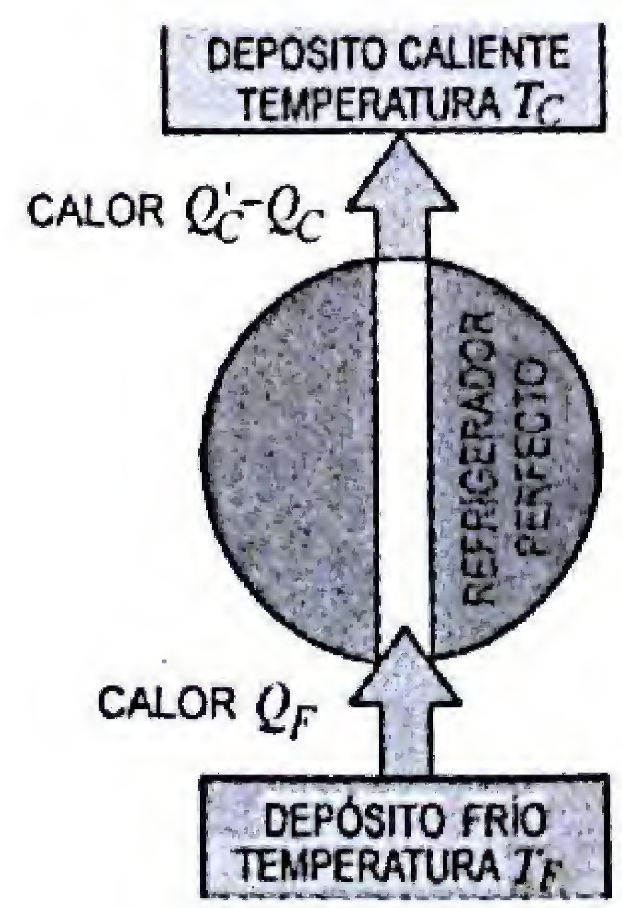


Podríamos utilizar este trabajo para impulsar un refrigerador ordinario que extrae calor Q_F de un deposito frío y coloca calor Q_C' al depósito caliente, como se ilustra en el diagrama. Demuestre que esto implicaría que el enunciado de Clausius también resulta falso.

Solución: Consideremos como un solo aparato a la combinación de la máquina perfecta y el refrigerador. El trabajo W es interno y como tal no entra en ningún intercambio de energía de este aparato con su entorno. Entonces, este aparato lo que hace es tomar una cantidad de calor Q_F del depósito frío y transferir una cantidad neta de calor $(Q_C' - Q_C)$ al depósito caliente. Pero $Q_C = W$, y entonces:

$$Q_C' - Q_C = Q_C' - W = Q_F$$

Esto significa que nuestro aparato combinado se comportaría como un refrigerador perfecto, que toma calor del depósito frío y bombea el mismo calor al deposito caliente, sin que tenga que efectuar ningún trabajo.

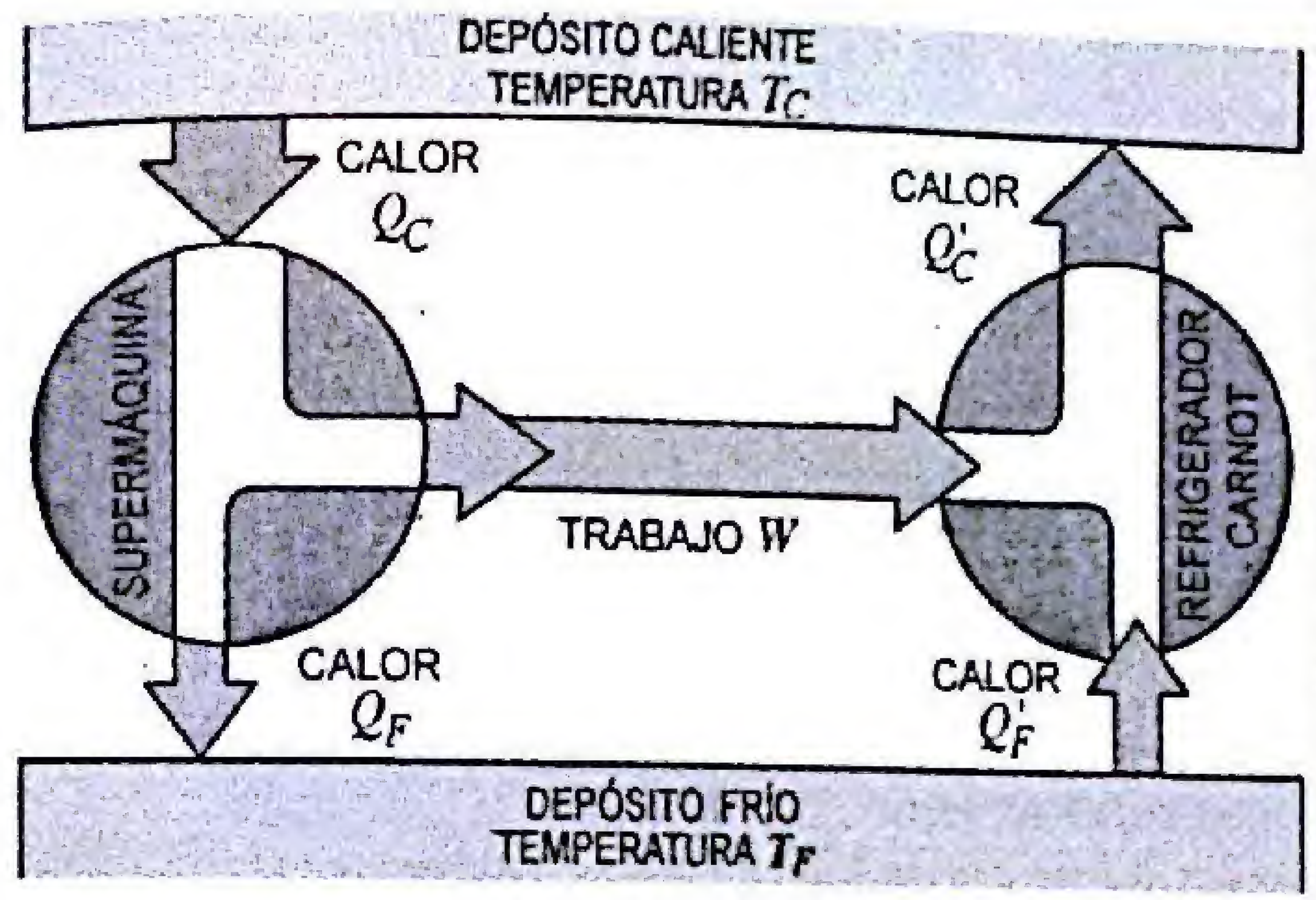


La combinación equivaldría a un refrigerador perfecto

Por lo tanto, una violación del enunciado de Kelvin-Planck nos lleva a una violación del enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica. De manera similar, un refrigerador perfecto nos permitiría convertir una máquina térmica ordinaria en una máquina perfecta, así una violación del enunciado de Clausius implica una violación del enunciado de Kelvin- Planck. Como conclusión: Los dos enunciados son equivalentes.

PR-5.27. *El límite de la eficiencia de una supermáquina*

Considere una supermáquina *hipotética* que trabaja entre las temperaturas T_C y T_F con una eficiencia e_S.



Demuestre que la supermáquina no puede tener una eficiencia mayor que la de la máquina de Carnot $(e_S \le e_C)$. Para ello imagine que esta supermáquina hace trabajar un refrigerador de Carnot entre los mismos dos depósitos de temperaturas.

Solución: La supermáquina transfiere calor entre los depósitos frío y caliente efectuando trabajo $W = Q_C - Q_F$, con una eficiencia: $e_S = W / Q_C$. Este trabajo W impulsa el refrigerador de Carnot, el cual saca calor Q_F' del depósito frío y envía calor Q_C' al depósito caliente, con una eficiencia $e_C = W / Q_C'$. Por lo tanto:

$$Q_C = (e_C / e_S) Q_C' \qquad (1)$$

Aplicando la primera ley a cada una de las máquinas:

$$Q_F = Q_C - W \qquad (2)$$

$$Q_F' = Q_C' - W \qquad (3)$$

El cambio total de entropía por ciclo en los depósitos es:

$$\Delta S = \Delta S_C + \Delta S_F = \frac{Q_C' - Q_C}{T_C} + \frac{Q_F - Q_F'}{T_F}$$

Sustituyendo Q_C, Q_F y Q_F' de las relaciones (1), (2) y (3), tenemos:

$$\Delta S = \frac{Q_C' - (e_C/e_S)Q_C'}{T_C} + \frac{((e_C/e_S)Q_C' - W) - (Q_C' - W)}{T_F}$$

$$\Delta S = Q_C'(1 - \frac{e_C}{e_S})\frac{1}{T_C} + Q_C'(\frac{e_C}{e_S} - 1)\frac{1}{T_F}$$

Dado que la entropía no puede disminuir:

$$\Delta S = Q_C'(\frac{e_C}{e_S} - 1)(\frac{T_C - T_F}{T_F T_C}) \geq 0$$

Como $T_C > T_F$, podemos concluir que:

$$(\frac{e_C}{e_S} - 1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e_S \leq e_C$$

Es decir, la llamada supermáquina no podría tener una eficiencia mayor que la máquina de Carnot.

Respuesta:

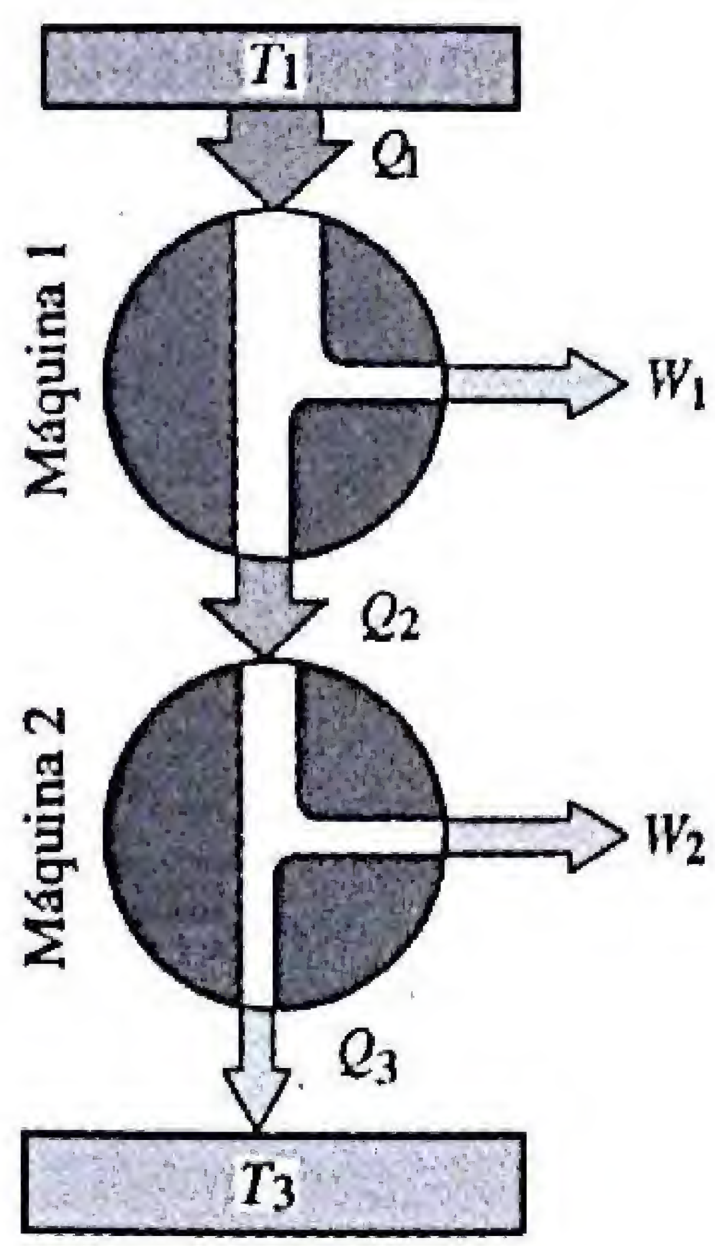
Ninguna máquina puede tener una eficiencia superior a la máquina de Carnot.

PR-5.28. *Dos máquinas de Carnot conectadas en serie*

Un inventor desea aumentar la eficiencia conectando una máquina de Carnot que impulsa a otra *en serie*, de forma tal que la primera máquina admite calor Q_1 de una fuente a la temperatura alta T_1 y libera calor Q_2, el cual sirve de entrada a la segunda máquina; ésta a su vez libera calor Q_3 a otra fuente a la temperatura baja, T_3.

a) Determine la eficiencia neta de la combinación.

b) ¿Cómo se compara la máxima eficiencia global de este sistema con la eficiencia de una sola máquina operando entre las mismas temperaturas T_1 y T_3?



Solución. Llamemos T_2 a la temperatura intermedia. El trabajo que realiza la primera máquina es: $W_1 = Q_1 - Q_2$. Como $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$, la eficiencia de esta máquina es:

$$e_1 = \frac{W_1}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

El trabajo que realiza la segunda máquina es: $W_2 = Q_2 - Q_3$. Como $Q_3/Q_2 = T_3/T_2$, la eficiencia de la segunda máquina es:

$$e_2 = \frac{W_2}{Q_2} = 1 - \frac{Q_3}{Q_2} = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

La eficiencia global es el trabajo total producido dividido entre el calor de entrada a la primera máquina:

$$e = \frac{W_{total}}{Q_1} = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{W_2}{Q_1}$$

$$e = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{W_2}{Q_2}\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} + (1 - \frac{T_3}{T_2})\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

b) La combinación tendría la misma eficiencia que la de una sola máquina que funcione entre el foco más caliente y el mas frío.

Respuesta:

a) $e_{total} = 1 - \frac{T_3}{T_2}$

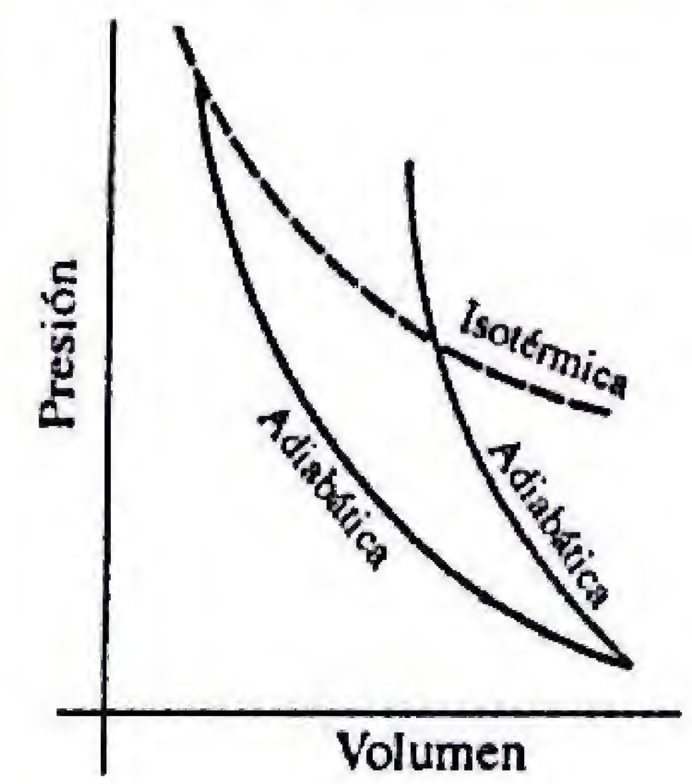
b) La misma eficiencia que una sola máquina.

PR-5.29. *Un ciclo que violaría la Segunda ley*

Si en un diagrama *p-V*, dos curvas adiabáticas tuviesen un punto de intersección, se podría completar un ciclo trazando un camino isotérmico entre las dos adiabáticas.

a) Demostrar que una máquina que funcionara en este ciclo violaría la segunda ley de la termodinámica.

b) ¿Qué podemos concluir acerca del cruce de dos curvas adiabáticas?



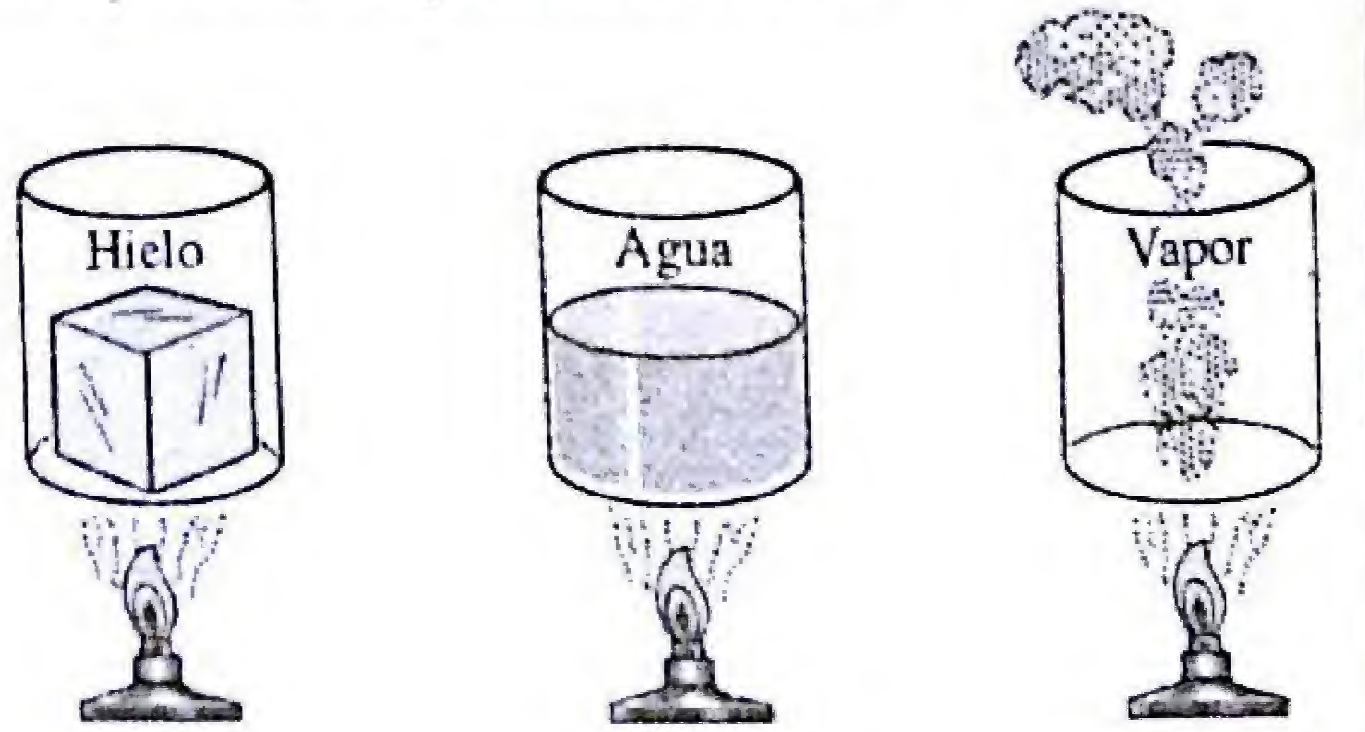
Solución: a) A lo largo de las dos curvas adiabáticas no hay intercambio de calor ($Q = 0$), mientras que en la curva isotérmica no hay variación de energía interna ($\Delta U = 0$). De acuerdo a la primera ley, todo el calor que puede entrar durante la expansión isotérmica será convertido en trabajo W durante el ciclo (el área encerrada por la curva). Esto violaría la segunda ley.

b) Podemos concluir entonces que dos curvas adiabáticas no se pueden cruzar.

PR-5.30. *Calentando un trozo de hielo hasta evaporarlo*

Un estudiante ocioso calienta un trozo de hielo de masa 100 g que está a una temperatura inicial de -20 °C hasta derretirlo todo y luego hierve el agua hasta transformarla en vapor a una temperatura de 100 °C.

a) Determine el cambio total de entropía que experimenta el hielo.
b) Compare el cambio de entropía para la fusión del hielo con el de la vaporización del agua.



Solución: Para calcular el cambio de entropía al calentar el hielo imaginamos que la temperatura se eleva reversiblemente en una serie de procesos infinitesimales:

Datos:
$m = 0{,}1$ kg
$T_0 = 253$ K
$T_1 = 273$ K
$T_2 = 373$ K
$c_H = 2{,}05\text{x}10^3$ J/kg·K
$c_A = 4{,}18\text{x}10^3$ J/kg·K
$L_F = 3{,}34\text{x}10^5$ J/kg
$L_V = 2{,}26\text{x}10^6$ J/kg

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{mc_H dT}{T} = mc_H \ln(\frac{T_1}{T_0})$$

$$\Delta S_1 = (0{,}1\text{kg})(2{,}05\text{x}10^3\text{J/kg.K})\ln(\frac{273\text{K}}{253\text{K}}) = +15{,}6\text{J/K}$$

El hielo se funde a agua permaneciendo la temperatura en 0° C. Durante la fusión del hielo el depósito térmico eleva la temperatura sólo en una cantidad diferencial dT y el proceso es *reversible* ya que si después bajamos la temperatura en la misma cantidad diferencial, el hielo fundido se congelará.

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_1}\int dQ_r = \frac{Q}{T_1} = \frac{mL_F}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = \frac{(0{,}1\text{kg})(3{,}34\text{x}10^5\text{J/kg})}{273\text{K}} = +122\text{J/K}$$

Para calentar el agua, imaginamos un proceso reversible en incrementos infinitesimales dT, el calor requerido para cada paso es $dQ_r = mc_A dT$:

$$\Delta S_3 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{mc_A dT}{T} = mc_A \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\Delta S_3 = (0{,}1\text{kg})(4{,}18\text{x}10^3\text{J/kg.K})\ln(\frac{373\text{K}}{273\text{K}}) = +130\text{J/K}$$

El agua se evapora permaneciendo su temperatura en 100 °C y el cambio de entropía es:

$$\Delta S_4 = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_2}\int dQ_r = \frac{Q}{T_2} = \frac{mL_V}{T_2}$$

$$\Delta S_4 = \frac{(0{,}1\text{kg})(2{,}26\text{x}10^6\text{J/kg})}{373\text{K}} = +606\text{J/K}$$

La entropía total es:

$$\Delta S_{total} = (15{,}6 + 122 + 130 + 606)\text{J/K} = 874 \text{ J/K}$$

b) El cambio de entropía para la vaporización del agua resulta 5 veces mayor que para la fusión del hielo. Esto era de esperarlo ya que el agua es menos ordenada (más aleatoria) que el hielo, pero cuando el agua pasa a vapor el incremento de desorden es mucho mayor.

Respuesta:

$\boxed{\Delta S_{total} = 874 \text{ J/K}}$

PR-5.31. *Arrojar hielo a la piscina aumenta la entropía*

El agua de una piscina muy grande está a la temperatura ambiente de 20 °C y un estudiante ocioso arroja un trozo de hielo de masa 50 g a temperatura -10 °C. ¿En cuánto aumentará la entropía? Considere que el trozo de hielo no afecta la temperatura del agua en la piscina.

Solución: Calculemos primero el cambio de entropía del hielo, considerando que el proceso consiste de tres etapas:
1) El hielo se calienta desde la temperatura de -10°C (= 263 K) hasta 0°C (= 273 K):

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{m_H c_H dT}{T} = m_H c_H \ln(\frac{T_f}{T_i})$$

$$\Delta S_1 = (0{,}05\text{kg})(2220\text{J/kg°C})ln(\frac{273\text{K}}{263\text{K}}) = 4{,}14\text{J/K}$$

El hielo se funde a 0°C (= 273K):

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{m_H L_F}{T} = \frac{(0{,}05\text{kg})(3{,}34\text{x}10^5\text{J/kg})}{273\text{K}} = 61{,}2\text{J/K}$$

3) El agua del hielo fundido se calienta hasta 20°C (= 293K).

$$\Delta S_3 = m_H c_A \ln(\frac{T_f}{T_i}) = (0{,}05\text{kg})(4190\text{J/kg°C}) ln(\frac{293\text{K}}{273\text{K}})$$

$$\Delta S_3 = 14{,}8\text{J/K}$$

El cambio total de entropía del hielo y el agua que genera es:

$$\Delta S(hielo) = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

$$\Delta S(hielo) = (4{,}14 + 61{,}2 + 14{,}8)\text{J/K} = +80{,}1\text{J/K}$$

La temperatura del agua de la piscina no varía y su cambio de entropía es: $\Delta S(piscina) = Q/T$. Donde Q es la cantidad de calor total que se le suministra al hielo en las tres etapas:

1) Calor perdido para calentar el hielo:

$$Q_1 = m_H c_H \Delta T = (0{,}05\text{kg})(2220\text{J/kg°C})(10°\text{C}) = 1110\text{J}$$

2) Calor perdido para fundir el hielo:

$$Q_2 = m_H L_F = (0{,}05\text{kg})(3{,}34\text{x}10^5\text{J/kg}) = 16700\text{J}$$

3) Calor perdido para calentar el agua del hielo:

$$Q_3 = m_H c_A \Delta T = (0{,}05\text{kg})(4190\text{J/kg°C})(20°\text{C}) = 4190\text{J}$$

El calor total que ha cedido el agua de la piscina es:

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1110\text{J} + 16700\text{J} + 4190\text{J} = 22000\text{J}$$

El cambio de entropía de la piscina es:

$$\Delta S(piscina) = -\frac{Q_{total}}{T} = -\frac{22000\text{J}}{293\text{K}} = -75{,}1\text{J/K}$$

El cambio de entropía del universo (piscina+hielo) es:

$$\Delta S(uni) = \Delta S(pis) + \Delta S(hie) = -75{,}1\text{J/K} + 80{,}1\text{J/K} = 5\text{J/K}$$

Respuesta:

$\Delta S(hielo) = +80{,}1\text{J/K}$
$\Delta S(piscina) = -75{,}1\text{J/K}$
$\Delta S(universo) = +5\text{J/K}$

PR-5.32. *Un hierro al rojo vivo es enfriado con agua*

Una herradura de hierro de masa 2 kg está inicialmente a una temperatura de 627 °C. El herrero introduce la herradura caliente en un balde que contiene 20 litros de agua a una temperatura inicial de 27 °C. Suponga que la capacidad calorífica del balde es despreciable y que durante el proceso no ocurre evaporación de agua ni transferencia de calor al medio ambiente. Determine:

a) La temperatura final del agua y la herradura.
b) El cambio de entropía de la herradura.
c) El cambio de entropía del agua.
d) El cambio global de entropía del agua y la herradura.

Solución: a) El calor que gana el agua es igual al calor que pierde la herradura:

$$m_a c_a (T - T_a) = m_h c_h (T_h - T)$$

Siendo T la temperatura final de equilibrio. Sustituyendo los valores numéricos:

Datos

Agua	Herradura
$m_a = 20$ kg	$m_h = 2$ kg
$T_a = 300$ K	$T_h = 900$ K
$c_a = 4186$J/kg°K	$c_h = 448$J/kg°K

$$20\text{kg}\ (4186\text{J/kgK})(T\text{-}300\text{K}) = 2\text{kg}\ (448\text{J/kgK})(900\text{K-}T)$$

Despejando se tiene: $T = 306{,}4$ o K = 33,2 °C

b) El proceso es irreversible y para hallar los cambios de entropía, nos imaginamos un proceso cuasiestático (reversible). El cambio de entropía de la herradura es:

$$\Delta S_h = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_h}^{T} \frac{m_h c_h dT}{T} = m_h c_h \ln(\frac{T}{T_h})$$

$$\Delta S_h = (2\text{kg})(448\text{J/kg.K})\ln(\frac{306{,}4\text{K}}{900\text{K}}) = -965\text{J/K}$$

c) De manera similar, el cambio de entropía del agua es:

$$\Delta S_a = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_a}^{T} \frac{m_a c_a dT}{T} = m_a c_a \ln(\frac{T}{T_a})$$

$$\Delta S_a = (20\text{kg})(4186\text{J/kg.K})\ln(\frac{306{,}4\text{K}}{300\text{K}}) = +1767\text{J/K}$$

d) El cambio de entropía total es: $\Delta S(\text{univ}) = \Delta S_h + \Delta S_a$

$$\Delta S(\text{universo}) = -965\ \text{J/K} + 1767\ \text{J/K} = +802\ \text{J/K}$$

Respuesta:

a) $T = 33{,}2$ °C
b) $\Delta S_h = -965$ J/K
c) $\Delta S_a = +1767$ J/K
d) $\Delta S_{univ} = +802$ J/K

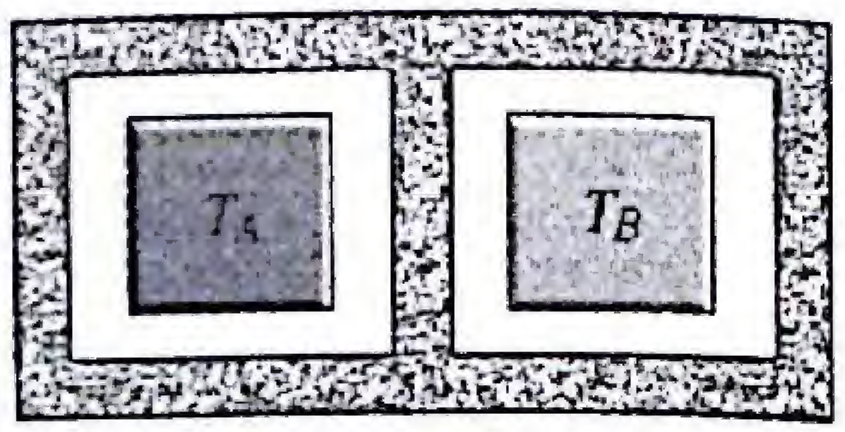
PR-5.33. *Entropía en transferencia de calor irreversible*

Dos objetos idénticos A y B, de masa m y calor específico constante c, están inicialmente a distintas temperaturas ($T_A > T_B$). Se colocan dentro de una caja aislante y se les permite que alcancen el equilibrio térmico.

a) Determine el cambio de entropía del sistema constituido por los dos objetos.

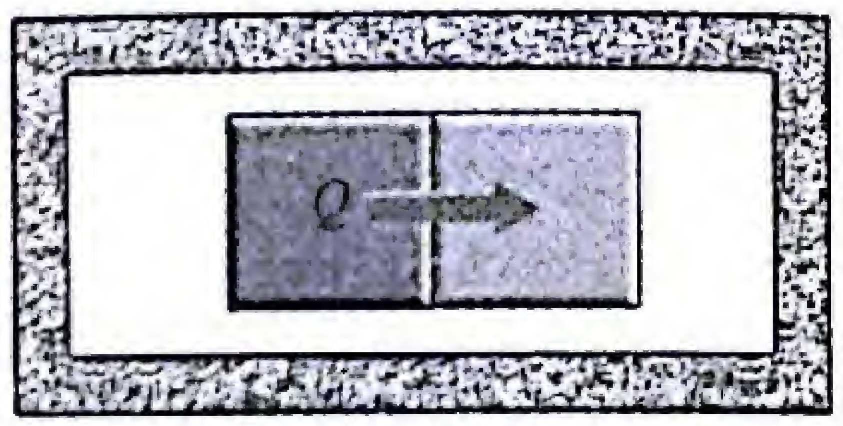
b) Demuestre que el cambio de entropía es positivo, a menos que $T_A = T_B$, en cuyo caso $\Delta S = 0$.

Solución: Primero calcularemos la temperatura final de equilibrio, T_e. Los dos objetos están contenidos en una caja aislante de tal manera que no se pierde calor hacia los alrededores. El calor cedido por el objeto caliente A, es igual al calor absorbido por el objeto frío B.



$$mc(T_A - T_e) = mc(T_e - T_B) \quad \Rightarrow \quad T_e = \frac{1}{2}(T_A + T_B)$$

Este proceso es irreversible y para poder calcular ΔS, debemos escoger un camino reversible que nos lleve al mismo estado final. Para ello podemos imaginar un proceso de enfriamiento gradual de A mediante una serie de reservorios a temperaturas decrecientes (T_A-dT), (T_A-$2dT$),....,(T_e+dT), T_e. El cambio de entropía de A será:



$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_e} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_A}^{T_e} \frac{mcdT}{T} = mc \ln(\frac{T_e}{T_A})$$

Similarmente, se calienta B con una serie de reservorios a temperaturas crecientes (T_B+dT), (T_B+$2dT$),...., (T_e-dT), T_e. El cambio de entropía de B será:

$$\Delta S_B = \int_{T_B}^{T_e} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_B}^{T_e} \frac{mcdT}{T} = mc \ln(\frac{T_e}{T_B})$$

El cambio de entropía del universo es la suma:

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_A + \Delta S_B = mc \ln(\frac{T_e}{T_A}) + mc \ln(\frac{T_e}{T_B}) = mc \ln(\frac{T_e^2}{T_A T_B})$$

$$\Delta S_{AB} = mc \ln \frac{(T_A + T_B)^2}{4 T_A T_B}$$

b) Para demostrar que $\Delta S_{AB} > 0$, notamos que:

$$\frac{(T_A + T_B)^2}{4 T_A T_B} = \frac{4 T_A T_B + (T_A - T_B)^2}{4 T_A T_B} = 1 + \frac{(T_A - T_B)^2}{4 T_A T_B} > 1$$

Por lo tanto, el cambio de entropía es positivo:

$$\Delta S_{AB} = mc \ln \frac{(T_A + T_B)^2}{4 T_A T_B} > 0$$

En el caso $T_A = T_B$, entonces $\Delta S_{AB} = mc \ln 1 = 0$:

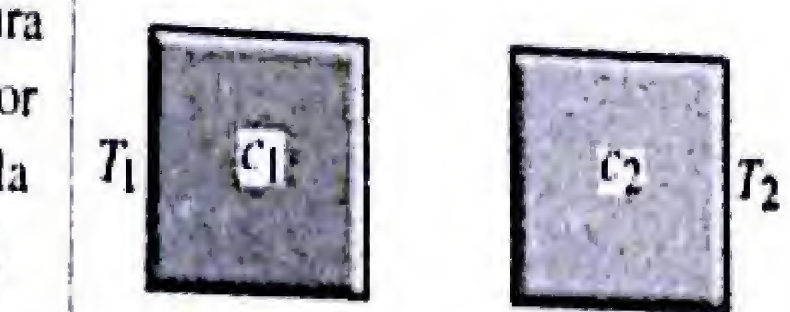
Respuesta:

a) $\Delta S_{AB} = mc \ln \dfrac{(T_A + T_B)^2}{4 T_A T_B} > 0$

b) Si $T_A = T_B$, $\Delta S_{AB} = 0$

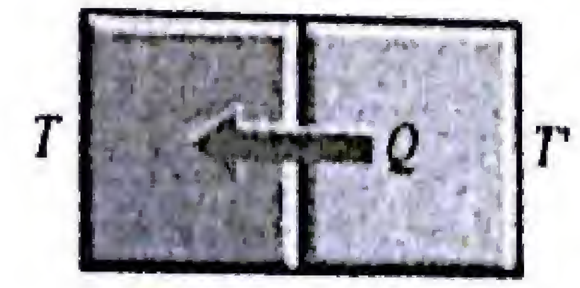
PR-5.34. *El equilibrio se alcanza para el máximo en ΔS*

Un objeto de masa m_1, calor especifico c_1 y temperatura T_1 se coloca en contacto con otro de masa m_2, calor especifico c_2 y temperatura $T_2 > T_1$. En consecuencia la temperatura del primer objeto aumenta a T y la del segundo disminuye a T'.



a) Demuestre que el aumento de entropía del sistema es:

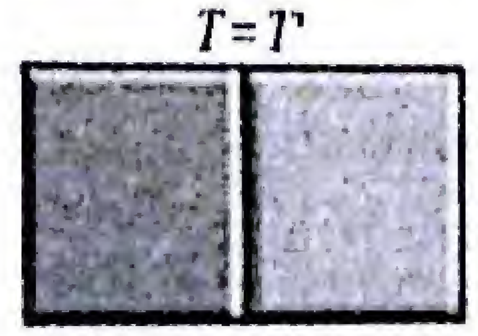
$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T'}{T_2}$$



y que la conservación de la energía exige que:

$$m_1 c_1 (T - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T')$$

$T = T'$



b) Demuestre que ΔS, considerado como función de T, es máximo si $T = T'$, que es justo la condición de equilibrio termodinámico.

Solución: a) Los cambios respectivos de entropía de los objetos son:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_1}^{T} \frac{m c_1 dT}{T} = m c_1 \ln(\frac{T}{T_1})$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T'} \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_2}^{T'} \frac{m c_2 dT}{T} = m c_2 \ln(\frac{T'}{T_2})$$

El cambio total de entropía es:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1 c_1 \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T'}{T_2} \qquad (1)$$

Por otra parte, si no existen perdidas de energía al ambiente, se tiene: $Q_1 + Q_2 = 0$. Por lo tanto:

$$m_1c_1(T - T_1) + m_2c_2(T' - T_2) = 0 \qquad (2)$$

b) Si despejamos T' de esta ecuación de conservación de la energía se tiene:

$$T' = T_2 - \frac{m_1c_1}{m_2c_2}(T - T_1)$$

Sustituyendo en la expresión (1) de la entropía, se obtiene:

$$\Delta S = m_1c_1 \ln\frac{T}{T_1} + m_2c_2 \ln\left(1 - \frac{m_1c_1}{m_2c_2}\left(\frac{T - T_1}{T_2}\right)\right)$$

Si consideramos ΔS como función de T, será máximo cuando su derivada es cero:

$$\frac{d\Delta S}{dT} = \frac{m_1c_1}{T} + m_2c_2\left(\frac{-\frac{m_1c_1}{m_2c_2}\frac{1}{T_2}}{\left(1 - \frac{m_1c_1}{m_2c_2}\left(\frac{T - T_1}{T_2}\right)\right)}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{m_1c_1}{T} = \frac{m_2c_2m_1c_1}{m_2c_2T_2 - m_1c_1(T - T_1)}$$

Despejando, se obtiene la temperatura que corresponde al máximo de entropía:

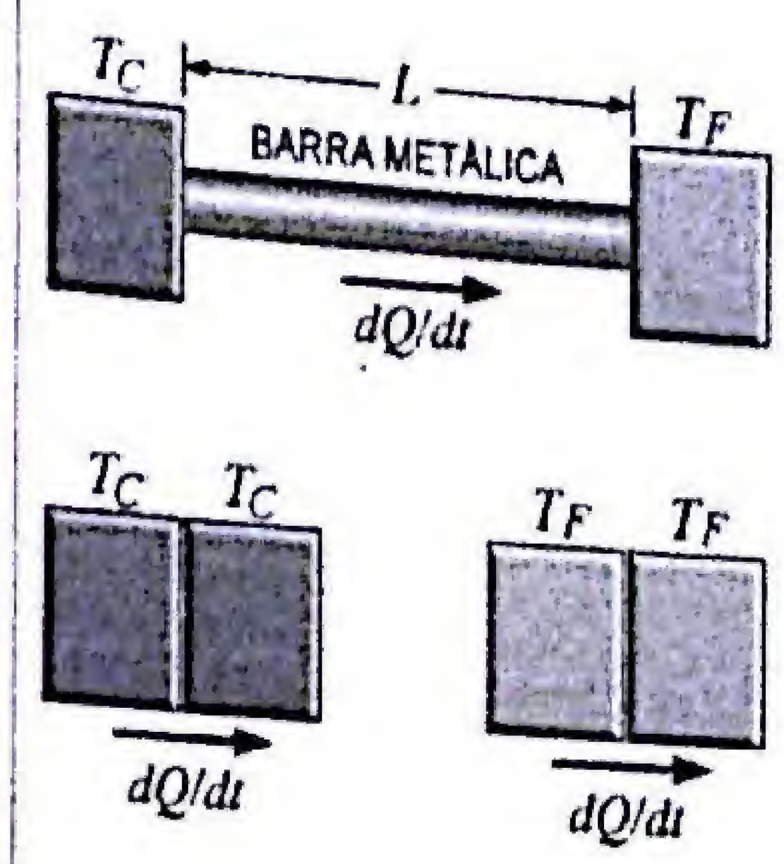
$$T = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

Este es justamente el valor de T que coincide con T' en la ecuación (2) de la conservación de la energía para el estado final de equilibrio. Es decir, cuando $T = T'$ se alcanza el máximo de entropía y no habrá intercambio adicional de calor espontáneo entre los dos objetos.

PR-5.35. *Generación de entropía por conducción*

Considere una barra de área transversal A, longitud L y conductividad k. Los extremos de la barra se mantienen a temperatura fijas por un foco caliente, T_C y un foco frío, T_F. Calcule la razón con que se genera entropía debido a la conducción de calor a través de la barra.

Solución: Como la conducción de calor es un proceso irreversible, necesitamos imaginar algún otro proceso reversible para calcular el cambio de entropía. Tendremos un proceso reversible, si reemplazamos la barra por dos focos más, que permite el paso de calor a las temperaturas constantes T_C y T_F. No hay transferencia de calor a otras temperaturas así que el proceso es reversible. La tasa de transferencia de calor en la barra es:



$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = kA\left(\frac{T_C - T_F}{L}\right)$$

El foco caliente pierde entropía a una tasa:

$$\frac{dS_C}{dt} = \frac{dQ_C/dt}{T_C} = -\frac{dQ/dt}{T_C}$$

El foco frío gana entropía a una tasa:

$$\frac{dS_F}{dt} = \frac{dQ_F/dt}{T_F} = +\frac{dQ/dt}{T_F}$$

Por lo tanto, el cambio neto de entropía es:

$$\frac{dS_{neta}}{dt} = \frac{dS_C}{dt} + \frac{dS_F}{dt} = -\frac{dQ/dt}{T_C} + \frac{dQ/dt}{T_F} = \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C}\right)\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dS_{neta}}{dt} = \left(\frac{T_C - T_F}{T_CT_F}\right)\frac{dQ}{dt} = \frac{kA}{L}\frac{(T_C - T_F)^2}{T_CT_F} > 0$$

Es decir, la conducción de calor es un proceso en el cual se crea entropía. La irreversibilidad del proceso explica por qué el calor va de lo caliente a lo frío. Si el calor pasara de lo frío a lo caliente, dS_{neta}/dt sería negativa, lo cual está prohibido por la 2ª ley de la termodinámica.

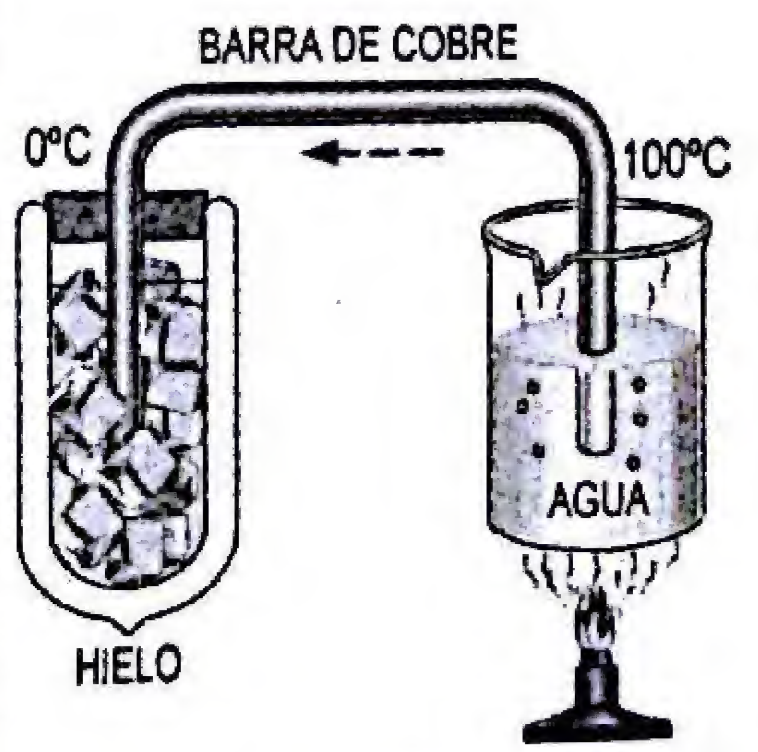
Respuesta:

$$\boxed{\frac{dS_{neta}}{dt} = \frac{kA}{L}\frac{(T_C - T_F)^2}{T_CT_F}}$$

PR-5.36. *Barra conductora de calor para derretir hielo*

Un extremo de una barra de cobre se sumerge en agua hirviendo a 100 °C y el otro extremo se sumerge dentro de un termo con hielo a 0 °C. Una vez que el flujo de calor en la barra alcanza el estado estacionario, se observa que en una hora se derriten 200 g de hielo. Calcule para ese lapso de tiempo:

a) El cambio de entropía ΔS del hielo, el agua y la barra.
b) El cambio de entropía ΔS del sistema completo.



Solución: a) El cambio de entropía del hielo es:

$$\Delta S_h = \frac{Q}{T} = +\frac{mL_F}{T} = -\frac{(0.2\text{kg})(334\text{x}10^3\,\text{J/kg})}{273{,}15\text{K}} = +245\text{J/K}$$

El cambio de entropía del agua hirviendo es:

$$\Delta S_a = \frac{Q}{T} = -\frac{mL_F}{T} = -\frac{(0.2\text{kg})(334\text{x}10^3\,\text{J/kg})}{373{,}15\text{K}} = -179\text{J/K}$$

El cambio de entropía de la barra es cero ($\Delta S_b = 0$). En la situación estacionaria no hay intercambio de calor neto entre la barra y su entorno, ya que la cantidad de calor que le entra desde el lado que está en el agua hirviendo es la misma que sale por el lado del hielo.

b) El cambio de entropía total es:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_a + \Delta S_h + \Delta S_b = -179\text{J/K} + 245\text{J/K} + 0 = +66\text{K}$$

El proceso es irreversible ya que el cambio neto de entropía es positivo.

Respuesta:

a) $\Delta S_a = -179\text{J/K}$
$\Delta S_h = +245\text{J/K}$
$\Delta S_b = 0$
b) $\Delta S_{total} = +66\text{K}$

PR-5.37. *Trabajo máximo obtenible de dos sistemas*

Considere dos sistemas idénticos de masa m y calor específico c, que están inicialmente a las temperaturas T_1 y T_2, siendo $T_1 > T_2$. Se desea operar con estos cuerpos una máquina térmica para convertir parte de su energía interna en trabajo. Como resultado de esta operación, los dos cuerpos alcanzarán una temperatura final común, T_F.

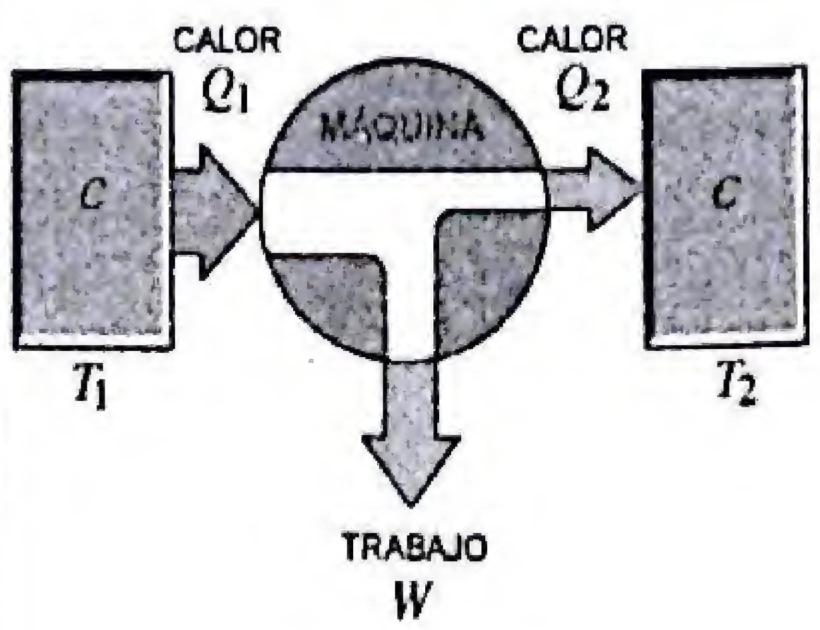
a) ¿Cuál es el trabajo total realizado por la máquina?

b) ¿Cuál será el trabajo máximo obtenible de esta máquina?

Solución: El trabajo realizado en el proceso es igual al calor perdido en el reservorio T_1 menos el calor ganado en el reservorio T_2:

$$W = Q_1 - Q_2 = mc(T_1 - T_F) - mc(T_F - T_2)$$

$$W = mc(T_1 + T_2 - 2T_F) \qquad (1)$$



$$W = Q_1 - Q_2$$

El cambio total de entropía es: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_F} \frac{dQ_{1r}}{T} + \int_{T_2}^{T_F} \frac{dQ_{2r}}{T} = \int_{T_1}^{T_F} \frac{mcdT}{T} + \int_{T_2}^{T_F} \frac{mcdT}{T}$$

$$\Delta S = mc[\ln(\frac{T_F}{T_1}) + \ln(\frac{T_F}{T_2})] = mc\ln(\frac{T_F^2}{T_1 T_2})$$

Como el cambio de entropía no puede ser negativo, ($\Delta S \geq 0$), se tiene:

$$\frac{T_F^2}{T_1 T_2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_F \geq \sqrt{T_1 T_2}$$

Según la relación (1), W será máximo cuando T_F tenga su valor mínimo, el cual ocurre para $\Delta S = 0$. El mínimo de la temperatura final es: $T_F = \sqrt{T_1 T_2}$. Por lo tanto, el trabajo máximo será:

$$W_{max} = mc(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = mc(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

Respuesta:

$$\boxed{W_{max} = mc(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}$$

PR-5.38. *Calentando un cuerpo de manera reversible*

Un bloque metálico de 1 kg cuyo calor específico es c_b = 400 J/Kg.K, se encuentra a la temperatura inicial T_i = 200 K y se calienta hasta una temperatura final T_f = 400 K, empleando tres procesos diferentes:

Proceso (1): Se traslada directamente al reservorio de temperatura a 400K.

Proceso (2): Primero se traslada a un reservorio intermedio a 300 K y después de alcanzar el equilibrio térmico se traslada al de 400 K.

Proceso (3): Se traslada sucesivamente a cuatro reservorios de temperaturas 250K, 300K, 350K y 400K (permitiendo el equilibrio térmico en cada reservorio).

a) En los procesos (1), (2), y (3), calcule la variación de entropía: del bloque, de cada uno de los reservorios y del universo.

b) ¿Cómo se podría llevar a cabo en la práctica un experimento de calentamiento reversible?

Solución: En cada caso el cambio de entropía del bloque viene dado por:

$$\Delta S(\text{bloque}) = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{m_b c_b dT}{T} = m_b c_b \ln(\frac{T_f}{T_i})$$

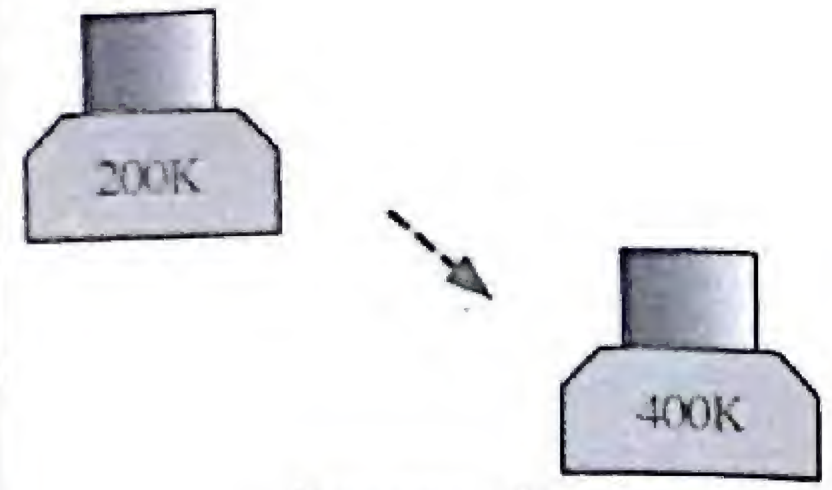
Siendo m_b la masa del bloque, c_b su calor específico, T_i la temperatura inicial y T_f la temperatura final. Por otra parte, los reservorios mantienen sus temperaturas constantes, por lo tanto el cambio correspondiente de entropía se calcula mediante la expresión:

$$\Delta S(\text{res}) = -\frac{Q_b}{T_r} = -\frac{m_b c_b (T_f - T_i)}{T_f}$$

El cambio de entropía del universo (reservorio + bloque) es:

$$\Delta S(\text{uni}) = \Delta S(\text{bloq}) + \Delta S(\text{res})$$

$$\Delta S(\text{uni}) = m_b c_b \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - \frac{m_b c_b (T_f - T_i)}{T_f}$$

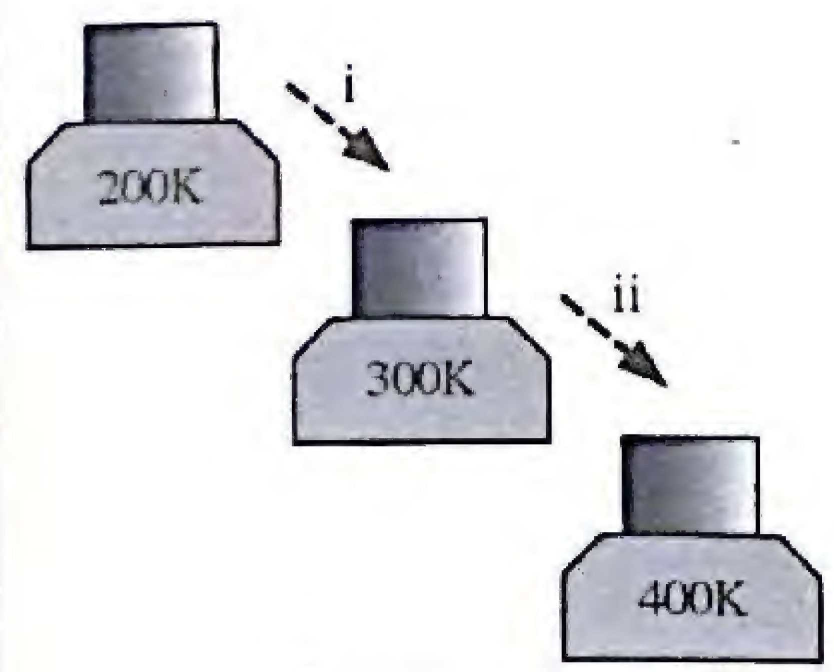


Proceso (1)

Proceso (1): Calentamiento directa al reservorio de 400K:

$$\Delta S_u = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{400\text{K}}{200\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(200\text{K})}{400\text{K}}$$

$$\Delta S(\text{uni}) = 277{,}3\ \text{J/K} - 200\ \text{J/K} = +77{,}3\ \text{J/K}$$



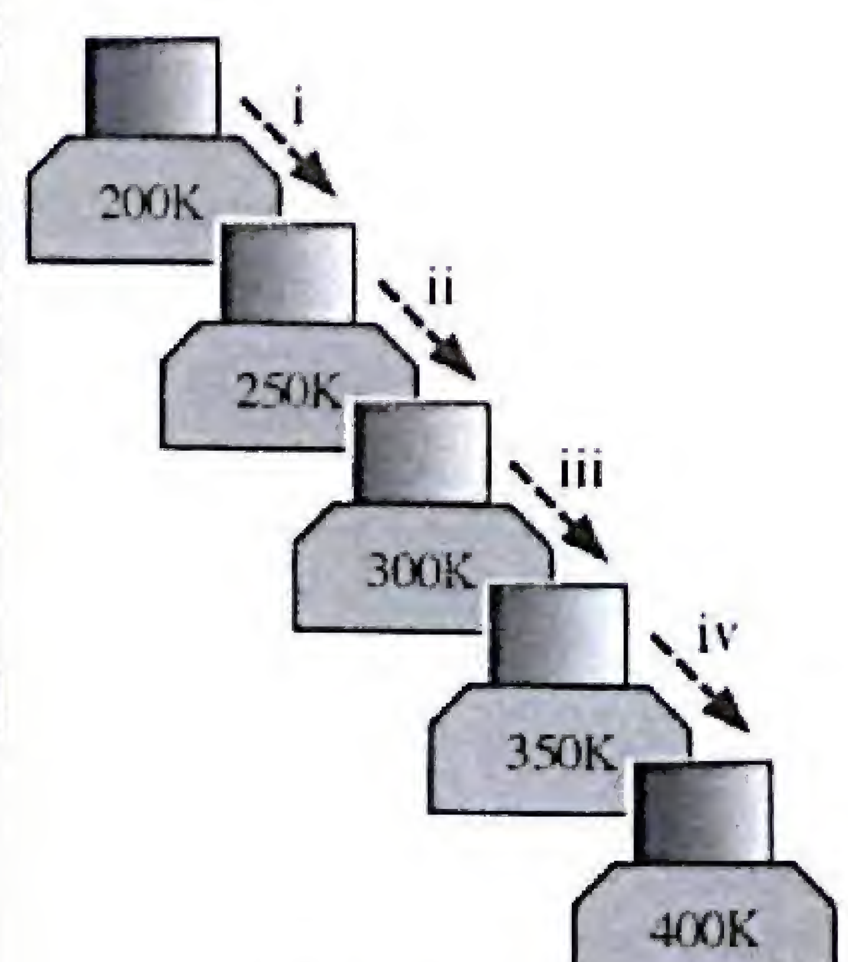
Proceso (2)

Proceso (2): Calentamiento en dos etapas:

$$\Delta S_u^{I} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{300\text{K}}{200\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(100\text{K})}{300\text{K}}$$

$$\Delta S_u^{II} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{400\text{K}}{300\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(100\text{K})}{400\text{K}}$$

$$\Delta S(\text{uni}) = \Delta S^{i} + \Delta S^{ii} = 28{,}9\text{J/K} + 15{,}1\text{J/K} = +44\ \text{J/K}$$



Proceso (3)

Proceso (3):Calentamiento en cuatro etapas:

$$\Delta S_u^{I} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{250\text{K}}{200\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(50\text{K})}{250\text{K}}$$

$$\Delta S_u^{II} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{300\text{K}}{250\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(50\text{K})}{300\text{K}}$$

$$\Delta S_u^{III} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{350\text{K}}{300\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(50\text{K})}{350\text{K}}$$

$$\Delta S_u^{IV} = (1\text{kg})(400\text{J/kg.K})\ln\left(\frac{400\text{K}}{350\text{K}}\right) - \frac{(1\text{kg})(400\text{J/kg.K})(50\text{K})}{400\text{K}}$$

El cambio total de entropía del universo es:

$$\Delta S(\text{uni}) = \Delta S^{I} + \Delta S^{II} + \Delta S^{III} + \Delta S^{IV}$$

$$\Delta S(\text{uni}) = 9.3\ \text{J/K} + 6.3\text{J/K} + 4.5\ \text{J/K} + 3.4\text{J/K}$$

$$\Delta S(\text{uni}) = +23{,}5\ \text{J/K}$$

Si comparamos los tres procesos de calentamiento, podemos concluir que el cambio de entropía del universo, $\Delta S(\text{uni})$, va disminuyendo a medida que se va aumentando el número de etapas intermedias.

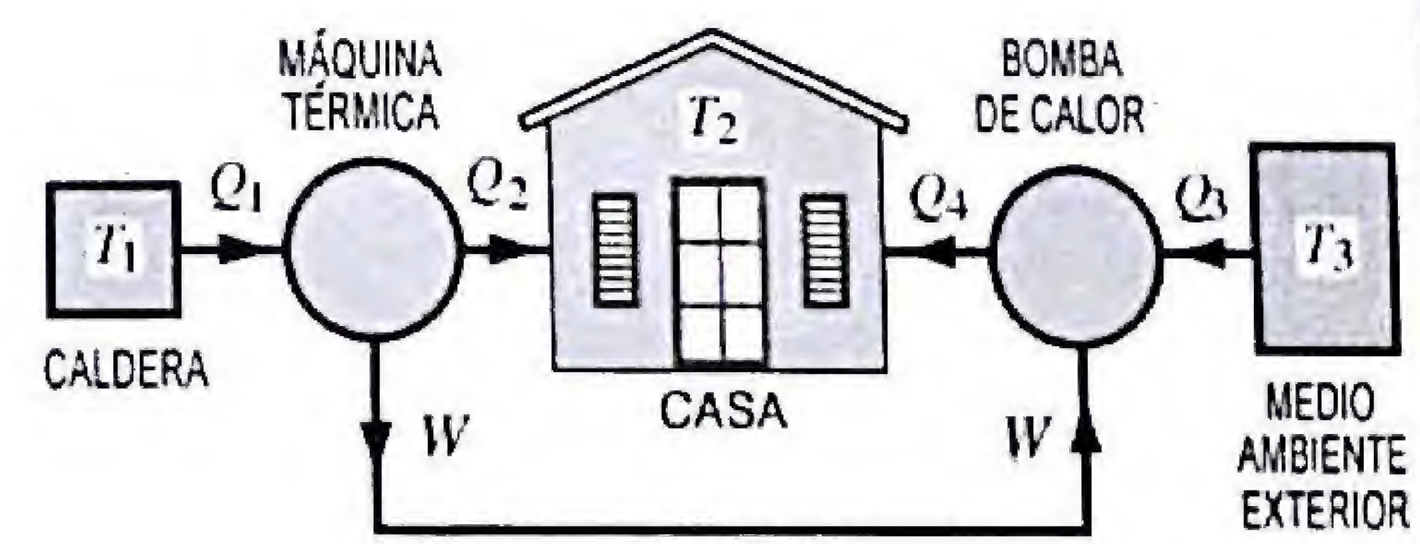
b) Se podría lograr un calentamiento reversible ($\Delta S(\text{uni}) \to 0$), si vamos al límite de un número infinito de reservorios intermedios, cada uno que difiera del siguiente en un cambio infinitesimal de temperatura ΔT.

Respuesta:

a) (1) $\Delta S(\text{uni}) = +77{,}3$ J/K
(2) $\Delta S(\text{uni}) = +44{,}0$ J/K
(3) $\Delta S(\text{uni}) = +23{,}5$ J/K
b) Con un número infinito de reservorios se logra un proceso reversible.

PR-5.39. *Proponiendo un sistema de calefacción*

Un inventor propone un nuevo sistema para la calefacción de una casa. Una *máquina térmica* absorbe calor Q_1 de una caldera donde se quema un combustible, realiza un trabajo W y bombea a la casa calor, Q_2. El trabajo W de la máquina, se utiliza a su vez, para hacer funcionar una *bomba de calor*, la cual absorbe calor, Q_3, del ambiente exterior frío y suministra calor adicional a la casa, Q_4, a una temperatura mayor.



a) Determine el calor total ($Q = Q_2 + Q_4$) suministrado a la casa en términos del calor Q_1 generado por la caldera y las temperaturas T_1, T_2 y T_3. Suponga que las máquinas son ideales (máquinas de Carnot).

b) Suponga que $T_1 = 300$ °C, $T_2 = 27$ °C, y $T_3 = 0$ °C. Para una dada cantidad de combustible de la caldera, ¿cuál será el factor de incremento del calor suministrado a la casa mediante este sistema, en comparación con el que suministraría la caldera operando directamente?

Solución. Aplicando la primera ley a cada máquina y tomando en cuenta que el trabajo W es el mismo para ambas máquinas, podemos escribir:

$$Q_1 = W + Q_2 \qquad Q_4 = W + Q_3$$

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_4 - Q_3 \quad \Rightarrow \quad Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 = Q$$

Como son máquinas de Carnot usamos la relaciones entre calores y temperaturas:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \qquad \text{y} \qquad \frac{Q_3}{T_3} = \frac{Q_4}{T_2}$$

Se obtiene:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_4}{T_2}$$

Ahora sustituimos Q_3 en términos de Q_1 y $Q = Q_2 + Q_4$.

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q - Q_1}{T_3} = \frac{Q}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{T_3} - \frac{Q}{T_2} = \frac{Q_1}{T_3} - \frac{Q_1}{T_1}$$

El calor total ($Q = Q_2 + Q_4$) suministrado a la casa en términos del calor que genera la caldera es:

$$Q = Q_1 \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3}\right)$$

b) Para $T_1 = 300°C = 573K$, $T_2 = 27°C = 300K$, y $T_3 = 0°C = 273K$, tenemos:

$$Q = Q_1 \frac{300K}{573K}\left(\frac{573K - 273K}{300K - 273K}\right) = 5{,}8Q_1$$

Respuesta

a) $Q = Q_1 \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3}\right)$

b) $Q = 5{,}8Q_1$

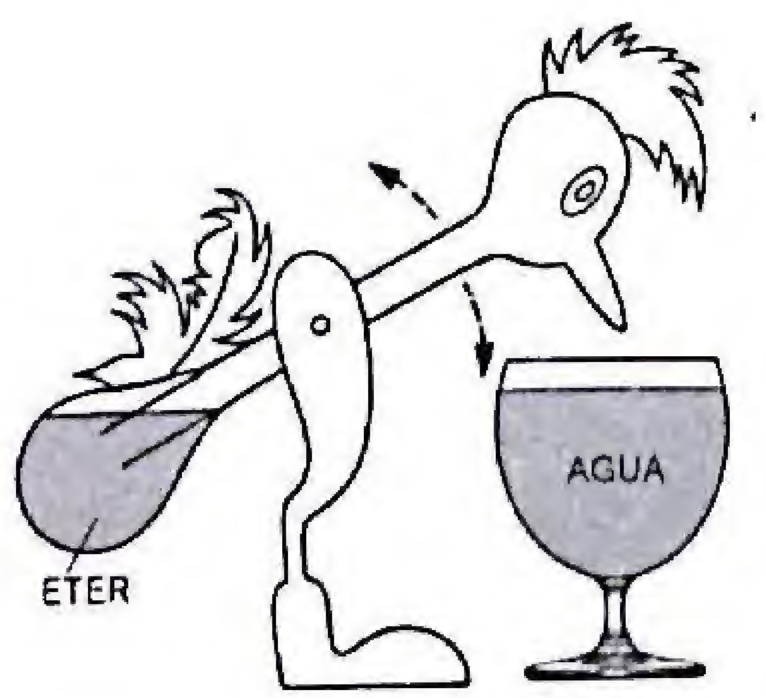
PR-5.40. *El pájaro bebedor: Máquina térmica cíclica*

Esta es una ingeniosa máquina térmica de juguete, con aspecto de pájaro que está hecho de un tubo de vidrio con un bulbo en la cabeza y otro en la cola. Está medio lleno con un líquido volátil (éter), junto con el vapor de ese líquido. Cuando metemos su cabeza en un vaso con agua, se endereza volviendo a su posición casi vertical, enseguida se vuelve a inclinar, mete su pico en el vaso, bebe y empieza un nuevo ciclo. Su movimiento de vaivén se repite como si fuese una máquina de movimiento perpetuo que parece desafiar las leyes de la física.

a) Explique su funcionamiento en base a la segunda ley de la termodinámica.

b) ¿Por qué funciona mas rápidamente en días secos que en días húmedos?

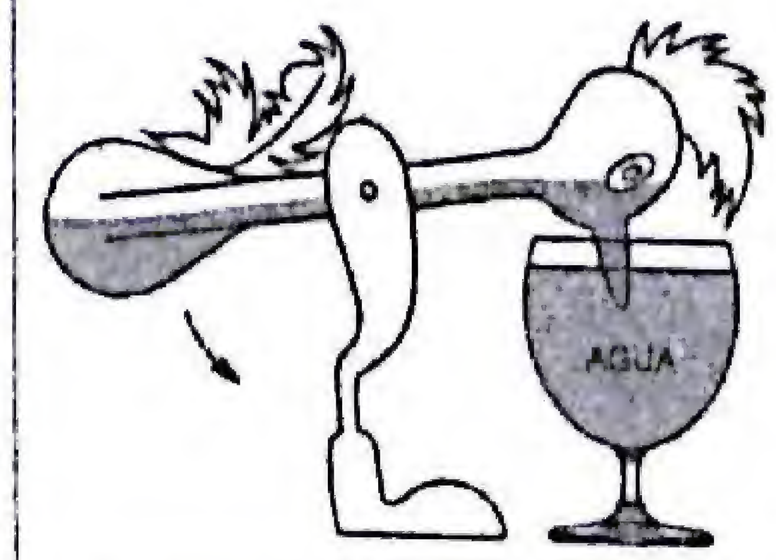
c) ¿Si en lugar de agua llenamos el vaso con una bebida alcohólica, el pájaro beberá mas rápido?



El pájaro bebedor
¿movimiento perpetuo?

Solución. a) El proceso se comienza, introduciendo el pico del pájaro en el agua. Su pico está envuelto con una tela absorbente que se humedece. Al mismo tiempo, en la posición horizontal los dos recipientes de vapor de éter quedan conectados y así el éter líquido puede fluir libremente.

Ahora, la mayor parte del líquido se encuentra en la mitad inferior haciendo su cola más pesada, y por ello el pájaro se endereza. La cabeza que está mojada, luego se enfría por evaporación, de manera que la presión en la cabeza disminuye, y la presión más alta en la cola empuja al líquido a subir por el tubo. Eventualmente, sube suficiente líquido a la cabeza, que la vuelve mas pesada obligando al pájaro a inclinarse para beber de nuevo. Una vez que está horizontal, las dos cámaras de vapor igualan su presión, y el líquido fluye de nuevo hacia la cola del pájaro. Este proceso se repite indefinidamente mientras el vaso contenga agua.



Al inclinarse el pájaro para beber, se derrama el éter en su depósito inferior y el pájaro se endereza

El efecto neto es una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica. El calor es transferido de un depósito a temperatura elevada (el cuerpo) a un depósito de baja temperatura (la cabeza del pájaro), con la realización de un trabajo (que se evidencia por el movimiento)

b) El pájaro continuará "bebiendo" sin parar, mientras pueda mojar su cabeza y siempre que la humedad del aire en que se encuentre no sea excesiva para que el agua pueda evaporarse, y así se pueda mantener una diferencia de temperaturas entre la cabeza y el cuerpo. Por lo tanto, el pájaro funcionará más rápidamente en los días secos porque en los días húmedos la evaporación sería mas lenta.

La evaporación del agua en el pico hace que se enfríe el vapor de éter, baja su presión y el líquido sube.

c) Si, en lugar de agua, llenamos el vaso con una bebida alcohólica, el enfriamiento de la cabeza será más eficiente y el pájaro beberá con mayor frecuencia.

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-5.01. ***¿Cuál de estos procesos será reversible?***

a) El helado de chocolate de la barquilla se derrite.

b) El perfume de un frasco abierto se evapora.

c) Se destapa una botella de champagne

d) Un cubo de hielo a 0 ºC se funde al ponerlo en un depósito a temperatura ligeramente superior a 0 ºC.

e) Nos comemos una rebanada de pan.

PE-5.02. ***Según la segunda ley de la termodinámica***

a) La energía se conserva sólo en aquellos procesos termodinámicos que son reversibles.
b) El trabajo nunca puede convertirse completamente en calor.
c) Es imposible extraer calor de un sistema y convertirlo íntegramente en trabajo.
d) La única máquina 100% eficiente es la de Carnot.
e) La razón por la que las máquinas reales no pueden ser 100% eficientes es la fricción, que es inevitable.

PE-5.03. ***Acerca de la entropía podemos decir que..***

a) Es la energía que se pierde en los procesos irreversibles.
b) Mientras mas desordenado sea un sistema, menor será su entropía.
c) La entropía de un sistema nunca puede disminuir.
d) La entropía del universo puede aumentar o puede disminuir.
e) El cambio de entropía de un sistema entre dos estados de equilibrio no depende de cómo se llega de un estado al otro.

PE-5.04. ***Una máquina térmica que sería 100% eficiente***

Suponga una máquina térmica ideal construida de modo que funcione en un ciclo de Carnot. Esta máquina sería 100% eficiente si..

a) Todo el calor que extraiga del foco caliente lo botara al foco frío.
b) Todas sus piezas móviles estuviesen libres de fricción.
c) La temperatura del foco frío fuera igual a la del foco caliente.
d) La temperatura del foco frío fuera igual 0 ºC.
e) La temperatura del foco frío fuese igual 0 ºK.

PE-5.05. ***¿Será factible esta máquina térmica?***

Un alumno construye una máquina térmica que consiste de una rueda cuyos radios son bandas de goma. Al acercar un bombillo prendido se contraen las bandas más próximas y así el centro de gravedad de la rueda debería desplazarse, provocando que gire. El proceso se repetiría en forma continua.
Se puede afirmar que esta máquina...

a) Nunca podría funcionar porque violaría la primera ley de la termodinámica.
b) Nunca podría funcionar porque violaría la segunda ley de la termodinámica.
c) No viola ninguna ley de la termodinámica y debería girar en sentido contrario a las agujas del reloj.
d) No viola ninguna ley de la termodinámica y debería girar en el sentido horario

*Feynman Lectures on Physics, 1963

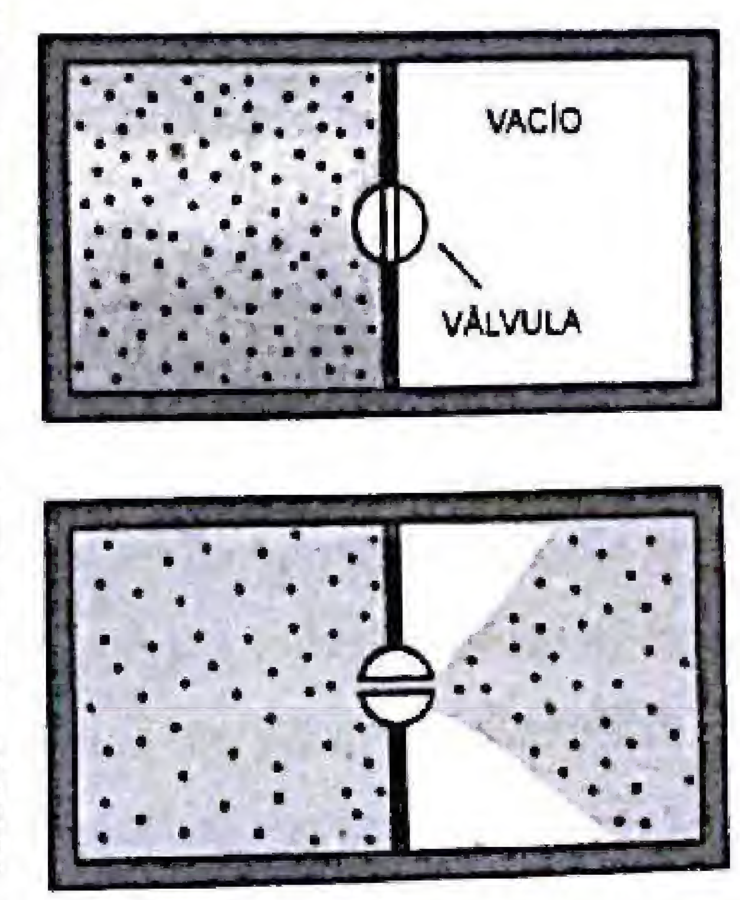
PE-5.06. ***Lo que sucede en una expansión libre***

Un recipiente rígido está aislado térmicamente y posee dos compartimientos iguales que está separados por una llave de paso. El compartimientos de la derecha está inicialmente vacío y en el de la izquierda hay un gas ideal. Si abrimos la llave, se puede afirmar que al expandirse el gas...

a) Aumenta su entropía. b) Se enfría.

c) Realiza un trabajo. d) Aumenta su presión.

e) Disminuye su energía interna.



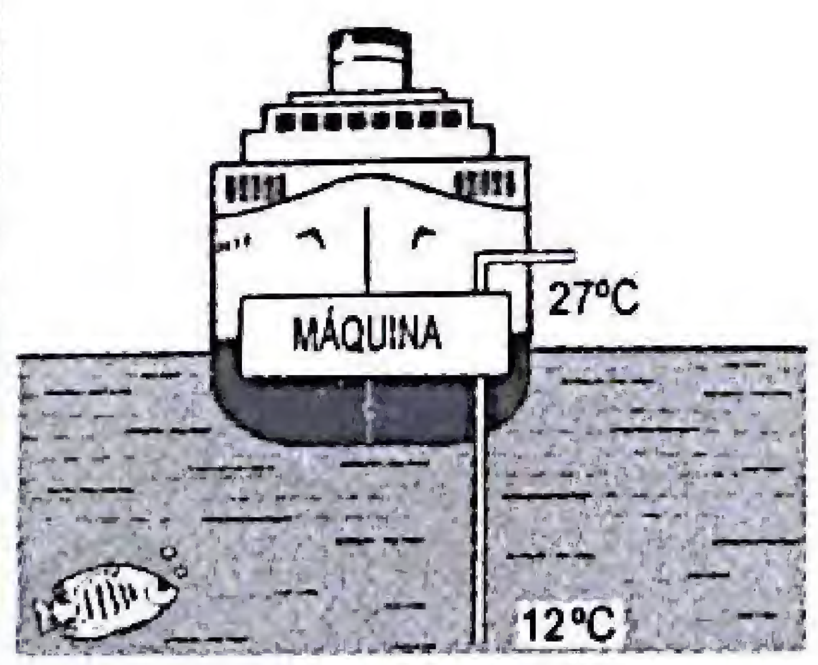
PE-5.07. *El diablito de Maxwell*

En un experimento hipotético propuesto por Maxwell, dos cámaras idénticas A y B del mismo gas y a igual temperatura, se comunican por una llave. Un diminuto *diablo* gobierna la llave, abriéndola sólo cuando una molécula rápida va de B a A o cuando una lenta viene de A hacia B. Al cabo de un tiempo, las moléculas rápidas se encontrarán en A y las lentas en B. Como resultado de este experimento mental, se conseguiría que…

a) Sea violada la conservación de la energía.
b) La temperatura en ambos lados queda igual.
c) La temperatura en B resulta mayor que en A.
d) La entropía del gas aumenta.
e) Sea violada la segunda ley de la termodinámica, a menos que la entropía del diablito se incremente.

PE-5.08. *Extrayendo energía del océano*

Se construye una máquina que extrae energía mediante el aprovechamiento del gradiente de temperatura que existe en el océano. Si la temperatura de la superficie es 27 °C y la de aguas profundas es 12 °C, ¿cuál sería la máxima eficiencia teórica de esta máquina?



a) 56% b) 10% c) 5% d) 1% e) 0,5%

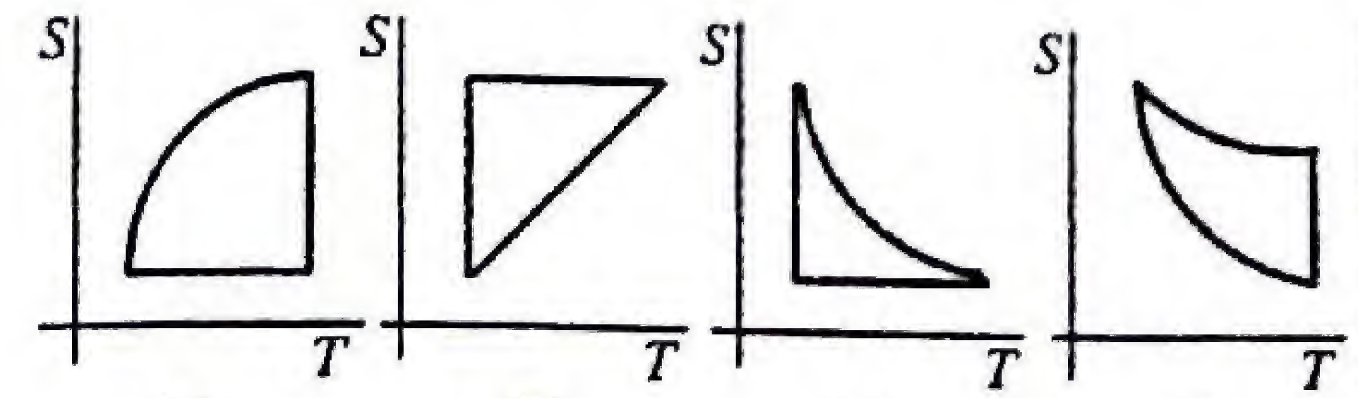
PE-5.09. *Hace un calor insoportable...*

En una noche muy calurosa, una alumna decide cerrar las puertas y ventanas de la cocina y dejar funcionando la nevera con sus puertas abiertas. Al cabo de un tiempo, el resultado es que *la temperatura* de la cocina…

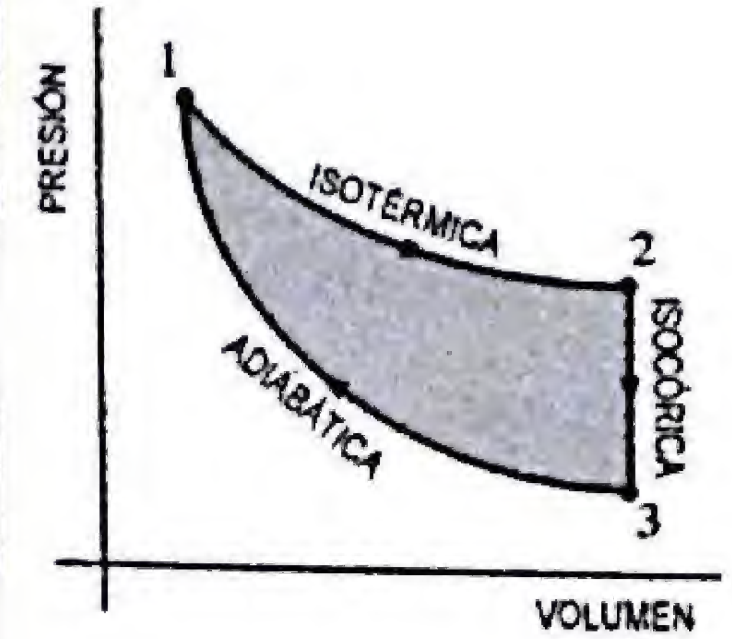
a) No debería variar por la primera ley.
b) Debería aumentar por la primera ley.
c) Debería disminuir por la primera ley.
d) Debería aumentar por la segunda ley.
e) Debería disminuir por la segunda ley.

PE-5.10. *¿Cuál sería el gráfico de entropía correcto?*

El diagrama p vs V que se muestra a la derecha corresponde a un ciclo reversible de un gas que consiste de tres etapas: 1→2: *Isotérmica*, 2→3: *Isocórica*, 3→1: *Adiabática*. ¿Cuál de los siguientes podría ser el correspondiente gráfico de Entropía vs. Temperatura?



(a) (b) (c) (d)



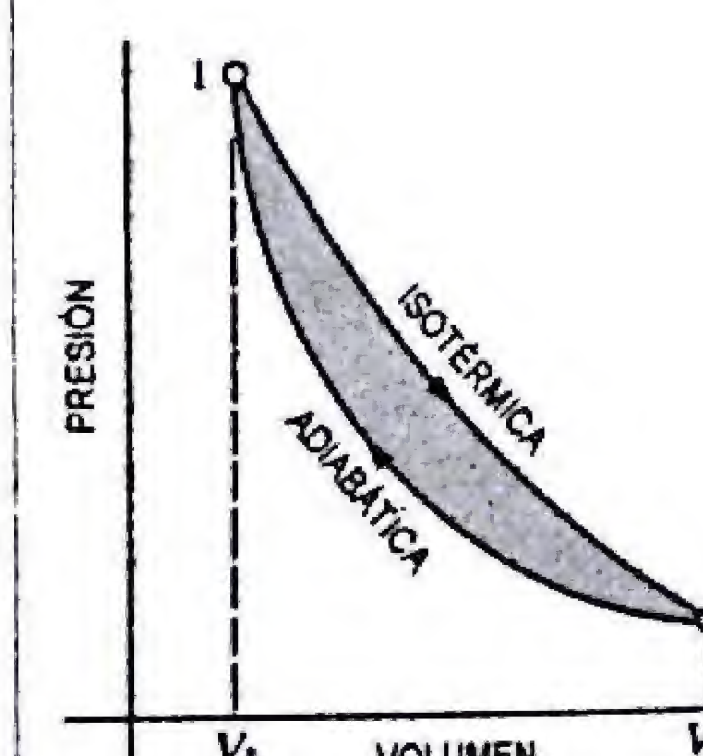
PE-5.11. *Lo que siempre resulta diferente de cero*

Después que una máquina térmica reversible completa un ciclo, ¿cuál de las siguientes cantidades resulta diferente de cero?

a) W b) ΔS c) ΔU d) ΔT e) Δp

PE-5.12. *Un ciclo de dos etapas que no se puede*

Se propone una máquina térmica que funcione en un ciclo de trabajo de dos etapas: una expansión isotérmica y una compresión adiabática. Esta máquina es imposible que funcione porque....



a) El calor recibido es igual al calor cedido, contradiciendo la primera ley.
b) Todo el calor recibido durante el ciclo se convertiría en trabajo, contradiciendo la segunda ley.
c) El trabajo que realiza en un ciclo sería negativo.

PE-5.13. *Proceso reversible sin cambio de entropía*

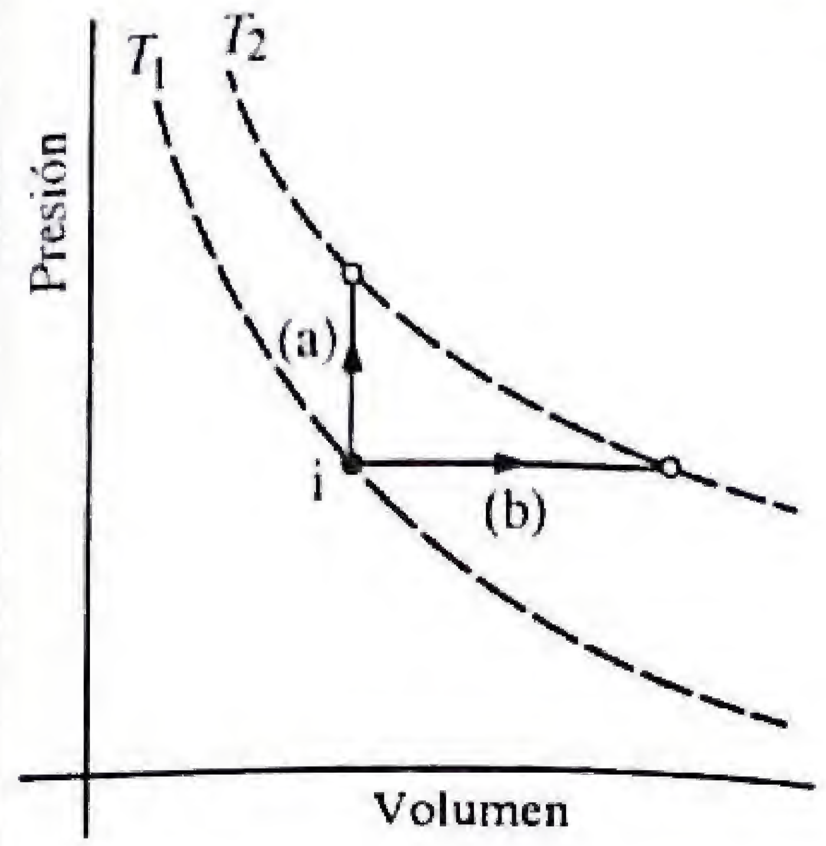
¿En cuál de estos procesos reversibles no hay cambio en la entropía?

a) Isotérmico, b) Isobárico, c) Adiabático,
d) Isocórico, e) En todos cambio la entropía

PE-5.14. *Compare los cambios de entropía*

Un gas ideal está inicialmente a la temperatura T_1 y pasa a una temperatura mayor T_2, mediante dos procesos distintos. (a) a volumen constante, (b) a presión constante. Si comparamos los cambios de entropía en estos dos procesos podemos afirmar que:

b) $\Delta S_a = \Delta S_b$ b) $\Delta S_a < \Delta S_b$ c) $\Delta S_a > \Delta S_b$



PE-5.15. *La importancia del ciclo de Carnot es que..*

a) Es el ciclo mas sencillo.
b) Es el ciclo que utiliza la mayoría de las máquinas.
c) Su rendimiento es del 100 %.
d) Su rendimiento es cercano al 100 %.
e) Determina el rendimiento óptimo de una máquina que opere entre dos temperaturas dadas.

PE-5.16. *Compare el rendimiento de las dos máquinas*

La máquina de Carnot A opera entre las temperaturas T_1 = 200 °C y T_2 = 400 °C. La máquina de Carnot B opera entre las temperaturas T_1 = 200 K y T_2 = 400 K. ¿Cuál de las dos máquinas tiene mayor rendimiento?

a) La máquina A tiene mayor rendimiento
b) La máquina B tiene mayor rendimiento
c) Las dos tienen el mismo rendimiento

PE-5.17. *¿Quieres que tu máquina rinda más?*

Para mejorar el rendimiento teórico de una máquina térmica que opera entre las temperaturas de un foco frío T_F y de un foco caliente T_C, ¿qué conviene más, bajar T_F en 10 K o subir T_C en 10 K?

a) Disminuir T_F
b) Aumentar T_C
c) Aumentar T_C o disminuir T_F da el mismo efecto

$\frac{T_c - T_f}{T_c}$

$1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{1-10}{T_c} = \frac{9}{T_c}$

$1 - \frac{T_0}{T_0} = \frac{10 - T_0}{10}$

PE-5.18. *Los BTU de mi aparato de aire acondicionado*

Me compré un aparato de aire acondicionado que tiene una plaquita en la parte de atrás con la inscripción: *18 000 Btu / h, 220 V - 9,6 A*. El vendedor dijo que esto significa que consume una potencia eléctrica $P = VI$ = (220V)(9,6A) = 2112 W, mientras extrae 18000 Btu de calor de la habitación en cada hora. Esta información me permite deducir que el coeficiente de rendimiento del aparato es....

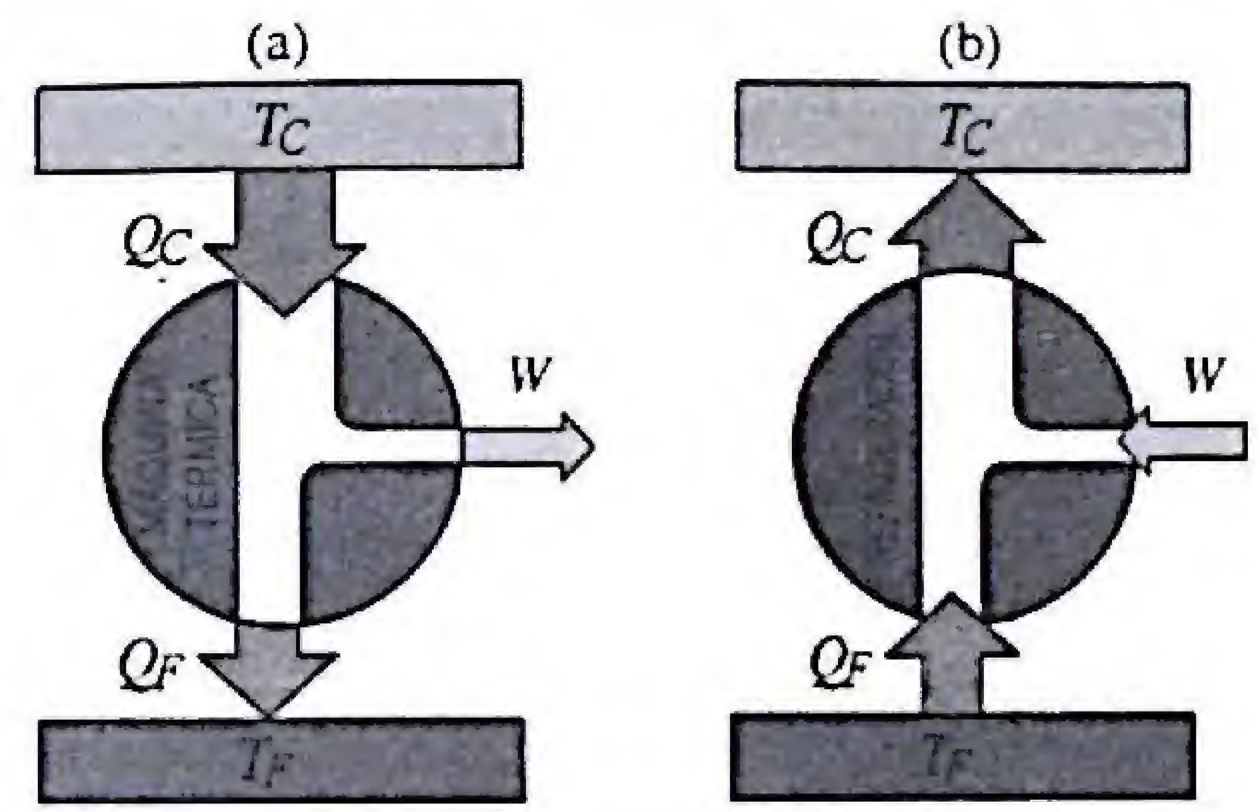
a) 20 b) 7,5. c) 5 d) 2,5 e) 10

* Un Btu (British thermal unit) se define como la energía necesaria para elevar la temperatura de una libra de agua en 1 °F (entre 63 y 64 °F).

1 Btu equivale a 1055 J

PE-5.19. *Operando una maquina en sentido contrario*

Un alumno puso a funcionar en sentido contrario una máquina de Carnot que tiene 25% de eficiencia (Fig. a), de modo que ahora trabaje como un refrigerador (Fig. b).



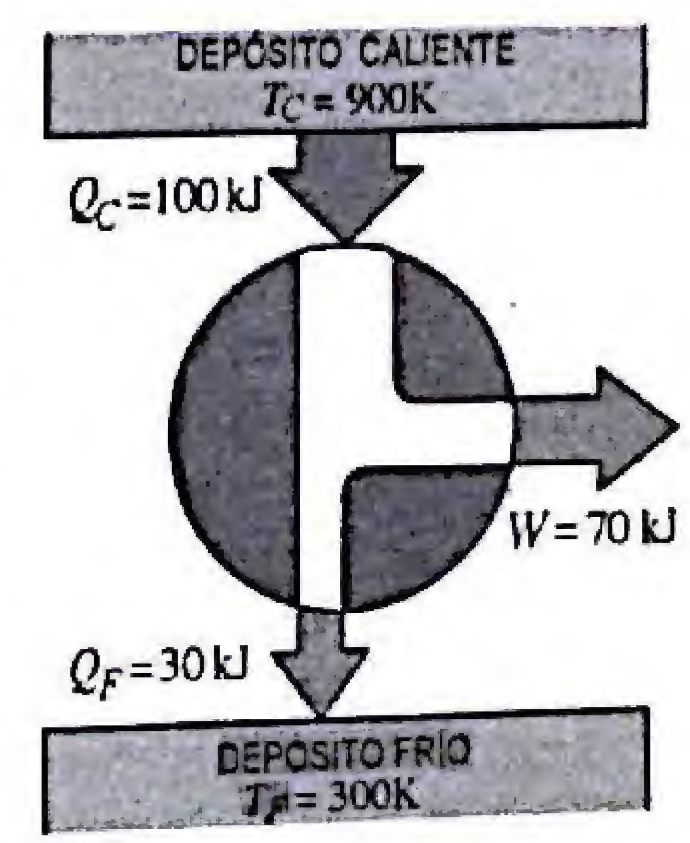
¿Cuál será el coeficiente de rendimiento del refrigerador?

a) $K_e = 0,5$
b) $K_e = 2,5$
c) $K_e = 3,0$
d) $K_e = 5,0$
e) $K_e = 7,5$

PE-5.20. *¿Invertiría Ud. dinero en esa máquina?*

En un aviso de prensa se busca un socio para fabricar un nuevo modelo de máquina térmica que debería tomar cíclicamente 100 kJ de un foco caliente a la temperatura de 900 K, perder 30 kJ en un foco frío a la temperatura de 300 K y aprovechar 70 kJ para realizar trabajo. Un alumno de física aconseja no invertir dinero en el proyecto, ya que dicha máquina.....

a) Violaría la primera ley de la termodinámica.
b) Violaría la segunda ley de la termodinámica.
c) Violaría tanto la primera como la segunda ley.
d) Nada de esto es cierto. Ese alumno está equivocado.



CAP. 5: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
5.01				✓	
5.03					✓
5.05				✓	
5.07					✓
5.09		✓			
5.11	✓				
5.13			✓		
5.15					✓
5.17	✓				
5.19			✓		

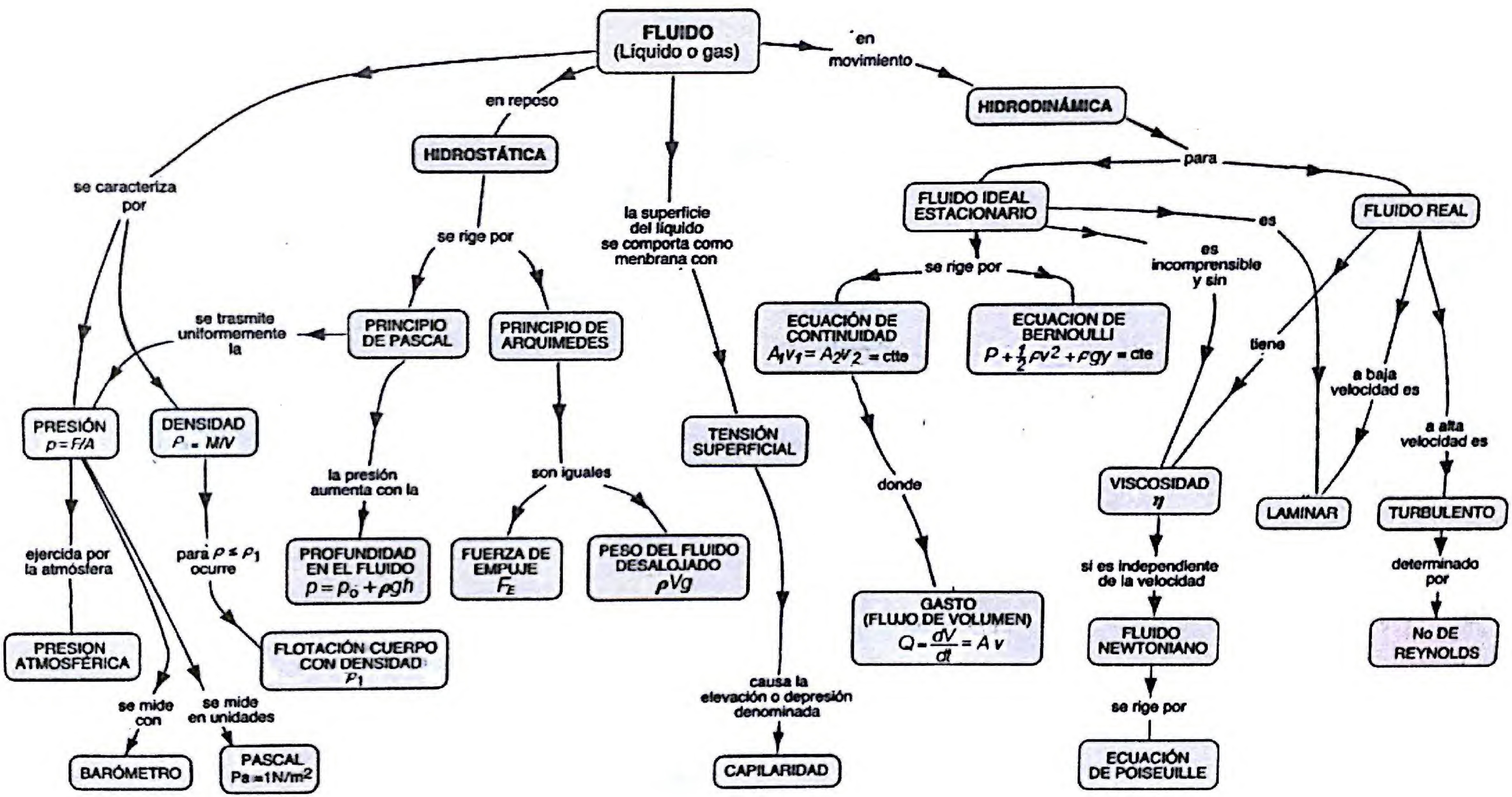
	a	b	c	d	e
5.02			✓		
5.04					✓
5.06	✓				
5.08			✓		
5.10	✓				
5.12		✓			
5.14		✓			
5.16		✓			
5.18				✓	
5.20		✓			

LUDWIG BOLTZMANN

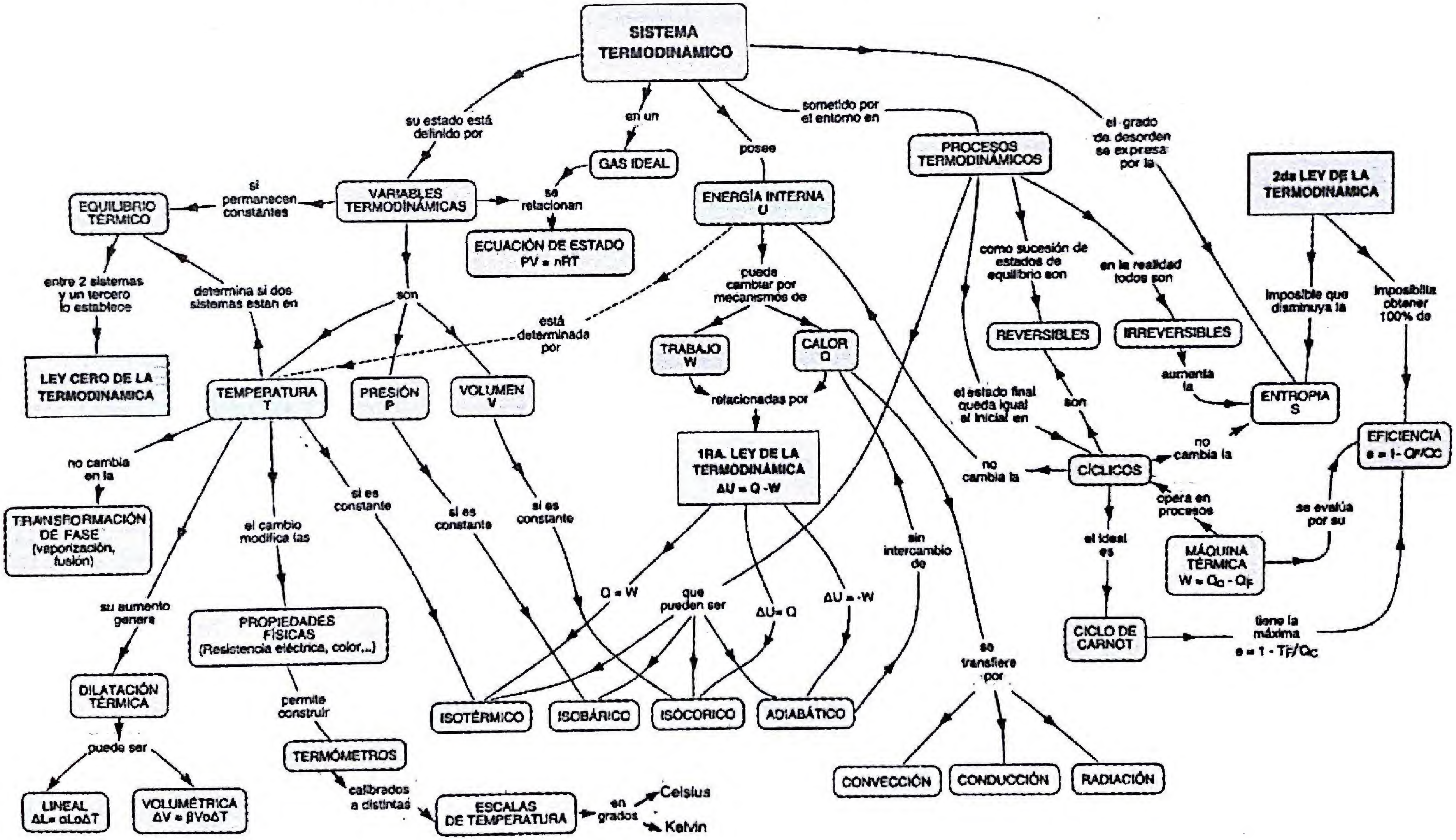
1844 - 1906

Nació en Viena (Austria) en el seno de una familia acomodada. Cuando aún era muy joven heredó una pequeña fortuna de su abuelo materno, gracias a lo cual se pudo concentrar en sus estudios. Estudió en Oxford y fue profesor en las universidades de Viena, Munich y Leipzig. Fue uno de los pioneros de la mecánica estadística, rama de la física que utiliza los métodos de la estadística para analizar las propiedades de gran número de átomos y moléculas y así predecir el comportamiento macroscópico del conjunto. Uno de los logros de Boltzmann fue en 1871, con la formulación de la distribución estadística de Maxwell-Boltzmann, deduciendo el teorema de equipartición de la energía, según el cual la energía media del movimiento de una molécula es igual para cada grado de libertad. Otro importante hallazgo lo hizo junto a Joseph Stefan, demostrando que la radiación de un cuerpo negro podría derivar de los principios de la termodinámica. La ley de Stefan-Boltzmann establece que la radiación de un cuerpo negro, es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta. Durante la década de 1870, Boltzmann publicó una serie de ensayos que demostraban que la segunda ley de la termodinámica podría explicarse analizando estadísticamente los movimientos de los átomos. Dio por primera vez una interpretación estadística de la entropía, introduciendo la relación $S = k\, lnW$ que expresa la entropía en términos de una constante k (la constante de Boltzmann) y del número W de estados microscópicos. Su trabajo científico estuvo marcado por la disputa que había en la época entre los que defendían la hipótesis atómica y aquellos que ponían en duda la existencia de átomos y su papel fundamental en la descripción del mundo físico. Las ideas de Boltzmann fueron atacadas duramente por toda una escuela de pensamiento representada por eminentes científicos de la época. Esto le afectó emocionalmente y desilusionado se sumió en una depresión. Durante las vacaciones de 1906, mientras su mujer y su hija nadaban en la bahía cerca de Trieste, Boltzmann se suicidó. Pocos meses después de su muerte, la mayor parte de sus teorías iban siendo corroboradas con datos experimentales. Ya Planck, en 1900, no tuvo más remedio que utilizar los métodos estadísticos de Boltzmann para poder resolver el problema del espectro del cuerpo negro, trabajo que fue fundamental para el nacimiento de la mecánica cuántica. Einstein publicó en 1906, su famoso artículo para explicar el movimiento browniano en que utilizó los métodos de la mecánica estadística que contribuiría de forma decisiva a la aceptación de los átomos como entidades con existencia real. Como dato anecdótico, en la lápida de Boltzmann en el cementerio de Viena está tallada en piedra su famosa fórmula de entropía: $S = k\, lnW$.

MAPA DE CONCEPTOS: FLUIDOS



MAPA DE CONCEPTOS: TERMODINÁMICA



PROCESOS TERMODINÁMICOS
GASES IDEALES

PROCESO	ECUACIÓN	CALOR	TRABAJO	ENERGÍA INTERNA	ENTROPÍA
ISOTÉRMICO (Temperatura constante) $\Delta T = 0$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	$Q_{12} = nRT \ln(\frac{V_2}{V_1})$	$W_{12} = nRT \ln(\frac{V_2}{V_1})$	$\Delta U_{12} = 0$	$\Delta S_{12} = nR \ln(\frac{V_2}{V_1})$
ISOCÓRICO (Volumen constante) $\Delta V = 0$	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	$Q_{12} = nc_V (T_2 - T_1)$	$W_{12} = 0$	$\Delta U_{12} = nc_V (T_2 - T_1)$	$\Delta S_{12} = nc_V \ln(\frac{T_2}{T_1})$
ISOBÁRICO (Presión constante) $\Delta p = 0$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$Q_{12} = nc_P (T_2 - T_1)$	$W_{12} = p(V_2 - V_1)$	$\Delta U_{12} = nc_V (T_2 - T_1)$	$\Delta S_{12} = nc_P \ln(\frac{T_2}{T_1})$
ADIABÁTICO (Sin flujo de calor) $Q = 0$	$pV = nRT$ $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$	$Q_{12} = 0$	$W_{12} = nc_V (T_1 - T_2)$ $W_{12} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$W_{12} = nc_V (T_2 - T_1)$ $\Delta U_{12} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$	$\Delta S_{12} = 0$ (Isentrópico)

CONSTANTES FÍSICAS

Número de Avogadro:	$N_A = 6.02\text{x}10^{23}$/ mol
Constante universal de los gases:	$R = kN_A = 8.31$ J/mol.K
Constante de Boltzmann:	$k = 1.38\text{x}10^{-23}$ J/K
Presión atmosférica estándar:	p_A = 1Atm = 76,0 cm de Hg = $1{,}013x10^5$ Pa
Equivalente mecánico del calor:	1 Caloría = 4,186 J
Densidad del agua (1 Atm. y 20 °C):	ρ = 1000 kg/m^3
Temperatura de ebullición del agua (Presión atm. estándar):	T = 100,0 °C = 373,16 K
Calor especifico del agua (15 °C):	c_A = 4186 J/kg °C
Calor específico del hielo (5 °C):	c_H = 2090 J/kg °C
Calor de fusión del hielo:	L_f = 333 kJ/kg
Calor de vaporización del agua:	L_v = 2260 kJ/kg
Calores específicos de gas ideal monoatómico:	$c_V = \frac{3}{2}R \qquad c_P = \frac{5}{2}R$
Calores específicos de gas ideal diatómico::	$c_V = \frac{5}{2}R \qquad c_P = \frac{7}{2}R$
Constante de Stefan-Boltzmann:	$\sigma = 5{,}67\text{x}10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4$
Conductividad térmica del Agua (25°C):	k = 0,6 W/m.K
Conductividad térmica del Aire (25°C):	k = 0,024 W/m.K
Conductividad térmica del Cobre (25°C):	k = 397 W/m.K

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Para los lectores que deseen aclarar, ampliar o profundizar sus conocimientos sobre este tema a nivel de física básica universitaria, nos permitimos sugerir los siguientes libros:

ALONSO, M. y FINN, E.: *Física*, Addison Wesley, 1992.

BÚJOVTSEV, B., KRIVCHENKOV, V, MIAKISHEV, G. y SARÁEVA, I.: *Problemas Seleccionados de Física Elemental*, Editorial Mir Moscú, 1979.

EISBERG, R. y LERNER, L. S: *Física, Vols. I y II*, McGraw-Hill, 1984.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON R. B. and SANDS M: *Lectures on Physics, Vol. I*, Addison-Wesley, 1964.

FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S and THORNTON, S: *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

GIANCOLI, D: *Física: Principios con aplicaciones*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J: *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, 1997.

LEA, S y BURKE, J: Física: *La naturaleza de las cosas, Volumen 1*, International Thomson Editores, 1999.

REIF, FREDERICK: *Statistical Physics, Berkeley Physics Course, Volume 5*, McGraw-Hill, 1965.

SEARS, F., ZEMANSKY, M, YOUNG H. D. and FREEDMAN R. A: *Física Universitaria, Vol. 1*, Novena Edicion, Addison-Wesley, 1998.

SERWAY, R. A: *Física, Volumen 1*, Cuarta edición, McGraw-Hill, 1997.

SLOBODETSKI, I. y ORLOV, V: *Olimpiadas de Física de la Unión Soviética*, Vneshtorgizdat, Moscú, 1989.

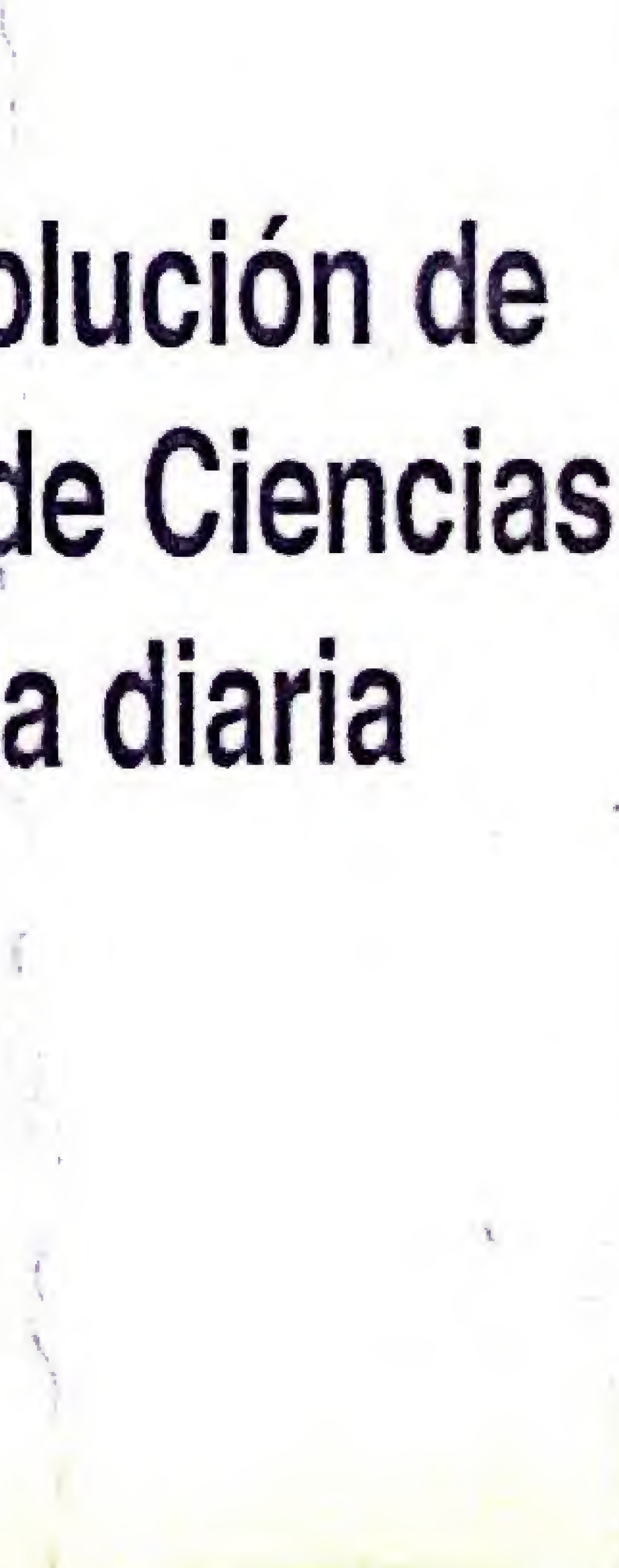
TIPLER, P. A: *Física, Volumen 1*, Tercera edición, Editorial Reverté, 1996.

ZEMANSKY, MARK W: *Heath and Thermodynamics*, 5th Edition, McGraw-Hill, 1968.

FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

Estática de Fluidos • Dinámica de Fluidos •
Temperatura • Primera Ley de la Termodinámica •
Segunda Ley de la Termodinámica

Un enfoque metodológico centrado en la resolución de problemas con énfasis, tanto en aplicaciones de Ciencias e Ingeniería, como en situaciones de la vida diaria



ISBN 980-12-3578-1

Volumen 4:
Serie Física para
e Ingeniería